Séminaire de théorie des nombres de Grenoble

Jean-Pierre Wintenberger

Structure galoisienne de limites projectives d'unités locales

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 7 (1978-1979), exp. n° 9, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1978-1979__7__A9_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
1978-1979
Grenoble

STRUCTURE GALOISIENNE DE LIMITES PROJECTIVES D'UNITES LOCALES

par Jean-Pierre WINTENBERGER

1. - INTRODUCTION

Soit p un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit K_∞ une extension abélienne de K . On note G le groupe de Galois de K_∞ sur K . On suppose que G est le produit direct d'un groupe Δ d'ordre premier à p et d'un groupe Γ isomorphe à $\mathbb{Z}_p^r$, pour r entier ≥ 1 . On note U_∞ (respectivement Z_∞) la limite projective des groupes des unités fondamentales (resp. des complétions p-adiques des groupes multiplicatifs : pour la définition voir 3) des extensions finies de K contenues dans K_∞ , les morphismes de transition étant induits par la norme. Les groupes U_∞ et Z_∞ sont de manière naturelle des modules sur l'algèbre Λ des mesures p-adiques sur G (l'algèbre Λ est aussi souvent appelée algèbre d'Iwasawa de G). Pour $r = 1$, la structure de ces modules a été étudiée par Iwasawa, cf. § 12 de [1] . Notre problème est d'étudier cette structure pour $r \geq 2$. Notre réponse est partielle, mais nous semble suffire pour les applications concernant les extensions abéliennes des corps quadratiques imaginaires (cf. un travail de Yager à paraître).

C'est avec plaisir que je remercie J.-M. Fontaine pour ses nombreux conseils. Mes plus vifs remerciements vont aussi à J. Coates pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses remarques lors de la rédaction. Je tiens à signaler que Coleman et Yager ont obtenu séparément des résultats (non publiés) sur le sujet.

2. - L'ALGEBRE Λ DES MESURES p-ADIQUES SUR G .

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $G_n = G/p^n\Gamma$. On a : $\Lambda = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p[G_n]$, où $\mathbb{Z}_p[G_n]$ est l'algèbre sur $\mathbb{Z}_p$ du groupe fini G_n . On identifie G à un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de Λ .

On pose $A = \mathbb{Z}_p[\Delta]$. Comme Δ est d'ordre premier à p , les idempotents e_Φ associés aux différents caractères irréductibles de Δ à valeur dans $\mathbb{Q}_p$, appartiennent à A . Si pour chaque Φ , on pose $A_\Phi = e_\Phi A$ et $\Lambda_\Phi = e_\Phi\Lambda$, les algèbres A et Λ se décomposent respectivement en les produits $\prod_\Phi A_\Phi$ et $\prod_\Phi \Lambda_\Phi$. Pour chaque Φ , $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_\Phi$ est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré le degré Φ et A_Φ s'identifie à l'anneau de ses entiers. Soit $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ des générateurs de Γ (en tant que module sur $\mathbb{Z}_p$) ; on pose $T_i = \sigma_i - 1$ pour $1 \leq i \leq r$. L'algèbre Λ_Φ s'identifie à l'algèbre des séries formelles $A_\Phi[[T_1, T_2, \dots, T_r]]$.

Pour chaque Φ , on munit Λ_Φ de la topologie $\mathfrak{m}_\Phi$-adique, où $\mathfrak{m}_\Phi$ est l'idéal maximal de Λ_Φ . La topologie produit sur $\Lambda = \prod_\Phi \Lambda_\Phi$ coïncide avec la topologie limite projective $\Lambda = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p[G_n]$, les $\mathbb{Z}_p[G_n]$ étant munis de leur topologie p-adique.

Si M est un Λ-module, on pose $M_\Phi = e_\Phi M$. On a : $M = \prod_\Phi M_\Phi$, et pour $\Phi \neq \Phi'$ l'action de Λ_Φ sur $M_{\Phi'}$ est triviale.

3. - LES Λ-MODULES U_∞ et Z_∞ .

Si F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on appelle complétion p-adique du groupe multiplicatif de F et on note $\widehat{F^*}$ le groupe $\varprojlim_{t\in\mathbb{N}} F^*/F^{*p^t}$, la limite projective étant prise pour les applications évidentes. Le groupe $\widehat{F^*}$ est clairement un module sur $\mathbb{Z}_p$; si π est une uniformisante de F , on a $\widehat{F^*} \simeq \pi^{\mathbb{Z}_p} \times U_F^+$ où U_F^+ est le groupe des unités fondamentales de F .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par K_n le corps des points fixes de K_∞ par $p^n\Gamma$. On a $Z_\infty = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \widehat{K_n^*}$, les morphismes de transition étant induits par la norme. Pour chaque n , le groupe $\widehat{K_n^*}$ est de manière naturelle un module topologique compact sur $\mathbb{Z}_p[G_n]$. Par passage à la limite projective, on en déduit une structure de Λ-module topologique compact sur Z_∞ . Clairement, $U_\infty = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} U_{K_n}^+$ est un sous-Λ-module compact de Z_∞ .

4. - ENONCE DES RESULTATS.

On note $\overline{\chi}$ le caractère de Δ à valeurs dans les racines p-1-ième de l'unité de $\mathbb{Q}_p$, donnant l'action de Δ sur les racines p-ième de l'unité de K_∞ .

Si F est une extension de $\mathbb{Q}_p$, on note $\mu_{p^\infty}(F)$ le groupe des racines de l'unité de F d'ordre une puissance de p .

Si $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ est infini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note μ_{p^n} le groupe des racines p^n-ième de l'unité de K_∞ . On note $T(\mu_{p^\infty})$ le module de Tate $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mu_{p^n}$. Pour chaque n , le groupe $\mu_{p^\infty}(K_n)$ est un module sur Λ par l'intermédiaire du quotient $\mathbb{Z}_p[G_n]$. Par passage à la limite projective, on en déduit une structure de Λ-module sur $T(\mu_{p^\infty})$.

Les homomorphismes d'augmentation : $\mathbb{Z}_p[G_n] \to \mathbb{Z}_p$, définissent un homomorphisme de Λ dans $\mathbb{Z}_p$. On note encore $\mathbb{Z}_p$ le groupe $\mathbb{Z}_p$ avec action de Λ à travers cet homomorphisme.

THEOREME. - <u>On pose</u> $d = [K:\mathbb{Q}_p]$. <u>On note</u> Φ_0 <u>le caractère trivial de</u> Δ .

i) <u>Supposons</u> $r = 2$. <u>Le</u> Λ_Φ<u>-module</u> $Z_{\infty,\Phi}$ <u>est libre de rang</u> d , <u>pour tout caractère irréductible</u> Φ <u>de</u> Δ <u>si</u> $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$, <u>et pour tout</u> $\Phi \neq \overline{\chi}$ <u>si</u> $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \neq \{1\}$. <u>Si</u> $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ <u>est infini, et si</u> $p \neq 2$ <u>ou</u> $\mu_4 \subset K$, <u>on a une suite exacte de</u> $\Lambda_{\overline{\chi}}$<u>-modules</u> :

(I) $\quad 0 \to Z_{\infty,\overline{\chi}} \to L_{\overline{\chi}} \to T(\mu_{p^\infty}) \to 0$,

<u>où</u> $L_{\overline{\chi}}$ <u>est libre de rang</u> d <u>sur</u> $\Lambda_{\overline{\chi}}$.

ii) <u>Si</u> $r \geq 3$, <u>le</u> Λ_Φ<u>-module</u> $Z_{\infty,\Phi}$ <u>est libre de rang</u> d <u>pour tout</u> Φ <u>distinct de</u> Φ_0 <u>et de</u> $\overline{\chi}$.

iii) <u>Pour</u> r <u>quelconque, on a</u> $Z_{\infty,\Phi} = U_{\infty,\Phi}$, <u>pour tout</u> Φ <u>si le corps résiduel de</u> K_∞ <u>est infini, et pour tout</u> $\Phi \neq \Phi_0$ <u>si le corps résiduel de</u> K_∞ <u>est fini. Dans le second cas, et pour</u> $\Phi = \Phi_0$, <u>on a une suite exacte de</u> Λ_{Φ_0} <u>-modules</u> :

(II) $\quad 0 \to U_{\infty,\Phi_0} \to Z_{\infty,\Phi_0} \to \mathbb{Z}_p \to 0$.

<u>Remarques</u>.

1) Pour $r = 2$, $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ infini, et $p \neq 2$ ou $\mu_4 \subset K$, la suite exacte (I) décrit entièrement la structure de $\Lambda_{\overline{\chi}}$-module de $Z_{\infty,\overline{\chi}}$. On voit facilement que l'on a $Z_{\infty,\overline{\chi}} \approx \mathfrak{a} \oplus \Lambda_{\overline{\chi}}^{d-1}$, où $\mathfrak{a}$ est l'annulateur dans $\Lambda_{\overline{\chi}}$ de $T(\mu_{p^\infty})$.

2) De même, supposons $r = 2$ et le corps résiduel de K_∞ fini. Si $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$ ou si $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \neq \{1\}$ et $\overline{\chi} \neq \Phi_0$ (c'est-à-dire si

$\mu_{p^\infty}(K) = \{1\}$), la suite exacte (II) décrit entièrement la structure de Λ_{Φ_0}-module de U_{∞,Φ_0} : on a $U_{\infty,\Phi_0} \approx \mathcal{J}_{0,\Phi_0} \oplus \Lambda_{\Phi_0}^{d-1}$, où $\mathcal{J}_0$ est l'idéal de Λ engendré par T_1 et T_2 .

3) Si $r \geq 3$, le Λ_{Φ_0}-module Z_{∞,Φ_0} n'est pas libre (voir la remarque du (5.5.1)).

PROPOSITION. - <u>Notons</u> $\mathcal{J}_0$ <u>l'idéal de</u> Λ <u>engendré par les</u> T_i <u>pour</u> $1 \leq i \leq r$.

i) <u>Pour</u> r <u>quelconque et</u> $\Phi \neq \Phi_0$, <u>le noyau de la projection de</u> $Z_{\infty,\Phi}$ <u>dans</u> $\widehat{K^*_{0,\Phi}}$ <u>est</u> $\mathcal{J}_0 Z_{\infty,\Phi}$.

ii) <u>Pour</u> $r = 2$, <u>le noyau de l'homomorphisme de</u> $Z_{\infty,\Phi_0}/\mathcal{J}_0 Z_{\infty,\Phi_0}$ <u>dans</u> $\widehat{K^*_{0,\Phi_0}}$ <u>induit par la projection est isomorphe à</u> $\mathbb{Z}_p$.

5. - <u>DEMONSTRATIONS</u>.

(5.1) <u>Interprétation par la théorie du corps de classe local</u> . On se fixe une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et tous les corps considérés sont des sous-corps de cette clôture algébrique.

Si F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on pose $Z(F) = \widehat{F^*}$. Si F' est une extension finie de F , la norme induit un homomorphisme de $Z(F')$ dans $Z(F)$; on le désigne par $N_{F'/F}$. On note $M(F)$ la p-extension maximale abélienne de F . L'application d'Artin définit un isomorphisme :

(1) $$\psi_F : Z(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(M(F)/F) .$$

De plus, si F' est une extension finie de F , nous avons le diagramme commutatif classique :

(2) $$\begin{array}{ccc} Z(F') & \xrightarrow{\psi_{F'}} & \mathrm{Gal}(M(F')/F') \\ {\scriptstyle N_{F'/F}}\downarrow & & \downarrow \\ Z(F) & \xrightarrow{\psi_F} & \mathrm{Gal}(M(F)/F) \end{array} ,$$

où la flèche verticale de droite est l'homomorphisme naturel défini par l'inclusion $M(F) \subset M(F')$. Supposons de plus F'/F galoisienne. Comme $M(F')/F$ est alors galoisienne, $Gal(F'/F)$ opère sur $Gal(M(F')/F')$ par automorphismes intérieurs (si $\sigma \in Gal(F'/F)$ et $x \in Gal(M(F')/F')$, alors $\sigma.x = \gamma x \gamma^{-1}$, où γ est un quelconque élément de $Gal(M(F')/F)$ dont l'image dans $Gal(F'/F)$ est σ). D'autre part, le groupe $Gal(F'/F)$ opère sur $Z(F')$ de manière naturelle. Il est bien connu que $\psi_{F'}$ est un $Gal(F'/F)$-homomorphisme.

Si F est une extension algébrique quelconque de $\mathbb{Q}_p$, on note toujours $M(F)$ la p-extension maximale abélienne de F ; on pose $Z(F) = \varprojlim Z(E)$, où E décrit les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ contenues dans F et où, pour $E \subset E'$, l'homomorphisme de transition est $N_{E'/E}$. Par passage à la limite, les faits rappelés ci-dessus concernant les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ s'étendent aux extensions algébriques quelconques de $\mathbb{Q}_p$. En particulier, nous avons l'isomorphisme (1) et pour $F \subset F'$, le diagramme commutatif (2), où $N_{F'/F}$ est induit par les homomorphismes $N_{E/E\cap F}$, où E décrit les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ contenues dans F' .

Revenons à notre extension K_∞ . Notons comme précédemment $\mathcal{J}_o$ l'idéal de Λ engendré par $T_1, T_2, \ldots, T_r$. Soit N le corps des points fixes de $M(K_\infty)$ par $\psi_{K_\infty}(\mathcal{J}_o Z_\infty)$. Comme $M(K_o)$ est une extension abélienne de K_o , on a $(\sigma \cdot x)x^{-1} \in Gal(M(K_\infty)/M(K_o))$ pour tout $\sigma \in \Gamma$ et tout $x \in Gal(M(K_\infty)/K_\infty)$. Par suite $\psi_{K_\infty}(\mathcal{J}_o Z_\infty) \subset Gal(M(K_\infty)/M(K_o))$, et donc :

$$K_o \subset K_\infty \subset M(K_o) \subset N \subset M(K_\infty) .$$

Pour tout i avec $1 \leq i \leq r$, choisissons dans $Gal(N/K_o)$ un élément τ_i dont l'image dans $\Gamma = Gal(K_\infty/K_o)$ est σ_i . Comme $M(K_o)$ est l'extension maximale abélienne de K_o contenue dans N , on voit facilement que $Gal(N/M(K_o))$ est engendré sur $\mathbb{Z}_p$ par les $\theta_{i,i'}$ où, pour $1 \leq i < i' \leq r$: $\theta_{i,i'} = \tau_i \tau_{i'} \tau_i^{-1} \tau_{i'}^{-1}$.

Remarque. Il est vrai, mais plus délicat à prouver, que les $\theta_{i,i'}$ forment une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathrm{Gal}(N/M(K_o))$. Pour $r = 2$, cela résulte de la proposition du §4.

(5.2) LEMME. - Soit F et F' deux extensions de K contenues dans K_∞ avec $F \subset F'$ et $\mathrm{Gal}(F'/F) \approx \mathbb{Z}_p$. Soit σ un élément de G dont l'image dans $\mathrm{Gal}(F'/K)$ est un générateur de $\mathrm{Gal}(F'/F)$. Alors :

i) le noyau de $N_{F'/F} : Z(F') \longrightarrow Z(F)$ est $(\sigma-1)Z(F')$,

ii) si Z' est l'image de $N_{F'/F}$, alors le quotient $Z(F)/Z'$ est isomorphe, en tant que Λ-module, à $\mathbb{Z}_p$ (cf. 4) ,

iii) la multiplication par $\sigma - 1$ est injective dans $Z(F')$.

Démonstration du i). Soit P le corps des points fixes de $M(F')$ par $\psi_{F'}((\sigma-1)Z(F'))$. Il s'agit de montrer que $P = M(F)$. Clairement, $M(F) \subset P$. Tout revient donc à montrer que P/F est abélienne. Soit τ un élément de $\mathrm{Gal}(P/F)$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(F'/F)$ coïncide avec celle de σ . Pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(P/F')$ provenant via l'application d'Artin de $z \in Z(F')/(\sigma-1)Z(F')$, le commutateur $\tau\gamma\tau^{-1}\gamma^{-1}$ provient de $(\sigma-1)z$, qui clairement est nul. On voit donc que τ commute à tout élément de $\mathrm{Gal}(P/F')$. Comme le groupe $\mathrm{Gal}(P/F)$ est engendré par τ et les éléments de $\mathrm{Gal}(P/F')$, il en résulte que $\mathrm{Gal}(P/F)$ est commutatif. Cela prouve le i).

Démonstration du ii). On a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(M(F)/F') \longrightarrow \mathrm{Gal}(M(F)/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(F'/F) \longrightarrow 1 .$$

Puisque F'/K est abélienne, G agit trivialement sur $\mathrm{Gal}(F'/F)$ et la suite exacte ci-dessus donne la suite exacte de Λ-modules :

$$0 \longrightarrow Z' \longrightarrow Z(F) \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 .$$

Cela prouve le ii).

Démonstration du iii). Supposons tout d'abord $F/\mathbb{Q}_p$ finie. Dans ce cas, le résultat découle immédiatement du théorème d'Iwasawa, cf. th. 25 de [1], donnant la structure de $Z(F')$ en tant que module sur l'algèbre des mesures sur $\mathrm{Gal}(F'/F)$: si $\mu_{p^\infty}(F')$ est fini, le module $Z(F')$ se plonge dans un module libre (avec un quotient isomorphe à $\mu_{p^\infty}(F')$), si $\mu_{p^\infty}(F')$ est infini, le module $Z(F')$ est somme directe d'un module libre et du module de Tate $T(\mu_{p^\infty})$.

Passons au cas général. Choisissons E_o et E'_o extensions de K avec E_o/K finie, $E_o \subset F$, $E_o \subset E'_o \subset F'$, $E'_o \cap F = E_o$ et $E'_o F = F'$. Pour chaque extension finie E de E_o contenue dans F , il résulte du cas particulier précédemment traité que la multiplication par $\sigma - 1$ est injective dans $Z(E'_o E)$. Comme $Z(F') = \varprojlim Z(E\, E'_o)$, il en résulte que la multiplication par $\sigma - 1$ est injective dans $Z(F')$. Cela achève la démonstration du lemme.

(5.3) Démonstration de la proposition.

Démonstration du i). Raisonnons par récurrence sur r . Pour $r = 1$, le noyau de $N_{K_\infty/K_o} : Z_\infty \to \widehat{K_o^*}$ est $T_1 Z_\infty$, cf. i) du lemme précédent. Cela prouve le résultat dans ce cas.

Supposons $r \geq 2$. Notons F le corps des points fixes de K_∞ par σ_r et Z' l'image de Z_∞ dans $Z(F)$. Le noyau de $N_{K_\infty/F} : Z_\infty \to Z(F)$ est $T_r Z_\infty$, cf. i) du lemme précédent. On a donc $Z' \approx Z_\infty / T_r Z_\infty$. Comme, cf. ii) du lemme précédent, le quotient $Z(F)/Z'$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ en tant que Λ-module, on a $Z(F)_\Phi = Z'_\Phi$, pour tout $\Phi \neq \Phi_o$. Alors, $Z(F)_\Phi \approx Z_{\infty,\Phi}/T_r Z_{\infty,\Phi}$ et :

$$Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_o Z_{\infty,\Phi} \approx Z(F)_\Phi / T_1 Z(F)_\Phi + \dots + T_{r-1} Z(F)_\Phi \; .$$

Comme, d'après l'hypothèse de récurrence, le noyau de la projection de $Z(F)_\Phi$ dans $\widehat{K^*_{o,\Phi}}$ est $T_1 Z(F)_\Phi + \dots + T_{r-1} Z(F)_\Phi$, on en déduit que le noyau de la projection de $Z_{\infty,\Phi}$ dans $\widehat{K^*_{o,\Phi}}$ est $\mathfrak{I}_o Z_{\infty,\Phi}$. Cela prouve le i).

Démonstration du ii). Soit F le corps des points fixes de K_∞ par σ_2. Notons Z' l'image de Z_∞ dans $Z(F)$. On a, cf. ii) du lemme précédent, la suite exacte :

$$0 \to Z' \to Z(F) \to \mathbb{Z}_p \to 0 .$$

La multiplication par T_1 est injective dans $Z(F)$, cf. iii) du lemme précédent. On déduit alors de la suite exacte ci-dessus, la suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to Z'/T_1Z' \to Z(F)/T_1Z(F) \to \mathbb{Z}_p \to 0 .$$

D'après le i) du lemme précédent, l'homomorphisme $N_{K_\infty/F}$ induit un isomorphisme de Z_∞/T_2Z_∞ sur Z' ; de même, N_{F/K_o} induit une injection de $Z(F)/T_1Z(F)$ dans $\widehat{K^*_o}$. Par suite, la suite exacte ci-dessus donne :

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to Z_\infty/T_1Z_\infty+T_2Z_\infty \to \widehat{K^*_o} .$$

On en déduit que le noyau de l'homomorphisme de $Z_{\infty,\Phi_o}/\mathfrak{I}_o Z_{\infty,\Phi_o}$ dans $\widehat{K^*_{o,\Phi_o}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Cela achève la démonstration de la proposition.

(5.4) <u>Un lemme concernant les modules sur les anneaux de séries formelles.</u>

LEMME. <u>Soit</u> p <u>un nombre premier</u>. <u>Soit</u> B <u>un anneau de valuation discrète d'idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$. <u>On suppose que</u> $p \in \mathfrak{m}$. <u>Soit</u> $S = B[[X_1, X_2, \dots, X_k]]$ <u>l'algèbre des séries formelles à coefficients dans</u> B <u>et en les</u> k <u>indéterminées</u> $X_1, X_2, \dots, X_k$. <u>Pour tout entier</u> j <u>avec</u> $1 \le j \le k$ <u>et tout</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>posons</u> : $s_{n,j} = (1+X_j)^{p^n}-1$. <u>Soit</u> $\mathfrak{M}$ <u>l'idéal maximal de</u> S. <u>Soit</u> M <u>un module sur</u> S, <u>séparé et complet pour sa topologie</u> $\mathfrak{M}$-<u>adique</u>. <u>On suppose qu'il existe un entier</u> h <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>le</u> B-<u>module</u> $M/s_{n,1}M+s_{n,2}M+\dots+s_{n,k}M$ <u>est libre de</u>

rang hp^{kn}. Alors M est libre de rang h sur S.

Démonstration. Soit $x_1, x_2, \dots, x_h$ des éléments de M relevant une base de $M/X_1M+X_2M+\dots+X_kM$ en tant que module sur B. Un raisonnement par approximations successives facile montre que les x_i engendrent M, en tant que module sur S. Considérons alors l'homomorphisme surjectif i de S-module de S^h dans M, qui à $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$ associe $\sum_{i=1}^{i=h} \alpha_i x_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il induit un homomorphisme surjectif i_n de $(S/s_{n,1}S+s_{n,2}S+\dots+s_{n,k}S)^h$ dans $M/s_{n,1}M+s_{n,2}M+\dots+s_{n,k}M$. Pour $1 \le j \le k$, le polynôme $s_{n,j}$ est un polynôme distingué de $B[[X_j]]$, le théorème de préparation de Weierstrass montre alors que $S/s_{n,1}S+s_{n,2}S+\dots+s_{n,k}S$ est libre de rang p^{nk} sur B. Par suite $(S/s_{n,1}S+s_{n,2}S+\dots+s_{n,k}S)^h$ est libre de rang hp^{nk}. Il en est de même de $M/s_{n,1}M+s_{n,2}M+\dots+s_{n,k}M$ par hypothèse. On voit donc que les i_n, dont on sait déjà qu'ils sont surjectifs, sont des isomorphismes.

Une récurrence facile montre que, puisque $p \in \mathfrak{m}$, on a $s_{n,j} \in \mathfrak{M}^{n+1}$. Comme S et M sont séparés et complets pour leur topologie $\mathfrak{M}$-adique, on en déduit que $S = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} S/s_{n,1}S+s_{n,2}S+\dots+s_{n,k}S$ et $M = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/s_{n,1}M+s_{n,2}M+\dots+s_{n,k}M$. Comme les i_n sont des isomorphismes, il en résulte que i est aussi un isomorphisme, et $M \simeq S^h$. Cela prouve le lemme.

(5.5) Démonstration des i) et ii) du théorème.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout i avec $1 \le i \le r$, on pose $\omega_{n,i} = (1+T_i)^{p^n}-1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{J}_n$ l'idéal de Λ engendré par les $\omega_{n,i}$ pour $1 \le i \le r$.

(5.5.1) LEMME. - Soit $n \in \mathbb{N}$. Le A_Φ-module $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\Phi}$ est libre de rang dp^{nr} dans les cas suivants : si $r = 2$ et $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$ pour tout Φ, si $r = 2$ et $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \ne \{1\}$ pour tout $\Phi \ne \bar{\chi}$, si $r \ge 3$ pour tout Φ distinct de $\bar{\chi}$ et de Φ_o.

<u>Si</u> $r = 2$, <u>le rang sur</u> $A_{\bar\chi}$ <u>de</u> $Z_{\infty,\bar\chi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\bar\chi}$ <u>modulo torsion est</u> dp^{2n} .

<u>Démonstration</u>. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons Z_n l'image de Z_∞ dans $\widehat{K_n^*}$. Si M est un module de type fini sur un anneau principal B , désignons par $rg_B(M)$ le rang de M modulo torsion.

Appliquons la proposition à l'extension de groupe de Galois $p^n\Gamma \times \Delta$: pour $r \geq 2$ et $\Phi \neq \Phi_o$, on a $Z_{n,\Phi} \simeq Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}$; pour $r = 2$, le noyau de l'homomorphisme de $Z_{\infty,\Phi_o}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi_o}$ dans $\widehat{K_n^*}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. On a donc :

$$(I): \begin{cases} rg_{A_\Phi}(Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}) = rg_{A_\Phi}(Z_{n,\Phi}) \ , \text{ pour } \Phi \neq \Phi_o \ , \\ rg_{A_{\Phi_o}}(Z_{\infty,\Phi_o}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi_o}) = rg_{A_{\Phi_o}}(Z_{n,\Phi_o}) + 1 \ , \text{ pour } r = 2 \ . \end{cases}$$

Le groupe Z_n est isomorphe, par la théorie du corps de classe, à $Gal(M(K_n)/K_\infty)$ et donc le quotient $\widehat{K_n^*}/Z_n$ à $Gal(K_\infty/K_n)$. Par suite :

$$(II): \begin{cases} rg_{A_\Phi}(Z_{n,\Phi}) = rg_{A_\Phi}(\widehat{K^*_{n,\Phi}}) \ , \text{ si } \Phi \neq \Phi_o \ , \\ rg_{A_{\Phi_o}}(Z_{n,\Phi_o}) = rg_{A_{\Phi_o}}(\widehat{K^*_{n,\Phi_o}}) - r \ . \end{cases}$$

Soit $\mathcal{O}_n$ l'anneau des entiers de K_n et U_n le groupe des unités fondamentales de K_n . On sait qu'il existe un sous $\mathbb{Z}_p[G_n]$ - module V_n de U_n d'indice fini tel que le logarithme p-adique induise un isomorphisme de V_n sur un sous-$\mathbb{Z}_p[G_n]$-module d'indice fini de $\mathcal{O}_n$. On a alors : $rg_{\mathbb{Z}_p}(U_{n,\Phi}) = rg_{\mathbb{Z}_p}(V_{n,\Phi}) = rg_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_{n,\Phi}) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(K_{n,\Phi})$. Comme K_n est libre de rang d sur $\mathbb{Q}_p[G_n]$, on en déduit que $rg_{\mathbb{Z}_p}(U_{n,\Phi}) = d[Q_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_\Phi : \mathbb{Q}_p]\, p^{rn}$, d'où : $rg_{A_\Phi}(U_{n,\Phi}) = dp^{rn}$ et :

$$(III): \begin{cases} rg_{A_\Phi}(\widehat{K^*_{n,\Phi}}) = dp^{rn} \ , \text{ si } \Phi \neq \Phi_o \ , \\ rg_{A_{\Phi_o}}(\widehat{K^*_{n,\Phi_o}}) = dp^{rn} + 1 \ . \end{cases}$$

De (I) , (II) et (III) résulte immédiatement que
$rg_{A_\Phi}(Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\Phi}) = dp^{rn}$, pour tout Φ si $r = 2$, et pour tout $\Phi \neq \Phi_o$ si $r \geq 3$.

Pour $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$ ou pour $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \neq \{1\}$ et $\Phi \neq \bar{\chi}$, le A_Φ-module $Z_{n,\Phi}$ est sans torsion. Il en est de même de $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\Phi}$ si $\Phi \neq \Phi_o$ ou $r = 2$, puisque $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\Phi} \simeq Z_{n,\Phi}$ si $\Phi \neq \Phi_o$ et que pour $r = 2$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow Z_{\infty,\Phi_o}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\Phi_o} \longrightarrow Z_{n,\Phi_o} \longrightarrow 0 .$$

Cela achève de prouver le lemme.

Remarque. On voit facilement que, comme le rang sur $\mathbb{Z}_p$ du noyau de l'homomorphisme de $Z_\infty/\mathcal{J}_n Z_\infty$ dans $\widehat{K_n^*}$ est $r(r-1)/2$, cf. remarque du (5.1), on a $rg_{\mathbb{Z}_p}(Z_{\infty,\Phi_o}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\Phi_o}) = dp^{rn} + \frac{(r-1)(r-2)}{2}$. Il en résulte que, pour $r > 2$, Z_{∞,Φ_o} n'est pas libre sur Λ_{Φ_o} .

(5.5.2) LEMME. - *Pour $r = 2$ ou $r \geq 3$ et $\Phi \neq \Phi_o$, le Λ_Φ-module $Z_{\infty,\Phi}$ est de type fini.*

Démonstration. Comme $Z_{\infty,\Phi}$ est compact et que, d'après le lemme précédent, $Z_{\infty,\Phi}/\mathfrak{m}_\Phi Z_{\infty,\Phi}$ est de type fini sur $\Lambda_\Phi/\mathfrak{m}_\Phi$, le lemme résulte d'une version topologique du lemme de Nakayama (voir par exemple p.126 de [2]).

(5.5.3) Examen des cas $r = 2$ et $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$, $r = 2$ et $\Phi \neq \bar{\chi}$, $r \geq 3$ et Φ distinct de Φ_o et de $\bar{\chi}$.

Comme $Z_{\infty,\Phi}$ est de type fini, il est séparé et complet pour sa topologie $\mathfrak{m}_\Phi$-adique. Dans chacun des cas considérés, $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\Phi}$ est libre sur A_Φ de rang dp^{rn} , cf. lemme (5.5.1) ; le lemme (5.4) montre alors que $Z_{\infty,\Phi}$ est libre de rang d sur Λ_Φ .

(5.5.4) <u>Examen du cas</u> $r = 2$, $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ <u>infini</u>, $p \neq 2$ <u>ou</u> $\mu_4 \subset K$ <u>et</u> $\Phi = \bar{\chi}$.

On note χ le caractère de G à valeurs dans les unités de $\mathbb{Z}_p$ donnant l'action de G sur μ_{p^∞} (on voit facilement que $\bar{\chi}$ est la restriction de χ à Δ) . On choisit les générateurs σ_1 et σ_2 de Γ de telle sorte que σ_1 engendre le noyau de la restriction de χ à Γ . On note p^{m_o} le cardinal de $\mu_{p^\infty}(K_o)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le corps des points fixes de K_∞ par le groupe engendré par σ_2 et $\sigma_1^{p^n}$. (Donc $F_o = K_o$; on voit facilement que $\mu_{p^\infty}(F_n) = \mu_{p^{m_o}}$ et que $F_n(\mu_{p^\infty})$ est le corps des points fixes de K_∞ par $\sigma_1^{p^n}$). Pour $m \geq m_o$, la restriction à $\mu_{p^{m+1}}$ de la norme de $F_n(\mu_{p^{m+1}})$ à $F_n(\mu_{p^m})$ est : $\xi \longmapsto \xi^p$, si $p \neq 2$, et : $\xi \longmapsto -\xi^2$, si $p = 2$. Dans tous les cas, on en déduit un homomorphisme injectif i_n de $T(\mu_{p^\infty})$ dans $Z(F_n(\mu_{p^\infty}))$.

LEMME. - <u>Pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>désignons par</u> Z'_n <u>l'image par</u> $N_{K_\infty/F_n(\mu_{p^\infty})}$ <u>de</u> Z_∞ <u>dans</u> $Z(F_n(\mu_{p^\infty}))$ <u>et par</u> f_n <u>l'homomorphisme de</u> $\mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}),Z'_n)$ <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}),Z_\infty)$ <u>correspondant à la suite exacte</u> :

$$0 \longrightarrow Z_\infty \xrightarrow{\chi(\omega_{n,1})} Z_\infty \longrightarrow Z'_n \longrightarrow 0 .$$

i) <u>On a</u> $i_n(T(\mu_{p^\infty})) \subset Z'_n$.

ii) <u>D'après le</u> i), <u>on a</u> $i_n \in \mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}),Z'_n)$; <u>l'image de</u> i_n <u>par</u> f_n <u>ne dépend pas de</u> n .

<u>Démonstration</u>. Montrons le i). Pour $m \geq m_o$, désignons par $Z'_{n,m}$ l'image de Z_∞ dans $\widehat{F_n(\mu_{p^m})^*}$. Le quotient $\widehat{F_n(\mu_{p^m})^*}/Z'_{n,m}$ est isomorphe, via l'application d'Artin, à $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_n(\mu_{p^m}))$. Il est donc sans torsion en tant que module sur $\mathbb{Z}_p$. Par suite μ_{p^m} est inclus dans $Z'_{n,m}$. Un argument de compacité facile prouve que $Z'_n = \varprojlim_{m \geq m_o} Z'_{n,m}$.

Il en résulte que $i_n(T(\mu_{p^\infty})) \subset Z'_n$. Cela prouve le i) .

Montrons le ii). Soit n' un entier $\geq n$. Comme, sur $\widehat{F_{n'}(\mu_{p^m})^*}$, la multiplication par $\omega_{n',1}/\omega_{n,1}$ coïncide avec $N_{F_{n'}(\mu_{p^m})/F_n(\mu_{p^m})}$, le diagramme suivant est commutatif:

$$
(\mathrm{I}) : \quad
\begin{tikzcd}
T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r, "i_n"] \arrow[dr, "i_{n'}"'] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] \\
 & Z_\infty/\omega_{n',1}Z_\infty
\end{tikzcd}
$$

Le diagramme suivant est commutatif et ses lignes sont exactes :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r, "\times\omega_{n,1}"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r, "\times\omega_{n',1}"] & Z_\infty \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{n',1}Z_\infty \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .
$$

Par suite :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}),Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}),Z_\infty) \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}),Z_\infty/\omega_{n',1}Z_\infty) \arrow[r, "f_{n'}"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}),Z_\infty)
\end{tikzcd} .
$$

De (I) on déduit alors que $f_n(i_n) = f_{n'}(i_{n'})$. Cela achève la démonstration du lemme.

Soit L l'extension de $T(\mu_{p^\infty})$ par Z_∞ correspondant aux $f_n(i_n)$. Le reste de cette section est consacrée à prouver que $L_{\bar{\chi}}$ est libre de rang d sur $\Lambda_{\bar{\chi}}$. Pour cela :

LEMME. - *Pour tout entier* $n \geq 0$:

i) *l'homomorphisme de* $L/\mathcal{J}_n L$ *dans* $L/\mathcal{J}_{n+1}L$ *induit par la multiplication par* $\omega_{n+1,1}\times\omega_{n+1,2}/\omega_{n,1}\times\omega_{n,2}$ *est injectif*,

ii) *on a la suite exacte* :

$$0 \longrightarrow \mu_{p^\infty}(K_n) \longrightarrow Z_\infty/\mathcal{J}_n Z_\infty \longrightarrow L/\mathcal{J}_n L \longrightarrow \mu_{p^\infty}(K_n) \longrightarrow 0\ ,$$

où les trois flèches de droite sont obtenues en appliquant le foncteur $\cdot \otimes_\Lambda \Lambda/\mathcal{J}_n$ à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Z_\infty \longrightarrow L \longrightarrow T(\mu_{p^\infty}) \longrightarrow 0\ ,$$

et où le composé de la flèche de $\mu_{p^\infty}(K_n)$ dans $Z_\infty/\mathcal{J}_n Z_\infty$ avec l'homomorphisme de $Z_\infty/\mathcal{J}_n Z_\infty$ dans $\widehat{K_n^*}$ induit par N_{K_∞/K_n} est l'injection naturelle de $\mu_{p^\infty}(K_n)$ dans $\widehat{K_n^*}$.

Démonstration. On vérifie facilement que, pour montrer le i) , il suffit de prouver :

$$\text{(II) :}\quad \left\{\begin{array}{ll}
(1) & \mathrm{Ker}\left(L \xrightarrow{\times \omega_{n+1,1}} L\right) = 0 \\[2mm]
(2) & \mathrm{Ker}\left(L \xrightarrow{\times \omega_{n+1,2}} L\right) = 0 \\[2mm]
(3) & \mathrm{Ker}\left(L/\omega_{n+1,1}L \xrightarrow{\times \omega_{n+1,2}} L/\omega_{n+1,1}L\right) = 0 \\[2mm]
(4) & \mathrm{Ker}\left(L/\omega_{n+1,1}L \xrightarrow{\times \omega_{n,2}} L/\omega_{n+1,1}L\right) = 0 \\[2mm]
(5) & \mathrm{Ker}\left(L/\omega_{n+1,2}L \xrightarrow{\times \omega_{n+1,1}} L/\omega_{n+1,2}L\right) = 0 \\[2mm]
(6) & \mathrm{Ker}\left(L/\omega_{n+1,2}L \xrightarrow{\omega_{n,1}} L/\omega_{n+1,2}L\right) = 0\ .
\end{array}\right.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la définition de L , on a un homomorphisme de L dans Z_∞ rendant commutatif le diagramme, cf. [3] , chap.IV, § 1 :

$$\text{(III) :}\quad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & L \arrow[r] \arrow[d] & T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "i_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r, "\times \omega_{n,1}"] & Z_\infty \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}\ .$$

On en déduit, puisque la multiplication par $\omega_{n,1}$ est injective dans Z_∞ , cf. iii) du lemme (5.2) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\left(L \xrightarrow{\times \omega_{n,1}} L\right) \arrow[r] & T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "i_n"] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & L/\omega_{n,1}L \arrow[r] & T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r] & 0 \\
& & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}"] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty & & &
\end{tikzcd}$$

Comme i_n est injectif, il en résulte que $\mathrm{Ker}(L \xrightarrow{\times\omega_{n,1}} L) = 0$; cela prouve (II),(1).

Soit ℓ un entier ≥ 0 . La multiplication par $\omega_{\ell,2}$ est injective dans le quotient de $Z(F_n(\mu_{p^\infty}))$ par l'image de $T(\mu_{p^\infty})$, puisque, d'après le théorème d'Iwasawa, cf. th. 25 de [1] , ce quotient est libre sur l'algèbre des mesures p-adiques sur $\mathrm{Gal}(F_n(\mu_{p^\infty})/F_n)$. La multiplication par $\omega_{\ell,2}$ est donc injective dans le quotient de $Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty$ par $i_n(T(\mu_{p^\infty}))$. Comme elle l'est aussi dans $T(\mu_{p^\infty})$, il résulte du diagramme ci-dessus que $\mathrm{Ker}\left(L/\omega_{n,1}L \xrightarrow{\times\omega_{\ell,2}} L/\omega_{n,1}L\right) = 0$. Cela prouve (II),(3) et (II),(4).

Pour ℓ entier ≥ 0 , on sait, cf. iii) du lemme (5.2), que la multiplication par $\omega_{\ell,2}$ est injective dans Z_∞ . Comme elle l'est aussi dans $T(\mu_{p^\infty})$, on déduit de (III) que $\mathrm{Ker}\left(L \xrightarrow{\times\omega_{\ell,2}} L\right) = 0$, et donc on a (II),(2).

Reste à prouver (II),(5), (II),(6) et le ii). Pour cela, comme la multiplication par $\omega_{\ell,2}$ est injective dans $Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty$ et dans $T(\mu_{p^\infty})$, on déduit de (III) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & L/\omega_{\ell,2}L \arrow[r] \arrow[d] & \mu_{p^{m_0+\ell}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty \arrow[r, "\times\,\omega_{n,1}"] & Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque la multiplication par $\omega_{n,1}$ est injective dans $Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty$, on en déduit :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(L/\omega_{\ell,2}L \xrightarrow{\times\omega_{n,1}} L/\omega_{\ell,2}L) \arrow[dl, bend left] \\
\mu_{p^{m_0+\ell}} \arrow[r] \arrow[d] & Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & L/\omega_{\ell,2}L+\omega_{n,1}L \arrow[r] & \mu_{p^{m_0+\ell}} \arrow[r] & 0 \\
Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}"] & Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty
\end{tikzcd}$$

La flèche de $\mu_{p^{m_o+\ell}}$ dans $Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty$ se déduit de i_n en prenant le foncteur $\cdot \otimes_\Lambda \Lambda/\omega_{\ell,2}\Lambda+\omega_{n,1}\Lambda$. Il en résulte facilement que si on la compose avec l'homomorphisme de $Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty$ dans $\widehat{F_n(\mu_{p^{\ell+m_o}})}^*$ induit par la projection, on obtient l'injection naturelle de $\mu_{p^{\ell+m_o}}$ dans $\widehat{F_n(\mu_{p^{\ell+m_o}})}^*$. On en déduit que la flèche de $\mu_{p^{m_o+\ell}}$ dans $Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty$ est injective. Par suite

$$\mathrm{Ker}(L/\omega_{\ell,2}L \xrightarrow{\times\omega_{n,1}} L/\omega_{\ell,2}L) = 0 \ ,$$

et on a la suite exacte :

$$0 \to \mu_{p^{m_o+\ell}} \to Z_\infty/\omega_{\ell,2}Z_\infty+\omega_{n,1}Z_\infty \to L/\omega_{\ell,2}L+\omega_{n,1}L \to \mu_{p^{m_o+\ell}} \to 0 \ .$$

Cela montre (II)(5) , (II)(6) et le ii) et cela achève la démonstration du lemme.

Achevons la démonstration du i) du théorème.

Prouvons tout d'abord que $L^-_\chi/\mathcal{J}_n L^-_\chi$ est sans torsion, en tant que module sur $\mathbb{Z}_p$. Soit pour cela $x \in L/\mathcal{J}_n L$ avec $px = 0$; montrons que $x = 0$. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & L/\mathcal{J}_n L \arrow[r] \arrow[d] & T(\mu_{p^\infty})/\mathcal{J}_n T(\mu_{p^\infty}) \simeq \mu_{p^{n+m_o}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Z_\infty/\mathcal{J}_{n+1}Z_\infty \arrow[r] & L/\mathcal{J}_{n+1}L \arrow[r] & T(\mu_{p^\infty})/\mathcal{J}_{n+1}T(\mu_{p^\infty}) \simeq \mu_{p^{n+m_o+1}} \arrow[r] & 0 \ .
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont induites par la multiplication par $\omega_{n+1,1}\times\omega_{n+1,2}/\omega_{n,1}\times\omega_{n,2}$; en particulier, la flèche de $\mu_{p^{n+m_o}}$ dans $\mu_{p^{n+m_o+1}}$ est l'élévation à la puissance p . On voit donc que l'image de x dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$ appartient à l'image de $Z_\infty/\mathcal{J}_{n+1}Z_\infty$ dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$. L'image de $Z_\infty/\mathcal{J}_{n+1}Z_\infty$ dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$ est sans torsion : cela résulte facilement du diagramme ci-dessous, cf. ii) du lemme précédent :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & & \mathbb{Z}_p \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mu_{p^\infty}(K_{n+1}) \arrow[r] \arrow[dr] & Z_\infty/\mathcal{J}_{n+1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d] & L/\mathcal{J}_{n+1}L \arrow[r] & \mu_{p^\infty}(K_{n+1}) \arrow[r] & 0 \\
 & & \widehat{K^*_{n+1}} & & &
\end{tikzcd}$$

On voit alors que l'image de x dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$ est nulle. Comme, cf. i) du lemme précédent, la flèche de $L/\mathcal{J}_n L$ dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$ est injective, c'est que x est nul. Donc $L/\mathcal{J}_n L$ est sans torsion ; il en est clairement de même de $L_{\bar\chi}/\mathcal{J}_n L_{\bar\chi}$.

D'autre part, il résulte immédiatement de la suite exacte du ii) du lemme précédent que $\mathrm{rg}_{A_{\bar\chi}}(L_{\bar\chi}/\mathcal{J}_n L_{\bar\chi}) = \mathrm{rg}_{A_{\bar\chi}}(Z_{\infty,\bar\chi}/\mathcal{J}_n Z_{\infty,\bar\chi})$, et donc, cf. lemme (5.5.1), on a $\mathrm{rg}_{A_{\bar\chi}}(L_{\bar\chi}/\mathcal{J}_n L_{\bar\chi}) = dp^{2n}$. Comme $L_{\bar\chi}$ est de type fini en tant que module sur $\Lambda_{\bar\chi}$, il est séparé et complet pour sa topologie $\mathfrak{m}_{\bar\chi}$-adique. Le lemme (5.4) montre alors qu'il est libre de rang d . Le i) et le ii) du théorème sont complètement démontrés.

<u>Démonstration du iii) du théorème</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons v_n l'homorphisme de $\widehat{K^*_n}$ dans $\mathbb{Z}_p$ induit par la valuation ; notons e_n l'indice de ramification de K_{n+1} sur K_n et $N_{n+1,n}$ l'homomorphisme N_{K_{n+1}/K_n} . Si U_n est le groupe des unités fondamentales de K_n , on a :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "N_{n+1,n}"] & \widehat{K^*_{n+1}} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "N_{n+1,n}"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, "\times p^r/e_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_n \arrow[r] & \widehat{K^*_n} \arrow[r, "v_n"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$.

Avec un argument de compacité facile, on en déduit, passant à la limite projective, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow U_\infty \longrightarrow Z_\infty \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 .$$

Si le corps résiduel de K_∞ est infini, on a $e_n = p^{r-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p = 0$. D'où $U_\infty = Z_\infty$ et $U_{\infty,\Phi} = Z_{\infty,\Phi}$ pour tout Φ .

Si le corps résiduel de K_∞ est fini, on a $e_n = p^r$ pour n grand et $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p$. Par suite : $U_{\infty,\Phi} = Z_{\infty,\Phi}$ pour $\Phi \neq \Phi_o$, et on a la suite exacte de Λ_{Φ_o} -modules :

$$0 \longrightarrow U_{\infty,\Phi_o} \longrightarrow Z_{\infty,\Phi_o} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 .$$

Cela achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. IWASAWA, On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math. 98 (1973), pp. 246-326.

[2] S. LANG, Cyclotomic fields, Springer Verlag (1978).

[3] H. CARTAN et S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press (1956).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)