SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

J. J. PAYAN

Sur la structure galoisienne du groupe des unités d'un corps abélien de type (p, p)

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 7 (1978-1979), exp. n° 8, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1978-1979__7__A8_0>

SUR LA STRUCTURE GALOISIENNE DU GROUPE DES UNITES D'UN CORPS ABELIEN DE TYPE (p,p)

par

J.J. PAYAN

L'essentiel de ce qui a été dit le 23 novembre 1978 est paru aux Annales de l'Institut Fourier [1]. Il ne manque que l'appendice ci-après, mis en forme et rédigé par Dominique Duval à partir de notes très sommaires de l'auteur. Cet appendice vient naturellement à la suite du § 1 de [1] .

Pour toute notion non explicitement redéfinie ci-dessous, le lecteur est prié de se reporter à [1] .

NOTATIONS

p désigne un nombre premier et G un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}p\mathbb{Z}$.

$0 \to M'' \to M \to M' \to 0$ est une suite exacte de $\mathbb{Z}[G]$-modules, libres de type fini sur $\mathbb{Z}$ et réalisables (comme modules d'unités) M' (resp. M'') est supposé de longueur un (resp. r). On note H le sous-groupe d'ordre p de G qui laisse les éléments de M' invariants. On désigne par h un générateur de H et on pose $\Gamma = G/H$, $T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', M'')$, $\mathcal{M}' = M'/pM'$, $\mathcal{M}'' = M''/(h-1)M''$ et $\mathcal{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')$.

On a vu dans [1], Prop. 1.3 que l'application restriction réalisait un isomorphisme de $H'(G,T)$ sur $H'(H,T)^{G/H}$. G opérant sur T comme cela a été défini au § 1 de [1] .

Rappelons encore que les classes d'extensions de M' par M" à isomorphisme près correspondent bijectivement aux doubles classes de $H'(G,T)$ sous l'action $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[G]} M''$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[G]} M'$.

Remarque 1.6. - $H'(G,T)$ est isomorphe à $T/(h-1)T$; cela se voit facilement en montrant que le noyau de la multiplication par $\widetilde{H}$ dans T est T lui-même.

Propriété I.8. - $T/(h-1)T$ est $\mathbb{Z}[G]$-isomorphe via la réduction modulo p à $\mathcal{T}$.

Démonstration. - Soit $t \in T$, on peut écrire :

$t(pM') = pt(M') \subset pM'' \subset (h-1)M''$

on associe donc ainsi à t de T un élément $\varphi(t) = \tau$ de $\mathcal{T}$. Cette application est évidemment un $\mathbb{Z}[G]$-homomorphisme. Examinons son noyau : $t \in \ker \varphi \Leftrightarrow t(M') \subset (h-1)M''$. Comme la multiplication par $h-1$ est injective sur M" , $t(M') \subset (h-1)M''$ équivaut à $t = (h-1)t'$ avec $t' \in T$ c'est-à-dire à $t \in (h-1)T$. On a bien $\ker \varphi = (h-1)T$.

Soit maintenant τ dans $\mathcal{T}$, en composant τ avec la projection canonique de M' sur $\mathcal{M}'$, on obtient un $\mathbb{Z}$-homomorphisme de M' dans $\mathcal{M}''$. En utilisant le fait que M' est $\mathbb{Z}$-libre, donc $\mathbb{Z}$-projectif, on obtient un $t \in T$ tel que $\varphi(t) = \tau$. φ est donc surjective.

Propriété I.9. - $\mathcal{M}'$ est un $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-module indécomposable de dimension p-1 sur $\mathbb{F}_p$. $\mathcal{M}'$ est $\mathbb{F}_p[G]$-isomorphe à $\mathbb{F}_p[\Gamma]/\mathbb{F}_p\widetilde{\Gamma}$.

γ désignant un générateur de Γ , on sait, cf.[2] , que M' est isomorphe à $\mathfrak{a}$ idéal de $\Phi^{(p)}$, γ agissant comme la multiplication par ζ racine primitive p-ième de 1 . $\mathcal{M}'$ est donc isomorphe à $\mathfrak{a}/p\mathfrak{a}$, qui est lui-même isomorphe, par localisation, à $\mathbb{Z}_p[\zeta]/p\cdot\mathbb{Z}_p[\zeta]$.

Donc $\mathcal{M}'$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-module, à $\mathbb{F}_p[\Gamma]/\mathbb{F}_p\tilde{\Gamma}$. Ce module est de dimension $(p-1)$ sur $\mathbb{F}_p$, et on voit en regardant la décomposition de Jordan de la multiplication par γ, qu'il est $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-indécomposable.

Propriété 1.10. - $\mathcal{T}^{\Gamma}$ <u>est</u> $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-<u>isomorphe au noyau de la multiplication par</u> $\tilde{\Gamma}$ <u>dans</u> $\mathcal{M}''$.

<u>Démonstration</u>. - La suite exacte $0 \to \mathbb{F}_p\tilde{\Gamma} \to \mathbb{F}_p[\Gamma] \to \mathcal{M}' \to 0$ donne $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathbb{F}_p[\Gamma],\mathcal{M}'') \xrightarrow{\text{restr.}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathbb{F}_p\tilde{\Gamma},\mathcal{M}') \to 0$ donc $\mathcal{T}''$ est isomorphe au noyau de la restriction, c'est-à-dire à l'ensemble des f de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathbb{F}_p[\Gamma],\mathcal{M}'')$ dont la restriction à $\mathbb{F}_p\tilde{\Gamma}$ est nulle, c'est-à-dire tels que $f(\tilde{\Gamma}) = \tilde{\Gamma}f(1)$ est nul. Mais $f \to f(1)$ réalise un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathbb{F}_p[\Gamma],\mathcal{M}'')$ avec $\mathcal{M}''$ donc $\mathcal{T}^{\Gamma}$ est isomorphe à l'ensemble des x de $\mathcal{M}''$ tels que $\tilde{\Gamma}\cdot x = 0$.

Propriété 1.11. - <u>Si</u> $r < p$, $\mathcal{T}^{\Gamma}$ <u>est isomorphe à</u> $\mathcal{M}''$.

<u>Démonstration</u>. - Comme $r < p$, il existe un sous-groupe H' distinct de H et $H' \not\in \mathcal{H}_{M''}$ alors $\tilde{H}'$ annule M'' car $\tilde{H}'M'' \subset M''H' = 0$. Il en résulte que $\tilde{\Gamma}$ annule $\mathcal{M}''$ et on applique la prop. 1.10.

En rassemblant les résultats précédents on obtient le

Théorème 1.12. - $H'(G,T)$ <u>est isomorphe au noyau</u> ${}_{\tilde{\Gamma}}\mathcal{M}''$ <u>de la multiplication par</u> $\tilde{\Gamma}$ <u>dans</u> $\mathcal{M}''$ (<u>égal à</u> $\mathcal{M}''$ <u>lorsque</u> $r < p$).

Terminons par une remarque pour indiquer la voie explorée qui s'est jusqu'ici révélée peu praticable.

<u>Remarque 1.7</u>. - Les classes d'extensions de M' par M'', à isomorphisme près, sont en correspondance bijective avec les doubles classes de ${}_{\tilde{\Gamma}}\mathcal{M}''$ sous l'action des groupes G_1 et G_2 où G_1 (resp. G_2)

désigne le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathcal{M}'')$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p[\Gamma]}(\mathcal{M}')$) image de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[G]}(M'')$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[G]}(M')$) par passage au quotient.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BOUVIER et J.J. PAYAN - "Sur la structure galoisienne du groupe des unités d'un corps abélien de type (p,p)". Annales de l'Institut Fourier 29,1 (1979), 171-187.

[2] A. BRUMER - "On the group of units of an absolutely cyclic number field of prime degree". J. Math. Soc. Japan (1969) 357-358.

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)

(29.10.79)