

JEAN-RENÉ JOLY

Formules sommatoires, transformation de Laplace, fonctions de Bessel et applications arithmétiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 7 (1978-1979), exp. n° 5, p. 1-24

http://www.numdam.org/item?id=STNG_1978-1979__7__A5_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Grenoble

FORMULES SOMMATOIRES,
TRANSFORMATION DE LAPLACE,
FONCTIONS DE BESSEL ET
APPLICATIONS ARITHMETIQUES

par
Jean René JOLY

Cette rédaction est la suite de "Formules sommatoires périodiques,..." et de "Variantes et extensions de Poisson...", où elle est annoncée respectivement sous les numéros [20] et [11], et dont elle prolonge la numérotation (paragraphe, théorèmes, etc...). Son objectif est de montrer comment la transformation de Laplace, appliquée aux sommes $\sum'_{n \leq x} a_n (x - 2\pi n/\lambda)^\alpha$ (où les a_n sont les coefficients d'une série de Dirichlet $\varphi(s)$ avec équation fonctionnelle du type

$$(I) \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) \underset{\text{déf}}{=} \Phi(s) = C(\Phi(K-s)) ,$$

conduit naturellement (§ 12.2) à un développement

$$(II) \quad \sum'_{n \leq x} a_n (x-n)^\alpha = \gamma_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu} \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{nx}\right) ,$$

avec $\nu = \alpha + K$, $\alpha > 2\sigma_0 - K - \frac{1}{2}$, $\sigma_0 =$ abscisse de convergence absolue de $\varphi(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$. La formule (II) (voir Apostol [8],

Chandrasekharan-Narasimhan [9], Berndt [4]) habituellement démontrée par intégration complexe, généralise un résultat classique de Hardy-Landau

($a_n = r(n)$, $\alpha = 1$) [11], contient la formule de Poisson ordinaire, la formule de Poisson tordue par un caractère (voir le papier de Berndt maintes fois cité [4]) et plus généralement (sous les hypothèses faites pour les a_n) la formule de Voronof-Ferrar [10]

$$\sum_c^d a_n f(n) = \int_c^d f(x) \delta(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d f(x) \alpha(nx) dx .$$

L'intérêt de la démonstration via Laplace est de suggérer une présentation des fonctions de Bessel basée sur la remarque suivante :

$$\text{si on pose } f_{\nu}(x, a) = \sum_{m \geq 0} \frac{a^m x^{m+\nu}}{m!(m+\nu)!}$$

(avec $(m+\nu)! = \Gamma(m+\nu+1)$), alors (pour $(x) \supset (t)$) on a

$$f_{\nu}\left(\frac{z}{2}, \pm \frac{z}{2}\right) = I_{\nu}(z), J_{\nu}(z) ;$$

$$f_{\nu}(x, a) \supset t^{-\nu-1} e^{a/t} \quad (\S 9.2).$$

Le paragraphe 9 esquisse ladite présentation. Le paragraphe 10 la complète en donnant les estimations asymptotiques de $J_{\nu}(z)$ et $K_{\nu}(z)$ utiles pour la suite, et en rappelant comment la transformée de Fourier de $(a^2 + |x|^2)^{-1}$ s'exprime à l'aide de $K_{s-\frac{m}{2}}(z)$. Enfin, le

paragraphe 11 est consacré aux séries de Dirichlet avec équation fonctionnelle du type (I). Il montre en particulier sur un exemple simple comment l'application de la formule de Poisson à $\sum_{n \in \mathbb{R}^m} (z^2 + |n|^2)^{-s}$ permet d'obtenir un prolongement analytique, une équation fonctionnelle (du type (I), et sans fonction thêta interposée) et un calcul de valeurs aux points $s = \frac{m+1}{2} + h$, $h \geq 0$, pour les séries de Dirichlet de l'arithmétique quadratique.

§ 9. TRANSFORMATION DE LAPLACE ET FONCTIONS DE BESSEL.

9.1. Notations, définitions (rappels). - On note x une variable réelle (originale) et $t = u + iv$ une variable complexe (image). La transformation de Laplace est définie par

$$(1) \quad f(x) \supset F(t) \quad , \quad F(t) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-tx} dx$$

et s'inverse (sous des hypothèses bien connues) selon

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(t)e^{tx} dt .$$

(On supposera toujours $f(x) = 0$ pour $x < 0$, en particulier, on écrira $x_+ = \begin{cases} x , & \text{si } x \geq 0 \\ 0 , & \text{si } x < 0 \end{cases}$, et x_+^0 pour la fonction de Heaviside ; dans

(2), $f(x)$ est à entendre "en valeur moyenne", et $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ "en valeur principale").

Formules utiles :

$$(3) \quad \text{si } f(x) \supset F(t) \quad \text{et si } a \geq 0 \quad , \quad f(x-a) \supset e^{-at} F(t) \quad ;$$

$$(4) \quad \text{si } \operatorname{Re} \nu > 0 \quad , \quad x_+^{\nu-1} \supset \Gamma(\nu)t^{-\nu} \quad , \quad \text{et par conséquent} \\ (x-a)_+^{\nu-1} \supset \Gamma(\nu)t^{-\nu} e^{-at} .$$

Applications : en utilisant (2), (4) fournit la formule

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xt} t^{-\nu} dt = x_+^{\nu-1} / \Gamma(\nu) \quad ,$$

qu'on utilisera fréquemment. Pour $x = 1$, et moyennant une déformation sans problème du contour d'intégration, (5) donne la représentation de Hankel

$$(6) \quad 1/\Gamma(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0^+)} e^t t^{-s} dt .$$

9.2. Fonctions de Bessel. -

Pour ν (complexe) quelconque, et x et y réels, $x > 0$, posons

$$(7) \quad f_{\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+\nu} y^m}{m!(m+\nu)!} \quad (\text{avec } (m+\nu)! = \Gamma(m+\nu+1)),$$

$$(8) \quad g_{\nu}(x, y) = f_{\nu}(x, -y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{m+\nu} y^m}{m!(m+\nu)!}.$$

On a évidemment

$$(9) \quad I_{\nu}(z) = f_{\nu}\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} f_{\nu}\left(1, \frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} f_{\nu}\left(\frac{z^2}{4}, 1\right),$$

$$(10) \quad J_{\nu}(z) = g_{\nu}\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}\right), \text{ etc. ; et inversement}$$

$$(11) \quad f_{\nu}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}(2\sqrt{xy}),$$

$$(12) \quad g_{\nu}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}(2\sqrt{xy}).$$

9.3. Représentations intégrales, I. -

Par (4) et transformation terme à terme de (7) et (8), on a, pour $\text{Re } \nu > -1$,

$$(13) \quad f_{\nu}(x, y), g_{\nu}(x, y) \supset t^{-\nu-1} e^{\pm yt}^{-1},$$

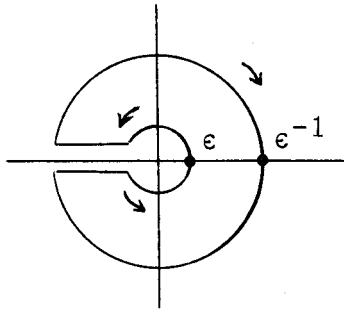
donc, par inversion (formule (2)),

$$(14) \quad f_{\nu}(x, y), g_{\nu}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xt \pm yt} t^{-\nu-1} dt,$$

puis, grâce à (9) et (10),

$$(15) \quad I_{\nu}(z), J_{\nu}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{z}{2}(t \pm t^{-1})} t^{-\nu-1} dt \\ \frac{(z/2)^{\nu}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{t \pm \frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1} dt. \end{cases}$$

Si on définit $K_\nu(z)$ par $\frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi \nu}$, l'intégration de $e^{\frac{z}{2}(t+t^{-1})} t^{-\nu-1}$



sur un contour du type ci-contre, suivie d'un passage à la limite, donne la représentation fondamentale (valable pour $\text{Re } z > 0$ et, par prolongement analytique, pour tout ν)

$$(16) \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(t+t^{-1})} t^{\nu-1} dt .$$

9.4. Relations d'orthogonalité (si l'on peut dire). -

PROPOSITION 9.2.1. - Supposons a et b réels > 0 . Alors :

$$(17) \quad \int_0^\infty g_\nu(x,a) g_{\nu+1}(b,x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } a < b , \\ \frac{1}{2} & \text{si } a = b , \\ 0 & \text{si } a > b . \end{cases}$$

Démonstration : soit I l'intégrale au premier membre. Par (14),

on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty g_\nu(x,a) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{bt-xt^{-1}} t^{-\nu-2} dt \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{bt} t^{-\nu-2} \left[\int_0^\infty g_\nu(x,a) e^{-t^{-1}x} dx \right] dt . \end{aligned}$$

Mais l'intégrale entre crochets (soit J) est la transformée de Laplace de $g_\nu(x,a)$, calculée en t^{-1} ; donc (par (13))

$$J = (t^{-1})^{-\nu-1} e^{-a(t^{-1})-1} = t^{\nu+1} e^{-at} ,$$

et

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{bt} t^{-\nu-2} \cdot e^{-at} t^{\nu+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(b-a)t} t^{-1} dt$$

ou

$$I = (b-a)_+^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a > b \\ \frac{1}{2} & \text{si } a = b \quad (\text{valeur moyenne !}) \end{cases}$$

par utilisation de (5)* avec $\nu = 1$. ■

Par changement de variable et utilisation de (10), (17) donne la formule classique ([W], p. 406)

$$(18) \quad \int_0^\infty J_\nu(ax) J_{\nu+1}(x) dx = \begin{cases} a^\nu & \text{si } 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

§ 10. TRANSFORMATION DE FOURIER ET FONCTIONS DE BESSEL.

10.1. Représentations intégrales, II (rappels). -

Pour $\nu > -\frac{1}{2}$, on a

$$(19) \quad I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{-zt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$$

(faire $t = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$; développer $e^{-z \cos \theta}$ en série entière et intégrer terme à terme), et aussi

$$(20) \quad J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$$

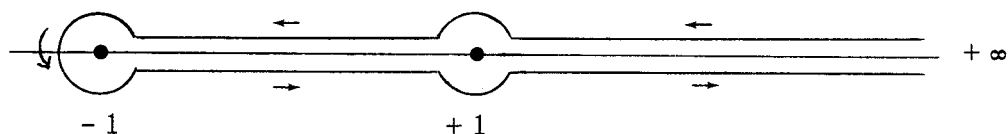
(remplacer z par $-iz$ dans (19)). De là

$$(21) \quad K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$$

(supposer $|\nu| < \frac{1}{2}$; utiliser (19) et la définition de $K_\nu(z)$ à partir de $I_{\pm\nu}(z)$, et intégrer la fonction $(t^2-t)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-zt}$ le long d'un contour

* le " ν " de (17) et celui de (5) étant différents...

du type ci-dessous :



dans cette présentation, c'est la formule la moins évidente : voir [W], p. 171).

10.2. Application I : transformation de Fourier sphérique (rappels). -

Soit $r \geq 1$ la dimension, et soient $x \in \mathbb{R}^r$ et $y \in \mathbb{R}^r$ deux variables r -dimensionnelles duales. On pose comme d'habitude $|x| = (x_1^2 + \dots + x_r^2)^{\frac{1}{2}}$, $xy = x_1 y_1 + \dots + x_r y_r$, etc.

PROPOSITION 10.1.1. - Si $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^r)$ est radiale, soit $f(x) = F(|x|)$, alors $\hat{f}(y)$ est également radiale, soit $\hat{f}(y) = \phi(|y|)$, et ϕ s'exprime à l'aide de F comme transformée de Hankel :

$$(22) \quad \phi(\eta) = 2\pi\eta^{-\nu} \int_0^\infty \xi^{\nu+1} F(\xi) J_\nu(2\pi\xi\eta) d\xi,$$

avec $\nu = \frac{r-2}{2}$ (et moralement $\xi = |x|$, $\eta = |y|$).

Démonstration : passer en coordonnées polaires dans \mathbb{R}^r . Le facteur $J_\nu(2\pi\xi\eta)$ intervient par l'intermédiaire de

$$\int_0^\pi e^{2\pi i \xi \eta \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta,$$

ce qui (par $t = \cos \theta$) est l'intégrale figurant dans (20). ■

Exemples : $r = 2$; posons $f(x)$ = la fonction caractéristique de la boule $|x| \leq R$ (soit $f(x) = (R^2 - |x|^2)_+^0$) et $f_1(x) = (R^2 - |x|^2)_+$. Par application de (22) et intégration par parties, on obtient

$$(23) \quad \Phi(\eta) = \left(\frac{R}{\eta}\right) J_1(2\pi R\eta) \quad , \quad \Phi_1(\eta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{R}{\eta}\right)^2 J_2(2\pi R\eta) \quad .$$

Par application de la formule de Poisson (§ 8.3), ceci donne les formules de Hardy-Landau

$$(24) \quad \sum_{n \leq x} r(n) = \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(2\pi\sqrt{nx}) \quad ,$$

$$(25) \quad \sum_{n \leq x} r(n)(x-n) = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \left(\frac{x}{n}\right) J_2(2\pi\sqrt{nx}) \quad .$$

(Il faut quand même vérifier la convergence du second membre, ce qui est trivial pour (25) - voir la relation asymptotique (27) ci-dessous - mais beaucoup plus difficile pour (24) : voir Landau, ou la suite de cette rédaction).

10.3. Transformée de Fourier de $1/(a^2 + |x|^2)^s$. -

Mêmes notations qu'en 10.2. On suppose $\operatorname{Re} s > \frac{r}{2}$. La transformée de Fourier (radiale) de la fonction du titre est donnée directement par la

PROPOSITION 10.3.1. - Pour $a > 0$, $\operatorname{Re} s > \frac{r}{2}$, et
 $f(x) = 1/(a^2 + |x|^2)^s$, on a

$$(26) \quad \hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{\pi^{r/2} \Gamma(s - \frac{r}{2})}{\Gamma(s)} a^{r-2s} \quad , \quad \underline{\text{si}} \quad y = 0 \quad ; \\ 2 \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \left(\frac{|y|}{a}\right)^{s - \frac{r}{2}} K_{s - \frac{r}{2}}(2\pi a |y|) \quad , \quad \underline{\text{si}} \quad y \neq 0 \quad . \end{cases}$$

Démonstration : calculer en fait $\Gamma(s)\hat{f}(y)$ en utilisant l'intégrale eulérienne pour $\Gamma(s)$, en écrivant le produit comme intégrale dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^r$, en changeant de variable et en utilisant la représentation intégrale (16) pour $K_\nu(z)$. Ce calcul est esquissé dans le livre

de Lang, Elliptic Functions, au chap. 20 (pour $r=1$) : noter que certaines des formules de ce chapitre sont fausses, par suite de l'omission de deux facteurs $\frac{1}{2}$ dans la définition de $K_s(c)$.■

10.4. Estimations asymptotiques de $J_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$. -

De (20) et (21), on déduit facilement des estimations asymptotiques utiles (d'ailleurs "équivalentes" l'une à l'autre), valables lorsque $z \rightarrow \infty$ "vers la droite" (et notamment lorsque $z \rightarrow +\infty$ par valeurs réelles). Ce sont *

$$(27) \quad J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + o(|z|^{-3/2}) ;$$

$$(28) \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{8}(4\nu^2 - 1)z^{-1} + \dots\right) .$$

§ 11. SERIES MODULAIRES ET SERIES DE DIRICHLET.

11.1. "Théorie de Hecke". -

Soient $C = \pm 1$, $K > 0$ et $\lambda > 0$ trois constantes réelles, $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe à croissance modérée ($|a_n| = O(n^\gamma)$), et posons

$$(29) \quad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) ;$$

$$(30) \quad F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-2\pi n t / \lambda} \quad (\text{Re } t > 0) .$$

Soit σ_0 l'abscisse de convergence absolue de $\varphi(s)$. Pour $\sigma = \text{Re } s > \sigma_0$ et $C > \sigma_0$, on a évidemment

* [W], pp. 195 et 202. Voir également le papier de Bateman - Grosswald [1].

$$(31) \quad \Phi(s) = \int_0^{\infty} (F(t) - a_0) t^{s-1} dt ,$$

$$(32) \quad F(t) - a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(s) t^{-s} ds \quad (t \text{ réel}).$$

D'où

PROPOSITION 11.1.1. - Supposons $\Phi(s) + \frac{a_0}{s} + \frac{Ca_0}{K-s}$ prolongea-
ble analytiquement à \mathbb{C} tout entier en une fonction entière et
bornée sur toute bande verticale. Alors les deux assertions sui-
vantes sont équivalentes :

(a) après prolongement analytique (méromorphe), $\Phi(s)$ vérifie
l'équation fonctionnelle

$$(33) \quad \Phi(s) = C\Phi(K-s) ;$$

(b) $F(t)$ vérifie l'équation fonctionnelle "modulaire de poids K "

$$(34) \quad F(t) = Ct^{-K}F(t^{-1}) .$$

Démonstration (rappel) : utiliser (31) et (32) et procéder comme
dans le cas particulier où $\varphi(s) = \zeta(2s)$, $F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$,
 $a_0 = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$ (voir le livre d'Ogg, Modular
Forms and Dirichlet Series, chap. I). ■

Les résultats ci-dessus restent valables pour deux suites

(a) $_{n \geq 0}$ et (b) $_{n \geq 0}$: il faut alors (loc. cit.) remplacer respectivement
(33) et (34) par des équations fonctionnelles "siamoisées" $\Phi(s) = C\Psi(K-s)$
et $F(t) = Ct^{-K}G(t^{-1})$.

11.2. Remarques. -

Les séries de Dirichlet $\varphi(s)$ avec équation fonctionnelle du
type (33) sont essentiellement celles qui ont un zéro simple en chaque
entier négatif. Exemples : $\zeta(2s)$; $L(2s, \chi)$ (χ réel pair primitif) ;
 $L(2s-1, \chi')$ (χ' réel impair primitif) ; $\zeta(s)L(s, \chi') = \zeta_K(s)$

($K' = \mathbb{Q}(\sqrt{-f(\chi')})$) ; plus généralement, $L(s, \chi) L(s, \chi')$ (et par exemple $L(s, \chi) L(s, \psi\chi)$, cf. § 7). Autres exemples : $\sum r(n)n^{-s}$, $\sum Q(n)n^{-s}$ (Kronecker-Epstein), etc. (Ce sont les séries de Dirichlet de l'arithmétique "quadratique").

L'équation fonctionnelle (33) d'une telle série $\varphi(s)$ est en général déduite par le théorème 11.1.1. de l'équation fonctionnelle (34) de la série $F(t)$ correspondante (essentiellement une fonction thêta), ladite équation (34) étant elle-même obtenue par la formule de Poisson ("deuxième méthode de Riemann"). Autres méthodes classiques : "première méthode de Riemann" (résidus) ; utilisation de la formule d'Euler-Mac-Laurin ; utilisation d'une formule du type Lipschitz. Pour $L(s, \chi)$, on peut aussi appliquer directement la formule de Poisson (périodique), le raccord entre s et $1-s$ se faisant sans problème du fait que $L(s, \chi)$ et $L(1-s, \chi)$ convergent dans $0 < \sigma < 1$. L'application (presque) directe de Poisson est également possible pour $\zeta(rs)$, $\sum r(n)n^{-s}$, etc. : c'est l'objet du paragraphe suivant.

11.3. La traversée de la bande critique, ou une (n+1)-ième façon d'écrire l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$. -

Soient z réel, $0 < z < 1$, et s , $\sigma = \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$; appliquons la formule de Poisson à $g(z, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z^2 + n^2)^{-s}$. On obtient (voir § 10 pour le calcul des transformées de Fourier)

$$(39) \quad g(z, s) = 2 \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} z^{1-2s} + 4 \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{z}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi n z) .$$

Par développement de $(z^2 + n^2)^{-s}$ ($n \geq 1$) en série binôme, on obtient d'autre part

$$(40) \quad g(z, s) = z^{-2s} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{s(s+1)\dots(s+m-1)}{m!} \zeta(2s+2m) z^{2m} .$$

L'égalité de (39) et (40), le fait que le second membre de (39) est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, et une récurrence sur m , montrent que $\zeta(2s)$ se prolonge analytiquement à \mathbb{C} tout entier. Supposons maintenant $\sigma < 0$ et faisons tendre z vers 0 : par (39) = (40), il vient

$$(41) \quad \zeta(2s) = 2 \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \lim_{z \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{z}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi n z) .$$

Si on suppose pour simplifier $s \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, si on utilise la définition de K_ν à partir de $I_{\pm\nu}$ ($\nu = s - \frac{1}{2}$; cf. §§9 et 10), on déduit sans peine de (41) la relation

$$\zeta(2s) = 2 \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{\pi}{2 \sin \pi(s-\frac{1}{2})} \frac{(\pi n)^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \right\} ,$$

d'où (par application de la formule de duplication de Legendre et mise en évidence de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s-1} = \zeta(1-2s)$)

$$(42) \quad \zeta(1-2s) = 2(2\pi)^{-2s} \Gamma(2s) \cos \pi s \zeta(2s) ,$$

équation fonctionnelle cherchée. ■

L'intérêt de cette méthode est de s'appliquer mutatis mutandis à toute fonction zêta du type Epstein * ; il suffit (par une transformation linéaire) de se ramener à la forme "canonique" $\sum c_n |n|^{-2s}$, et d'introduire la transformée de Fourier de $(z^2 + |x|^2)^{-s}$ (voir § 10 : ici, $n = (n_1, \dots, n_r)$, $|n| = (n_1^2 + \dots + n_r^2)^{\frac{1}{2}}$, etc.). Cette méthode fournit également un développement de Bessel pour certaines séries du type Hurwitz, et aussi des valeurs numériques de fonctions zêta en des points entiers ou demi-entiers.

* bien entendu, on peut, pour une série telle que $\sum r(n)n^{-s}$
 $= \sum \sum (m^2 + n^2)^{-s} = 2\zeta(2s) + 2 \sum_{m \geq 1} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + n^2)^{-s}$ (en dimension 2),
appliquer Poisson en dimension 1 et regrouper (cf. application de Lipschitz aux séries d'Eisenstein). On obtient ainsi des formules du type Bateman-Grosswald [1].

Exemple : reprenons (pour simplifier) $\varphi(s) = \zeta(2s)$. On a

$K_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$ (faire $\nu = \frac{1}{2}$ dans (21)), d'où, par (39) = (40), sommation de $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n z}$ et multiplication par z , d'une part

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2} = \frac{\pi}{z} + \frac{2\pi}{z} \frac{1}{e^{2\pi z} - 1} ,$$

ou encore

$$(43) \quad \pi \coth \pi z = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + n^2} ;$$

et

$$2 \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \zeta(2m) z^{2m} = \sum_{m \geq 1} \frac{b_{2m}}{(2m)!} (2\pi)^{2m} z^{2m} ,$$

d'autre part (les nombres de Bernoulli b_{2m} s'introduisent par $t/(e^t - 1) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{b_{\nu}}{\nu!} t^{\nu}$ avec $t = 2\pi z$). D'où notamment

$$(44) \quad \zeta(2m) = 2^{2m-1} \pi^{2m} \frac{|b_{2m}|}{(2m)!} ,$$

formule bien connue. Le calcul classique (apparemment artificiel) de $\zeta(2m)$ à partir des coefficients de Taylor de $\coth z$, est donc en fait naturel (dans la perspective de ce paragraphe) et susceptible de généralisations.

§ 12. FORMULES SOMMATOIRES DU TYPE HARDY-LANDAU-CHANDRASEKHARAN-NARASIMHAN.

12.1. Introduction. -

Soit à écrire une formule sommatoire du type Poisson pour

$$S = S(f, \lambda ; a, b) = \sum_a^b \lambda(n) f(n)$$

(voir § 1), où $\lambda = (\lambda(n))_{n \geq 0}$ est une suite complexe, et où f est à variations bornées sur $[a, b]$ ($0 \leq a \leq b \leq +\infty$). Si $\Lambda(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)$ désigne

la fonction sommatoire de λ , on a évidemment

$$S = \int_a^b f(x) d\Lambda(x),$$

et le problème se ramène donc plus ou moins à développer en série du type Fourier la fonction $\Lambda(x)$, ou mieux sa primitive (continue)

$$\Lambda_1(x) = \int_0^* \Lambda(y) dy = \sum_{n \leq x} \lambda(n)(x-n), \text{ ou plus généralement les sommes de Riesz } \Lambda_\alpha(x) = \sum_0^\infty \lambda(n)(x-n)_+^\alpha.$$

Plaçons-nous maintenant dans la situation du théorème 11.1.1

Σ (§ 11.1), avec $\lambda(n) = a_n$ (et un changement de notation : λ désigne désormais un réel > 0). Posons

$$(45) \quad A_\alpha(x) = \sum_0^\infty a_n (x-n)_+^\alpha, \text{ et}$$

$$(46) \quad A_\alpha^*(x) = \sum_0^\infty a_n \left(x - \frac{2\pi n}{\lambda}\right)_+^\alpha.$$

On a donc

$$(47) \quad A_\alpha(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^\alpha A_\alpha^*\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Nous allons voir que pour α assez grand, un aller-et-retour via Laplace, et l'utilisation de l'équation fonctionnelle (34) (avec naturellement $F(t) = \sum_0^\infty a_n e^{-2\pi n t / \lambda}$) donnent pour $A_\alpha^*(x)$ un développement de Fourier-Bessel qui redonne, pour $A_\alpha(x)$, les formules du type Chandrasekharan-Narasimhan et en particulier Hardy-Landau (pour $a_n = r(n)$, $\alpha = 1, 2$), et Berndt ($a_n = \chi(n)$, χ pair, ou $n\chi(n)$, χ impair ; l'utilisation d'une telle formule est à la base de la méthode utilisée par Berndt dans [4] pour obtenir la formule de Poisson avec caractère sur un intervalle fini) : voir §12.2. Les paragraphes suivants esquissent une méthode de "descente" de α et indiquent des exemples d'applications.

12.2. Développement de $A_{\alpha}^*(x)$ et $A_{\alpha}(x)$ en séries de Fourier-Bessel.

Dans toute la suite, on note σ_0 l'abscisse de convergence absolue de $\varphi(s) = \sum_1^{\infty} a_n n^{-s}$.

LEMME 12.2.1. - Soit $(\xi_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle positive $(\xi_n \geq 0)$ croissante et tendant vers $+\infty$ *. Posons $H(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - \xi_n)_+^{\alpha}$. Alors, pour la transformation de Laplace, on a (voir § 9)

$$(48) \quad H(x) \supset \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\xi_n t}.$$

Démonstration (principe) : c'est évident formellement, puisque $(x-\xi)_+^{\alpha} \supset \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha-1} e^{-\xi t}$ pour $\xi \geq 0$ (voir § 9.2). Voici comment on peut justifier analytiquement le résultat annoncé : on note N un entier tendant vers $+\infty$, on pose $X = \xi_N$, et on remarque que

$$\int_0^X H(x) e^{-tx} dx = \sum_{n=0}^N a_n \int_{\xi_n}^X (x - \xi_n)_+^{\alpha} e^{-tx} dx ;$$

mais

$$\int_{\xi_n}^X = \int_{\xi_n}^{\infty} - \int_X^{\infty},$$

et $\int_{\xi_n}^{\infty}$ se calcule explicitement (et vaut, bien sûr, $\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha-1} e^{-\xi_n t}$!);

une majoration du reste (utilisant l'hypothèse $|a_n| = O(n^{\gamma})$), donne alors

$$(49) \quad \int_0^X H(x) e^{-tx} dx = \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^N a_n e^{-\xi_n t} + \dots + O_t \left(N^{\gamma+1} \xi_N^{\alpha} e^{-\xi_N t} \right) ;$$

comme $\operatorname{Re} t$ est supposée > 0 , ceci donne

* "pas trop lentement" - par exemple, au moins aussi vite que n . Voir plus précisément (49).

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X H(x) e^{-tx} dx = \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\xi_n t} ,$$

d'abord pour $X = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N, \dots$, puis (facilement) pour X réel quelconque - ce qui est le résultat promis. ■

Faisons maintenant $\xi_n = \frac{2\pi n}{\lambda}$ (voir § 11.1) : la formule (48) devient alors

$$(50) \quad A_{\alpha}^*(x) \supset \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha-1} F(t) ,$$

soit, par (34), et en posant

$$(51) \quad \nu = \alpha + K \quad , \quad C_{\alpha} = C \Gamma(\alpha+1) ,$$

$$(52) \quad A_{\alpha}^*(x) \supset C_{\alpha} t^{-\nu-1} F(t^{-1}) = C_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\nu-1} e^{-(2\pi n/\lambda)t^{-1}} .$$

LEMME 12.2.2. - Posons

$$K(x) = C_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_{\nu}(x, 2\pi n/\lambda) .$$

Alors, sous l'hypothèse $\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} > \sigma_0$, soit

$$(53) \quad \boxed{\alpha > 2\sigma_0 - K - \frac{1}{2}} ,$$

on a

$$(54) \quad K(x) \supset C_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\nu-1} e^{-(2\pi n/\lambda)t^{-1}} .$$

Démonstration : c'est évident formellement, puisque

$g_{\nu}(x, y) \supset t^{-\nu-1} e^{-yt^{-1}}$ (§ 9.2, (13)). La justification analytique est standard (plus facile que pour le lemme 12.2.1) : il suffit de "traduire" $g_{\nu}(x, y)$ en fonction de Bessel $J_{\nu}(2\sqrt{xy})$ par (12) (§ 9.2) et d'utiliser l'estimation asymptotique (27) (§ 10.4).

Noter que (54) est vraie pour tout α au sens des distributions (examiner l'action de la dérivation sur $K(x)$, et noter que $\frac{\partial}{\partial x} g_{\nu}(x, y) = g_{\nu-1}(x, y)$, par exemple (δ Laplace !) parce que

$\left| t \left(t^{-\nu-1} e^{-yt^{-1}} \right) = t^{-(\nu-1)-1} e^{-yt^{-1}} \right.$; utiliser ensuite (53) pour
 $\left. \alpha + m > 2\sigma_0 - K - \frac{1}{2} \right.$, puis dériver m fois au sens des distributions. ■

LEMME 12.2.3. - Pour $\alpha > 2\sigma_0 - K - \frac{1}{2}$, on a $A_\alpha^*(x) = K(x)$,
soit, explicitement

$$(55) \quad \sum_{n \geq 0} a_n \left(x - \frac{2\pi n}{\lambda} \right)_+^\alpha = C_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\lambda x}{2\pi n} \right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu \left(2\sqrt{\frac{2\pi n x}{\lambda}} \right)$$

(avec, rappelons-le, $\nu = \alpha + K$, $C_\alpha = C\Gamma(\alpha+1)$).

Démonstration : l'égalité $A_\alpha^*(x) = K(x)$ (à interpréter "en valeur moyenne", voir § 9.2, (2) et lignes suivantes) résulte du fait que $A_\alpha^*(x)$ et $K(x)$ ont même image par la transformation de Laplace, et de la formule d'inversion (2) (ou du "théorème de Lerch") : voir les seconds membres de (52) et (54). La formule (55) en résulte par utilisation de la définition de $A_\alpha^*(x)$, et par traduction de $g_\nu(x, 2\pi n/\lambda)$ en fonction de Bessel (§ 9.2, (12), déjà utilisée). ■

La combinaison de (47) et (54) donne alors le résultat annoncé :

THEOREME 12.2.4. - Avec les hypothèses du § 11.1 et les notations suivantes :

$$(56) \quad \nu = \alpha + K \quad , \quad \gamma_\alpha = C\Gamma(\alpha+1) \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^\alpha \quad ,$$

on a, sous l'hypothèse

$$(57) \quad \boxed{\alpha > 2\sigma_0 - K - \frac{1}{2}} \quad ,$$

le développement de Fourier-Bessel

$$(58) \quad \sum_{n \geq 0} a_n (x-n)_+^\alpha = \gamma_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{n} \right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{nx} \right) .$$

[Enoncé analogue évidemment pour le cas d'une équation fonctionnelle "siamoise" $\Phi(s) = C\Psi(K-s)$:

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x-n)^{\alpha} = \gamma_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu} \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{nx} \right) \quad] .$$

Noter que la série de droite converge uniformément sur tout compact.

12.3. Descente de l'exposant α . -

Dans ce paragraphe, on suppose $\sigma_0 = K$, $C = 1$ (voir § 11.1) et on se limite comme précédemment au cas d'une "vraie" équation fonctionnelle (entre $\varphi(s)$ et $\varphi(K-s)$) ; le cas $C = -1$, ou le cas "siamois", se traiteraient de manière à peine plus compliquée. Noter que (57) se réécrit alors

$$(57') \quad \alpha > K - \frac{1}{2} = \sigma_0 - \frac{1}{2} \quad ,$$

et que (sous cette hypothèse), on a la relation (58), équivalente (avec comme au lemme 12.2.1 $\xi_n = \frac{2\pi n}{\lambda}$) à l'égalité (où $C_{\alpha} = \Gamma(\alpha+1)$)

$$(58') \quad \sum_{n \geq 0} a_n (x - \xi_{n+})^{\alpha} = C_{\alpha} \sum_{n \geq 0} a_n g_{\alpha+K}(x, \xi_n) .$$

Dans un certain nombre de cas (Landau [11], Berndt [4], pour $a_n = r(n)$ ou $\chi(n)$), les formules (58) - (58') restent valables pour $\alpha = 0$, la série de droite étant "bornément" convergente sur tout compact $x_1 \leq x \leq x_2$, et uniformément convergente sur tout compact ne contenant aucun ξ_n . Ceci se démontre par "descente" de α à partir d'une valeur vérifiant (57') : voir notamment le papier de Berndt [4], pp. 416-419. On se propose ici de détailler le mécanisme de cette descente en utilisant les fonctions $g_{\nu}(x, y)$ (§ 9).

LEMME 12.3.1. - On a

$$(59) \quad \partial g_{\nu} / \partial x = g_{\nu-1} \quad ; \quad \partial g_{\nu} / \partial y = -g_{\nu+1} .$$

Evident sur la définition (8). ■

Pour $\alpha \geq 0$, $N \geq 1$ et $X = \xi_N$, posons

$$A_{\alpha}^{*}(x) = \sum_n a_n (x - \xi_n)^{\alpha} \quad (\text{rappel}) ;$$

$$(61) \quad S(x, X) = \sum_{n \leq N} a_n g_K(x, \xi_n) \quad (\text{somme } \underline{\text{partielle}}) ;$$

$$(62) \quad G_{\alpha}(x, X) = A_{\alpha}^{*}(X) g_{\alpha+K}(x, X) ;$$

$$(63) \quad R_{\alpha}(x, X) = \int_0^X A_{\alpha}^{*}(y) g_{\alpha+K+1}(x, y) dy .$$

$$\text{LEMME 12.3.2.} - \int_0^X A_{\alpha}^{*}(y) dy = \frac{1}{\alpha+1} A_{\alpha+1}^{*}(x) .$$

Classique et évident. ■

LEMME 12.3.3. - Pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$(64) \quad S(x, X) = G_0(x, X) + \dots + G_m(x, X) + R_m(x, X) .$$

Démonstration : omettons pour alléger l'écriture la spécification de x et $X = \xi_N$. On a par définition

$$S - G_0 = \sum_{n \leq N} a_n (g_K(x, \xi_n) - g_K(x, X)) ,$$

$$g_K(x, \xi_n) - g_K(x, X) = - \int_{\xi_n}^X \frac{\partial g_K}{\partial y}(x, y) dy ,$$

d'où (lemme 12.3.1)

$$\begin{aligned} S - G_0 &= \sum_{n \leq N} a_n \int_{\xi_n}^X g_{K+1}(x, y) dy \\ &= \int_0^X A_0^{*}(y) g_{K+1}(x, y) dy . \end{aligned}$$

Intégrons par parties en utilisant les lemmes 12.3.1. - 2. ; il vient

$$\begin{aligned} S - G_0 &= A_1^{*}(X) g_{K+1}(x, X) + \int_0^X A_1^{*}(y) g_{K+2}(x, y) dy \\ (65) \quad &= G_1 + R_1 . \end{aligned}$$

On obtient ainsi (64) avec $m = 1$. Pour $m \geq 2$, (64) se déduit de (65)

par $m - 1$ intégrations par parties effectuées sur

$$R_1(x, X) = \int_0^X A_1^*(y) g_{K+r}(x, y) dy .$$

D'où le lemme. ■

Faisons maintenant l'hypothèse suivante :

(D₁) la représentation (58') est valable pour $\alpha = m$ (par exemple parce que $m > K - \frac{1}{2}$), la série de droite convergeant uniformément sur tout compact.

On a alors (en reportant dans (63), avec $\alpha = m$, le développement de $A_m^*(y)$, et en intervertissant \int_0^X et $\sum_{n \geq 0}$)

$$(66) \quad R_m(x, X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^X g_{K+m}(y, \xi_n) g_{K+m+1}(K, y) dy .$$

Mais

LEMME 12.3.4. - On a

$$(67) \quad \int_0^{\infty} g_{K+m}(y, \xi_n) g_{K+m+1}(x, y) dy = (x - \xi_n)_+^0$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_n < x \\ \frac{1}{2} & \text{si } \xi_n = x \\ 0 & \text{si } \xi_n > x \end{cases}$$

Simple transcription de la proposition 9.2.1. ■

Comme $A_0^*(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - \xi_n)_+^0$, (64) et (66) donnent donc

$$(68) \quad S(x, X) = A_0^*(x) + \sum_{\mu=0}^m G_{\mu}(x, X) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_X^{\infty} g_{K+m}(y, \xi_n) g_{K+m+1}(x, y) dy$$

Le problème est (rappelons-le) de faire tendre N et $X = \xi_N$ vers l'infini et de prouver que $S(x, N) = \sum_{n \leq N} a_n g_{K+m}(x, \xi_n) \rightarrow A_0^*(x)$.

Il suffit donc (en principe) de prouver

- d'une part (partie facile) que (pour $0 \leq \mu \leq m$)

$$(69) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} G_{\mu}(x, X) = 0 \quad ;$$

- d'autre part (partie difficile) que

$$(70) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0} a_n \int_0^X g_{K+m}(y, \xi_n) g_{K+m+1}(x, y) dy = 0 \quad ;$$

la convergence étant uniforme (ou bornée)... (voir plus haut).

La démonstration de (69) et (70) se fait en utilisant

- d'une part, des estimations portant sur les fonctions

$$g_{K+\mu}(x, y) \quad :$$

LEMME 12.3.5. -

$$(71) \quad g_{K+\mu}(x, y) = 0 \left(x^{\frac{K}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} y^{-\frac{K}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} \right)$$

Utiliser $g_{\nu}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}(2\sqrt{xy})$ et l'estimation asymptotique

$$J_{\nu}(z) = (2/\pi z)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + O(z^{-3/2}) \quad . \blacksquare$$

- d'autre part, des estimations portant sur $A_0^*(x)$, ou plus

$$\text{simplement sur } A(\nu) = \sum_{n \leq \nu} a_n \quad ;$$

par exemple : $A(x) = O(x^{\beta})$, ou même $A(x) \sim cx^{\beta}$. De telles estimations peuvent résulter facilement du problème posé (exemple : pour le problème du cercle, $a_n = r(n)$, l'équivalence $A(x) \sim \pi x$ est triviale) soit directement, soit après application d'une transformation d'Abel. Si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est suffisamment régulière, on peut également appliquer le théorème de Wiener-Ikehara (noter que d'après § 11.1, on sait

que $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s)$ a un pôle simple de résidu Ca_0 au point "critique" $s = K$). (Rappelons que l'intérêt d'une formule telle que

(58) - (58') avec $\alpha = 0$ est de passer d'une estimation $A(x) \sim Cx^{\beta}$ à une estimation "avec reste"

$$A(x) = Cx^{\beta} + O(x^{\theta}) \quad , \quad 0 \leq \theta < \beta \quad .$$

12.4. Exemples et remarques. -

1) $\varphi(s) = \zeta(2s)$. On a $\lambda = 2$, $K = \frac{1}{2}$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $C = 1$.

Naturellement, pour $n \geq 1$, on a $a_n = 1$ si n est un carré, $a_n = 0$ sinon. Expriment $g_{\frac{1}{2}}(x, y)$ à l'aide de $J_{\frac{1}{2}}(z) = (2/\pi z)^{\frac{1}{2}} \sin z$, en faisant le changement de variable $x \rightarrow x^2$, on arrive à

$$\frac{1}{2} + [x] = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi x},$$

c'est-à-dire au développement de Fourier de $\beta(x) = \mathfrak{B}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ (voir § 3), exprimé à l'aide de sinus.

2) $\varphi(x) = L(2s, \chi)$ (χ pair) ou $L(2s-1, \chi)$ (χ impair).

On aboutit alors au développement de Fourier de $\mathfrak{B}_1(x, \chi)$.

3) $\varphi(s) = \sum_1^{\infty} r(n)n^{-s} = 4\zeta_K(s)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

On obtient les formules de Hardy-Landau.

4) Exercice : appliquer ce qui précède à la fonction

$$\begin{aligned} 4L(s, \chi)L(s, \chi \psi) &= \sum \sum^{\circ} \frac{\chi(m^2+n^2)}{(m^2+n^2)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)r(n)n^{-s} \end{aligned}$$

déjà mentionnée au paragraphe 7.

Remarques : par un raisonnement facile (descente de α par dérivation au sens des distributions), (58) donne une formule du type Voronof-Ferrar pour $f \in C^{\infty}$ à support compact, et sans recourir à une "descente" telle que celle du paragraphe 12.3. Si la descente est applicable, Voronof-Ferrar (avec pour $\alpha(x)$ une fonction du type Bessel) peut s'établir sans difficulté pour f à variations bornées, par une méthode analogue à celle permettant de déduire Poisson de

$$\mathfrak{B}_1(x) = - \sum_{\substack{\infty \\ -\infty \\ n \neq 0}} e^{\frac{2\pi i n x}{2\pi i n}}$$

(c'est sans doute l'idée sous-jacente dans le papier de Berndt [4], pp. 419-420 : ce passage de la démonstration est plutôt "abrupt").

BIBLIOGRAPHIE.

- [W] WATSON, Theory of Bessel functions, Cambridge (1922/1966).
- [1] BATEMAN-GROSSWALD, Acta arithm., 1964.
- [2] CHOWLA-SELBERG, J. reine angew. Math. 1967.
(Deux papiers sur les fonctions zêta d'Epstein - ou plutôt de Kronecker).
- [3] TERRAS, Acta arithm., 1976. "Some formulas for the values of the Riemann zeta-function at odd integer arguments..."
+ une série d'autres papiers (dont un dans FROHLICH, Algebraic Numbers).
- [4] BERNDT, J. Number Theory, 1975. "Poisson and Euler-Maclaurin summation formulas..."
+ une série de papiers (Ens. Math. , 1976 ; Special Functions, 1975 ; Proc. Amer. Math. Soc. 1975).
- [5] BERNDT-SCHOENFELD, Acta arithm., 1975, "Periodic summation formulas..."
- [6] JOLY, Exposés de séminaire :
- [6.1] Petite analyse de Fourier, Grenoble 1975/76
 - [6.2] Formules sommatoires périodiques, Grenoble 1976/77
 - [6.3] Variantes et extensions de la formule de Poisson, Grenoble 1977/78.
- [7] JOLY, Bull. Sc. Math., 1977. "Inégalité de Polya..."
- [8] APOSTOL, Identities involving the coefficients of certain Dirichlet series, Duke Math. J., 18 (1951), pp. 517-525.

- [9] CHANDRASEKHARAN-NARASIMHAN, Hecke's functional equation, I, Ann. Math., 73 (1961), 1-23 ; II, Ibid., 76 (1962), 93-136.
- [10] FERRAR, Summation formulae and their relations to Dirichlet series, I, II, Composition Math., 1935 et 1937.
- [11] LANDAU, Zahlentheorie, 1927 ; chap. 8.