

ROLAND GILLARD

## Unités elliptiques et unités cyclotomiques

*Séminaire de théorie des nombres de Grenoble*, tome 7 (1978-1979), exp. n° 1, p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=STNG\\_1978-1979\\_\\_7\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STNG_1978-1979__7__A1_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Grenoble

## UNITES ELLIPTIQUES ET UNITES CYCLOTOMIQUES

par  
Roland GILLARD

Soit  $K/\mathbb{Q}$  une extension abélienne contenant un corps quadratique imaginaire  $k$  ; désignons par  $F$  la sous-extension réelle maximale de  $K/\mathbb{Q}$ . Si tous les nombres premiers ramifiés dans  $F/\mathbb{Q}$  le sont aussi dans  $K/k$ , on exprime l'unité elliptique fondamentale  $\varphi_K$  de  $K$  en fonction de l'unité cyclotomique fondamentale  $\theta_F$  de  $F$ . Si  $K/k$  est ramifiée mais si l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée, on obtient seulement une expression d'une puissance de  $\varphi_K$  à l'aide des unités cyclotomiques de certains sous-corps de  $F$ . Enfin, si  $K/k$  est non ramifiée, on donne un résultat analogue. Signalons que [2] traite déjà l'exemple où  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$  et  $K = k(\sqrt[p]{1})$ .

Dans la suite, tous les corps considérés sont plongés dans  $\mathbb{C}$ .

### § 1. RESUME SUR LES UNITES ELLIPTIQUES.

1.1 Soit  $L = [w_1, w_2]$  un réseau de  $\mathbb{C}$ , avec  $\text{Im } w_1/w_2 > 0$ . Soit  $a(L) = (w_1 \bar{w}_2 - w_2 \bar{w}_1)/2i$  l'aire du domaine fondamental de  $L$ . Posons

$$\eta(z, L) = s_2(L) \cdot z + \frac{\pi}{a(L)} \cdot \bar{z},$$

où  $s_2(L)$  désigne la limite pour  $s \rightarrow 0$  de  $\sum 1/w^2 |w|^{2s}$  (somme sur les éléments non nuls de  $L$ ). Si  $z \in L$ ,  $\eta(z, L)$  est la quasi-période

relative à  $z$  de la fonction  $\zeta$  de Weierstrass. En utilisant la fonction  $\sigma(z, L)$ , on introduit (\*), cf. [3, 4e partie] pour  $\zeta$  et  $\sigma \dots$ ,

$$\varphi(z, L) = e^{-\eta(z, L)z/2} \cdot \sigma(z, L) \cdot \Delta^{1/12}(L),$$

où  $\Delta^{1/12}(L)$  est la racine 12ème du discriminant

$$\Delta^{1/12}(L) = \left(\frac{2\pi i}{w_2}\right) \cdot q_0^{\frac{1}{12}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_0^n)^2 \quad \text{avec } q_0 = \exp 2\pi i w_1/w_2.$$

La fonction  $\varphi$  vérifie donc l'identité

$$(1) \quad \forall w \in L \quad \varphi(z+w, L) = \varphi(z, L) \cdot \psi(w) \exp \frac{\eta(w)z - \eta(z)w}{2}$$

$$\text{avec } \psi(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in 2L \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.2 Soient  $k$  un corps quadratique imaginaire,  $h$  et  $e$  le nombre de classes et le nombre de racines de l'unité de  $k$ . Pour  $\mathfrak{f}$  idéal entier de  $k$ , soit  $\text{Cl}(\mathfrak{f})$  (resp.  $k(\mathfrak{f})$ ) le groupe des classes (resp. le corps de classes) de rayon  $\mathfrak{f}$ . Désignons par  $f$  le plus petit entier  $> 0$  dans  $\mathfrak{f}$  et par  $e(\mathfrak{f})$  le nombre de racines de l'unité de  $k$  congrues à 1 modulo  $\mathfrak{f}$ .

Supposons d'abord  $\mathfrak{f} \neq (1)$ . Disons qu'un couple  $(t, b)$  ( $t \in k^*$ ,  $b$  idéal de  $k$  premier à  $\mathfrak{f}$ ) représente  $C \in \text{Cl}(\mathfrak{f})$  si et seulement si  $t\mathfrak{f}b^{-1}$  est un idéal entier premier à  $\mathfrak{f}$  et appartenant à  $C$ ;  $(t, b)$  et  $(t', b')$  représentent la même classe si et seulement s'il existe  $\xi \in k^*$  tel que  $b' = \xi b$ ,  $t'/\xi t \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ . On a  $f \cdot t \in b$ , et de (1) on déduit que

$$\varphi_{\mathfrak{f}}(C) = \varphi^{12f}(t, b)$$

ne dépend pas du couple  $(t, b)$  représentant  $C$ .

Supposons  $\mathfrak{f} = (1)$ . Si  $C$  appartient à  $\text{Cl}(\mathfrak{f})$  et  $b$  est un idéal de  $C^{-1}$ , désignons par  $\beta$  un générateur de  $b^h$ ; posons

---

(\*) La fonction  $\varphi$  ci-dessus ne diffère de celle de [4] que par un facteur  $i$ .

$$\delta(C) = (2\pi)^{-12h} \beta^{12} \Delta^h(b) ,$$

ce nombre est indépendant du choix de  $b$  dans  $C^{-1}$ .

1.3 Soit  $K$  une extension abélienne de conducteur  $\mathfrak{f}$  et  $\mu_K$  le groupe des racines de l'unité dans  $K$ . Notons  $G$  le groupe  $\text{Gal}(K/k)$  et  $I$  l'idéal d'augmentation de  $\mathbb{Z}[G]$ . Pour  $\sigma \in G$ , on pose

$$\delta_K(\sigma) = \overline{\prod} \delta(C) \quad \text{si } \mathfrak{f} = (1)$$

$$\varphi_K(\sigma) = \overline{\prod} \varphi_{\mathfrak{f}}(C) \quad \text{sinon,}$$

les produits étant pris sur l'ensemble des  $C \in \text{Cl}(\mathfrak{f})$  dont l'image par l'application de réciprocité relative à  $K/k$  est  $\sigma$ . On définit  $\varphi_K(u)$  (resp.  $\delta_K(u)$ ) pour  $u \in \mathbb{Z}[G]$  par multiplicativité.

Supposons d'abord  $\mathfrak{f} \neq (1)$ . Soit  $J$  l'idéal de  $\mathbb{Z}[G]$ , annulateur du  $\mathbb{Z}[G]$ -module  $\mu_K$ . Cet idéal est engendré par les  $(\mathfrak{A}, K/k) - N(\mathfrak{A})$  où  $\mathfrak{A}$  parcourt l'ensemble des idéaux de  $k$  premiers à  $12f$  et où  $(\mathfrak{A}, K/k)$  (resp.  $N(\mathfrak{A})$ ) désigne l'automorphisme d'Artin associé à  $\mathfrak{A}$  (resp. la norme de  $\mathfrak{A}$ ). On peut alors énoncer (cf. [4] et pour e) [1]) :

THEOREME 1. -

- a) Si  $u \in \mathbb{Z}[G]$ ,  $\varphi_K(u)$  est un entier de  $K$ .
- b) Si  $u \in I$ ,  $\varphi_K(u)$  est une unité de  $K$ .
- c) Si  $\sigma, \sigma' \in G$ ,  $\sigma[\varphi_K(\sigma')] = \varphi_K(\sigma\sigma')$ .
- d) Si  $\mathfrak{f}$  est produit d'au moins deux idéaux premiers distincts et  $u \in \mathbb{Z}[G]$ ,  $\varphi_K(u)$  est une unité.
- e) Si  $u \in J$ ,  $\varphi_K(u)$  est la puissance d'ordre  $12.f.e(\mathfrak{f})$  d'un élément de  $K$ .

Posons  $\varphi_K = \varphi_K(1)$  : dans l'introduction, cet élément est qualifié d'unité elliptique fondamentale :  $\varphi_K$  est en effet une unité sauf si  $\mathfrak{f}$

est puissance d'un idéal premier  $\mathfrak{p}$ , auquel cas ce n'est une unité qu'en dehors de  $\mathfrak{p}$ . J'ai fait un abus de langage analogue pour  $\theta_F$  cf. § 2.1. Le groupe des unités elliptiques propres de  $K$  est par définition

$$\Omega_K = \{x \in K^* \mid x^{12fe(\mathfrak{f})} \in \varphi_K(I \cap J)\} .$$

Supposons maintenant  $\mathfrak{f} = (1)$ . On peut énoncer (cf. [4]) en posant  $J = \{\sum n(\sigma)\sigma \in \mathbb{Z}[G] \mid \prod \sigma^{n(\sigma)} = 1\}$ .

THEOREME 1'. -

- a) Si  $u \in I$ ,  $\delta_K(u)$  est une unité de  $K$ .
- b) Si  $\sigma \in G$  et  $u \in I$ ,  $\sigma[\delta_K(u)] = \delta_K(\sigma u)$ .
- c) Si  $u \in I \cap J$ ,  $\delta_K(u)$  est la puissance d'ordre h.e d'un élément de  $K$ .

Le groupe des unités elliptiques propres de  $K$  est par définition

$$\Omega_K = \{x \in K^* \mid x^{h.e} \in \delta_K(I \cap J)\} .$$

Sans hypothèses sur  $\mathfrak{f}$ , on définit le groupe des unités elliptiques de  $K$  par

$$\mathcal{E}_K = \mu_K \cdot \prod \Omega_{K'} ,$$

où  $K'$  parcourt l'ensemble des sous-extensions de  $K/k$  et où  $\Omega_{K'}$  est défini en remplaçant  $K$  par  $K'$  dans tout ce qui précède.

## § 2. ENONCE DES RESULTATS.

On conserve les notations déjà introduites notamment dans l'introduction et aux paragraphes 1.2 et 1.4. On désigne par  $\theta$  le caractère quadratique de  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  défini par  $k$ . Pour  $n$  entier  $> 0$ , posons  $\zeta_n = \exp 2\pi i/n$ .

Soit  $S$  l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans  $K/\mathbb{Q}$  mais non dans  $K/k$ . Pour  $p$  dans  $S$  notons  $T_p$ , le groupe de ramification dans  $K/\mathbb{Q}$  : ceci permet de décomposer  $S$  en une réunion disjointe  $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ , les éléments de  $S_i$  étant, pour chaque  $i$ , caractérisés par leur groupe de ramification. Soient  $J$  une partie de  $I$  et  $J_1$  la partie complémentaire. Désignons par  $K_J^0$  (resp.  $K_J^1$ ) le sous-corps de  $K$  fixé par  $\prod_{p \in J} T_p$ , où le produit est pris sur la réunion des  $S_i$  pour  $i \in J$  (resp.  $i \in J_1$ ). Soit  $f_J^0$  (resp.  $f_J$ ) le conducteur de  $K_J^0$  (resp. de  $K_J^1$ ). Soit  $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$  ; posons

$$\theta_J = \pm \left[ N_{\mathbb{Q}(\zeta_{f_J^0})/K_J^0} (1 - \zeta_{f_J^0}) \right]^{1/2},$$

$$\beta_J(\sigma) = \theta(\sigma) \cdot \sum_{B_1\left(\frac{a}{f_J^1}\right)}$$

où  $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ,  $f_J^1 = \text{p.p.c.m.}(f, f_J)$  et où dans la somme  $a$  parcourt l'ensemble des entiers de 1 à  $f_J^1$ , premiers à  $f_J^1$  et tels que la restriction de l'automorphisme  $\zeta_{f_J^1} \rightarrow \zeta_{f_J^1}^a$  à  $K_J^1$  soit égale à celle de  $\sigma$ .

Posons

$$m_J = \frac{[K:K_J^0]^2}{[K:K_J^0][K:K_J^1]}$$

$$\beta_J = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})} \beta_J(\sigma) \sigma^{-1} \quad \text{et}$$

$$\gamma_J = \prod_{\substack{p|f \\ p \nmid f_J^0}} (1 - \sigma_p^{-1})$$

où  $\sigma_p$  désigne l'automorphisme de Frobenius de  $p$  dans  $K_J^0/\mathbb{Q}$ . Soient  $\alpha_J = \beta_J \cdot \gamma_J$  et  $\alpha_J(\sigma)$  le coefficient de  $\sigma^{-1}$  dans  $\alpha_J$ , pour  $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ .

Avec tout ceci, on peut énoncer :

THEOREME 2. - Si  $K/k$  est une extension ramifiée, on a

$$\varphi_K = \varepsilon \prod_{J \in I} \theta_J^{-12.f.e(\mathfrak{f}).\alpha_J.m_J} \quad , \quad \text{avec} \quad \varepsilon \in \mu_K .$$

Remarque 1 : Soit  $c$  la conjugaison complexe, on voit facilement que  $\beta(\sigma c) = \beta(\sigma)$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  ;  $\alpha_J$  peut donc se mettre sous la forme  $(1+c)\alpha'_J$  avec  $\alpha'_J = \sum \alpha_J(\sigma)\sigma^{-1}$ , somme prise sur  $\text{Gal}(K/k)$ . Ainsi  $\theta_J^{\alpha_J}$  est égal à  $\theta_J^{2\alpha'_J}$  si  $K_J^{\circ}$  est réel et à  $\pm \left[ N_{\mathbb{Q}}(\zeta_{f_J^{\circ}}) / F_J \left( 1 - \zeta_{f_J^{\circ}} \right) \right]^{\alpha'_J/2}$  si  $K_J^{\circ}$  est imaginaire, de sous-corps réel maximum  $F_J$ .

Remarque 2 : Si  $K_J^1$  est réel,  $a$  et  $f_J^1 - a$  figurent dans chacune des sommes  $\beta_J(\sigma)$ , d'où  $\beta_J(\sigma) = 0$  et donc  $\alpha_J = 0$ . Ceci prouve que certains  $J$  peuvent être supprimés dans le produit du théorème 2 ; à ce sujet voir aussi § 4.

Si tous les nombres premiers ramifiés dans  $F/\mathbb{Q}$  le sont dans  $K/k$ ,  $S$  se réduit à l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans  $k/\mathbb{Q}$  mais non dans  $F/\mathbb{Q}$  : si  $S$  est vide, on a  $I = \emptyset$  et  $K_I^{\circ} = K_I^1 = K$  ; la remarque 1 s'applique et dans ce cas les conducteurs  $f_0$  et  $f_1$  de  $F$  et  $K$  ont les mêmes facteurs premiers. Si  $S$  est non vide,  $I$  est réduit à un élément,  $\alpha_{\emptyset} = 0$  d'après la remarque 2 ; enfin on a  $K_I^{\circ} = F$ ,  $K_I^1 = K$ . On peut énoncer :

COROLLAIRE. - Si tous les nombres premiers ramifiés dans  $F/\mathbb{Q}$  le sont dans  $K/k$ , en désignant par  $f_0$  et  $f_1$  les conducteurs de  $F$  et  $K$ , on a

$$\varphi_K = \varepsilon \theta_F^{-12fe(\mathfrak{f})} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/k)} \alpha(\sigma)\sigma^{-1}$$

avec  $\varepsilon \in \mu_K$ , avec  $\theta_F = \pm \left[ N_{\mathbb{Q}}(\zeta_{f_0}) / F \left( 1 - \zeta_{f_0} \right) \right]^{1/2}$  et

$\alpha(\sigma) = \sum_{B_1} \left( \frac{a}{f_1} \right)$  où dans la somme  $a$  parcourt l'ensemble des

entiers de 1 à  $f_1$ , premiers à  $f_1$  et tels que la restriction de l'automorphisme  $\zeta_{f_1} \rightarrow \zeta_{f_1}^a$  à  $K$  soit précisément  $\sigma$ .

Supposons maintenant  $K/k$  non ramifiée. On a alors  $K_I^0 = \mathbb{Q}$ ,  $\gamma_J = 1$ .

THEOREME 3. - Si  $K/k$  est non ramifiée, soit  $\sum n(\sigma)\sigma$  un élément de  $\mathbb{Z}[G]$  vérifiant  $\sum n(\sigma) = 0$ . On a

$$\prod_{\sigma \in G} \delta_K(\sigma)^{n(\sigma)} \cdot [K:\mathbb{Q}]^2 = e \left( \prod_{J \subseteq I} \theta_J^{-12 \cdot f \cdot e(\mathfrak{f}) \cdot \alpha_J \cdot m_J} \right)^{\sum_{\sigma \in G} n(\sigma)\sigma}$$

avec  $e \in \mu_K$ .

### § 3. DEMONSTRATIONS.

3.1. Pour démontrer les théorèmes 2 et 3, utilisons l'homomorphisme du groupe des unités de  $K$  dans  $\mathbb{C}^{[K:k]}$  composé de

$$u \rightarrow \sum_{\sigma \in G} \log |\sigma(u)| \cdot \sigma$$

et de l'isomorphisme entre  $\mathbb{C}[G]$  et  $\mathbb{C}^{[K:k]}$  :

$$\sum_{\sigma \in G} \alpha(\sigma)\sigma \rightarrow \left( \sum_{\sigma \in G} \alpha(\sigma)\chi(\sigma) \right)_{\chi}$$

où les composantes du produit sont indicées par les caractères irréductibles de  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Le noyau de l'homomorphisme composé est  $\mu_K$ .

Soit  $\chi$  un caractère de  $G$ ; désignons par  $\chi_0$  le caractère de  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  correspondant à  $\chi$  via l'isomorphisme  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong G$ , et par  $\chi_1$  le caractère de  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  prolongeant  $\chi$  et vérifiant  $\chi(c) = -1$ . Notons  $g$  (resp.  $g_0, g_1$ ) le conducteur de  $\chi$  (resp.  $\chi_0, \chi_1$ ). Pour  $g$ , on emploie des notations analogues à celles introduites en 1.2 pour  $\mathfrak{f}$ .



On identifie  $\chi$  (resp.  $\chi_0, \chi_1$ ) au caractère de  $Cl(\mathfrak{g})$  (resp. aux caractères de Dirichlet primitifs correspondants).

Posons

$$\Sigma_J^0(\chi) = \frac{1}{[K:K_J^0]} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})} \chi_0(\sigma) \log \left| \sigma \left( \theta_J^{2\gamma_J} \right) \right|$$

$$\Sigma_J^1(\chi) = \frac{1}{[K:K_J^1]} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})} \chi_0(\sigma) \beta_J(\sigma) , \text{ et}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma(\chi) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\varphi_K(\sigma)| \quad \text{si } \mathfrak{f} \neq (1) \\ \Sigma(\chi) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\delta_K(\sigma)| \quad \text{si } \mathfrak{f} = (1) . \end{array} \right.$$

Pour démontrer les théorèmes 2 et 3, il suffit de prouver l'égalité entre  $[K:K_I^0]^2 \cdot \Sigma(\chi)$  et  $-12fe(\mathfrak{f}) \sum_{J \subseteq I} m_J \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\sigma(\theta_J^{\alpha_J})|$  pour chaque  $\chi$  (pour chaque  $\chi$  non trivial si  $\mathfrak{f} = 1$ ), c'est-à-dire après un changement de sommation

$$\Sigma(\chi) = -3fe(\mathfrak{f}) \sum_{J \subseteq I} [\Sigma_J^0(\chi) \cdot \Sigma_J^1(\chi)] .$$

En considérant  $\chi$  comme un caractère de  $\text{Gal}(K_J^0/\mathbb{Q})$  ou  $\text{Gal}(K_J^1/\mathbb{Q})$ , lorsque c'est possible, on peut écrire

$$\begin{aligned} \Sigma_J^0(\chi) &= \prod_{\substack{p|f \\ p \nmid f_J^0}} (1 - \chi_0(p)) \cdot \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_J^0/\mathbb{Q})} \chi_0(\sigma) \log |\sigma(\theta_J^2)| \\ &= \prod_{\substack{p|f \\ p \nmid f_J^0}} (1 - \chi_0(p)) \cdot \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_J^0)=1}}^{f_J^0} \chi_0(a) \log \left| 1 - \zeta_{f_J^0}^a \right| , \end{aligned}$$

si  $\chi_0$  est trivial sur  $\text{Gal}(K/K_J^0)$  et 0 sinon et

$$\begin{aligned}\Sigma_J^1(\chi) &= \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_J^1/\mathbb{Q})} \chi_1(\sigma) \Sigma_{B_1} \left( \frac{a}{f_J^1} \right) \\ &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_J^1)=1}}^{f_J^1} \chi_1(a) B_1 \left( \frac{a}{f_J^1} \right)\end{aligned}$$

si  $\chi_1$  est trivial sur  $\text{Gal}(K/K_J^1)$  et 0 sinon.

Pour  $p \in S$ , soit  $t_p$  un générateur de  $T_p$ , on a  $\chi_1(t_p) = \chi_0(t_p)\theta(t_p) = -\chi_0(t_p)$  puisque  $p$  est ramifié dans  $k/\mathbb{Q}$ . Ainsi  $\chi_1$  est trivial sur  $T_p$  si et seulement si  $\chi_0$  ne l'est pas. On a donc  $\Sigma_J^0(\chi) \cdot \Sigma_J^1(\chi) \neq 0$  si et seulement si la réunion des  $S_i$  pour  $i \in J$  est exactement l'ensemble des  $p \in S$  tels que  $\chi_0(t_p) = 1$ . Pour chaque  $\chi$ , ceci n'arrive que pour un seul ensemble  $J$ . On voit d'ailleurs que certains  $J$  n'interviennent jamais et peuvent donc être supprimés dans les produits des théorèmes 2 et 3. Les théorèmes 2 et 3 résultent alors de l'énoncé :

PROPOSITION. - Soit  $\chi$  un caractère de  $G$  (non trivial si  $\mathfrak{f} = (1)$ ), pour le sous-ensemble  $J$  ci-dessus, on a :

$$\Sigma(\chi) = -3fe(\mathfrak{f}) \Sigma_J^0(\chi) \cdot \Sigma_J^1(\chi) .$$

La proposition est démontrée en 3.3 pour  $\chi$  non trivial et 3.4 pour  $\chi$  trivial et  $\mathfrak{f} \neq (1)$ .

3.2. Rassemblons d'abord les formules sur les fonctions  $L$  que nous utiliserons. Comme le caractère de  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  induit par  $\chi$  est égal à la somme de  $\chi_1$  et du caractère déduit de  $\chi_0$ , on a

$$(2) \quad L(s, \chi, K/k) = L(s, \chi_0, F/\mathbb{Q}) \cdot L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q})$$

d'où en regardant les diviseurs de  $\mathfrak{f}$

$$(3) \quad \prod_{p|f} (1-\chi(p)) = \prod_{p|f} (1-\chi_0(p)) \cdot \prod_{p|f} (1-\chi_1(p)) .$$

De plus, en faisant tendre  $s$  vers  $0$  dans (2), on obtient ( $\chi$  non trivial)

$$(4) \quad L'(0, \chi, K/k) = L'(0, \chi_0, F/\mathbb{Q}) \cdot L(0, \chi_1, K/\mathbb{Q}) .$$

Enfin, en utilisant les équations fonctionnelles pour les fonctions zêta d'Hurwitz et d'Epstein, ainsi que les valeurs classiques au point  $1$ , on trouve

$$(5) \quad L'(0, \chi, K/k) = -\frac{1}{6ge(g)} \sum_{c \in C\ell(g)} \chi(c) \log |\varphi_g(c)| \quad \text{si } g \neq (1) , \text{ cf. [5] ,}$$

$$(5 \text{ bis}) \quad L'(0, \chi, K/k) = -\frac{1}{6e} \sum_{c \in C\ell((1))} \chi(c) \log |\delta(c)| \quad \text{si } g = (1) ,$$

$$(6) \quad L'(0, \chi_0, F/\mathbb{Q}) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, g_0)=1}}^{g_0} \chi_0(a) \log |1 - \zeta_{g_0}^a| ,$$

$$(7) \quad L(0, \chi_1, K/\mathbb{Q}) = - \sum_{\substack{a=1 \\ (a, g_1)=1}}^{g_1} \chi_1(a) B_1\left(\frac{a}{g_1}\right) .$$

3.3. On suppose  $\chi$  non trivial. Les formules (5) et (5bis) permettent d'exprimer  $\Sigma(\chi)$  (cf. [4, §2.3, corollaire 2]) :

$$(8) \quad \Sigma(\chi) = -6fe(\bar{f}) \prod_{p|\bar{f}} (1-\chi(p)) L'(0, \chi) .$$

Le produit sur les diviseurs premiers de  $\bar{f}$  se décompose à l'aide de (3).

De plus, on a

$$\begin{aligned} \Sigma_J^0(\chi) &= \prod_{\substack{p|f \\ p \nmid f_J^0}} (1-\chi_0(p)) \prod_{p|f_J^0} (1-\chi_0(p)) \sum_{\substack{a=1 \\ (a, g_0)=1}}^{g_0} \chi_0(a) \log |1 - \zeta_{g_0}^a| \\ &= -2 \prod_{p|f} (1-\chi_0(p)) \cdot L'(0, \chi_0, F/\mathbb{Q}) , \end{aligned}$$

puisque d'après 3.1 et le choix de  $J$  les diviseurs premiers de  $f_J^0$

premiers à  $f$ , sont tels que  $\chi_0(t_p) = -1$  c'est-à-dire  $\chi_0(p) = 0$ .

De même :

$$\begin{aligned}\Sigma_J^1(\chi) &= \prod_{p|f_J^1} (1-\chi_1(p)) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,g_1)=1}}^{g_1} \chi_1(a) B_1\left(\frac{a}{g_1}\right) \\ &= - \prod_{p|f} (1-\chi_1(p)) \cdot L(0, \chi_1, K/\mathbb{Q})\end{aligned}$$

puisque par définition les diviseurs premiers de  $f_J^1$  sont ceux de  $f$  et ceux de  $f_J$  et puisque les diviseurs premiers de  $f_J$  premiers à  $f$  sont dans la réunion des  $S_i$  pour  $i$  dans  $J$  donc vérifient  $\chi_0(t_p) = 1$  d'où  $\chi_1(p) = 0$ .

Ceci achève la démonstration de la proposition pour  $\chi$  non trivial.

3.4. Supposons pour finir  $\chi$  trivial et  $\bar{f} \neq (1)$ . Dans ce cas, on a  $J = I$  et  $K_I^1 = K$ , donc les diviseurs premiers de  $f_I^0$  ne sont pas dans  $S$  donc divisent  $f$ . Distinguons les éventualités suivantes :

■ Si  $f$  possède au moins deux facteurs premiers distincts,  $\bar{f}$  aussi, donc  $\varphi_K$  et  $\theta_I^{YI}$  sont des unités si bien que  $\Sigma(\chi) = \Sigma_I^0(\chi) = 0$ .

■ Si  $f$  est puissance d'un nombre premier  $p$  décomposé dans  $k$ ,  $\bar{f}$  est composé,  $\varphi_K$  est une unité d'où  $\Sigma(\chi) = 0$ . De plus  $\Sigma_I^1(\chi)$  contient en facteur  $1 - \theta(p)$ , donc est nul.

■ Si  $f$  est puissance d'un nombre premier  $p$  inerte (resp. ramifié) dans  $k$ , on pose  $r = 1$  (resp.  $r = 2$ ). Soient  $\mathfrak{p}$  le diviseur premier de  $p$  dans  $k$ ,  $\beta_0$  un générateur de  $\mathfrak{p}^h$  et  $C_0$  la classe d'idéaux de  $\mathfrak{p}$ ; d'après [4, §2.3, théorème 2], on a

$$\begin{aligned}\Sigma(\chi) &= \frac{fe(\bar{f})}{e} \sum_C \log \left| \frac{\Delta(b)}{\Delta(bp)} \right| \\ &= \frac{fe(\bar{f})}{e \cdot h} \sum_C \log \left| \frac{\delta(C) \cdot \beta_0^{12}}{\delta(C \cdot C_0^{-1})} \right|\end{aligned}$$

où les sommes portent sur les éléments  $C$  du groupe des classes de  $k$ ,  $b$  et  $C$  étant reliés comme en 1.3. Puisque  $|\beta_0^{12}| = p^{6hr}$ , on trouve

$$\Sigma(\chi) = 6fe(\bar{f}) \cdot \frac{r}{e} \cdot h \log p .$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma_I^0(\chi) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f)=1}}^f \log |1 - \zeta_f^a| = \log p \quad \text{et} \\ \Sigma_I^1(\chi) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f_1)=1}}^{f_1} \theta(a) B_1\left(\frac{a}{f_1}\right) = (1 - \theta(p)) B_{1,\theta} \\ &= -2 \cdot \frac{r}{e} \cdot h , \end{aligned}$$

d'après la formule analytique du nombre de classes pour  $k$ . On a donc bien

$$\Sigma(\chi) = -3fe(\bar{f}) \Sigma_I^0(\chi) \cdot \Sigma_I^1(\chi) .$$

#### § 4. SOUS-ENSEMBLES $J$ ADMISSIBLES.

Un sous-ensemble  $J$  de  $I$  est dit admissible si  $J = I$ , ou s'il existe deux hyperplans  $H_0$  et  $H_1$  du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Gal}(K/K_I^0)$  tels que  $J \subset H_0$  (resp.  $J_1 \subset H_1$ ) et que  $H_0 \cap H_1 \cap I$  soit vide. Les seuls  $J$  intervenant réellement dans le produit des théorèmes 2 et 3 sont admissibles (un caractère  $\chi$  de  $G$  définit un sous-ensemble  $J$  qui est admissible en prenant, si  $J \neq I$  pour  $H_0$  (resp.  $H_1$ ) le noyau de  $\chi_0$  (resp.  $\chi_1$ ) dans  $\text{Gal}(K/K_I^0)$  cf. §3.1). Ainsi on voit que la relation des théorèmes 2 et 3 est essentiellement unique (\*), comme le prouve le lemme suivant (il suffit de raisonner par récurrence décroissante

---

(\*) Ceci répond à une question de G. Robert.

sur le nombre d'éléments de  $J$ ,  $J$  admissible et de considérer la norme de  $\varphi_K [K:K_I^{\circ}]^2$  ou  $\prod \delta_K(\sigma)^{n(\sigma)} \cdot [K:\mathbb{Q}]^2$  sur  $K_J^{\circ}$ ).

LEMME. - La norme de  $\theta_J^{2\beta_J}$  dans toute sous-extension stricte de  $K_J^{\circ}$  de la forme  $K_J^{\circ} \cap K_{J'}^{\circ}$  est triviale.

Démonstration : Soit  $i$  un élément de  $J'$  non dans  $J$  :  $i$  est dans  $J_1$ , d'où si  $p \in S_i$

$$(1+t_p) \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/K_J^1)} \theta(\sigma)\sigma^{-1} = (1+\theta(t_p)) \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/K_J^1)} \theta(\sigma)\sigma^{-1} = 0,$$

ce qui démontre le lemme puisque  $\beta_J$  (resp. la norme entre  $K_J^{\circ}$  et  $K_J^{\circ} \cap K_{J'}^{\circ}$ ) contient en facteur  $\sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/K_J^1)} \theta(\sigma)\sigma^{-1}$  (resp. l'opérateur  $1+t_p$ ).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. GILLARD et G. ROBERT, Groupes d'unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France, à paraître.
- [2] D. KUBERT et S. LANG, Modular units inside cyclotomic units, Bull. Soc. Math. France, à paraître.
- [3] S. LANG, Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.
- [4] G. ROBERT, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France, mémoire 36 (1973).
- [5] H. STARK, Class fields and modular forms of weight one, in Modular functions of one variable V, Lect. Notes in Math. 601, Springer Verlag 1977.