

ROLAND GILLARD

Unités cyclotomiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. n° 3, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A3_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNITES CYCLOTOMIQUES

par

Roland GILLARD

Le but de cet exposé est d'améliorer et de comparer des résultats de H. HASSE ([3]) et de H. LEOPOLDT ([5]) sur les unités cyclotomiques d'un corps de nombres abélien réel K .

§1. - NOTATIONS

1.1. Soit μ le groupe des racines de 1 dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. On choisit un isomorphisme de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dans μ et on note ζ_n l'image de $1/n$. On désigne par J la conjugaison complexe dans $\mathbb{Q}(\mu)$.

Soit K un corps de nombres abélien réel et G le groupe de Galois, E le groupe des unités et h le nombre de classes de K . Désignons par ξ_0 le caractère unité de G . Pour tout caractère ξ de G , défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$, introduisons $\ker \xi = \{\sigma \in G \mid \xi(\sigma) = \xi(1)\}$, K_ξ le sous-corps de K fixé par $\ker \xi$ et G_ξ le quotient de G par $\ker \xi$. Le groupe G_ξ est cyclique : notons g_ξ son ordre, d_ξ le discriminant du polynôme cyclotomique P_{g_ξ} d'indice g_ξ et choisissons un générateur $\sigma(\xi)$ de G_ξ parmi les $\varphi(g_\xi)$ possibles. Soit f_ξ le conducteur (resp. E_ξ le groupe des unités) du corps K_ξ . Pour $\xi \neq \xi_0$, choisissons pour tout automorphisme sur K_ξ , σ , du sous-corps réel maximum de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$, un prolongement $\bar{\sigma}$ à $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ et définissons un entier de $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ (cf. [5] §8) par :

$$\theta_{\xi} = \prod_{\sigma} \bar{\sigma}(\zeta_{2f_{\xi}} - \zeta_{2f_{\xi}}^{-1}) . \quad (1)$$

Notons d'une part que J opère sur $(\zeta_{2f_{\xi}} - \zeta_{2f_{\xi}}^{-1})$ en changeant son signe. D'autre part, on déduit de l'écriture de ce nombre sous la forme $\zeta_{2f_{\xi}}(1 - \zeta_{f_{\xi}}^{-1})$ la relation :

$$(\zeta_{2f_{\xi}} - \zeta_{2f_{\xi}}^{-1})^{1+J} = (1 - \zeta_{f_{\xi}})^{1+J} .$$

Des remarques précédentes on tire les égalités

$$\theta_{\xi}^J = (-1)^{s(\xi)} \theta_{\xi} , \quad \theta_{\xi}^2 = (-1)^{s(\xi)} N_{\mathbb{Q}(\zeta_{f_{\xi}})/K_{\xi}}(1 - \zeta_{f_{\xi}}) \quad (2)$$

avec $s(\xi) = \varphi(f_{\xi})/2g_{\xi}$. Ceci montre que θ_{ξ}^2 est dans K_{ξ} . Pour α dans G_{ξ} (resp. dans G) désignons par θ_{ξ}^{α} une racine carrée de $\alpha(\theta_{\xi}^2)$. On prolonge par multiplicativité cette définition à $\mathbb{Z}[G_{\xi}]$ (resp. $\mathbb{Z}[G]$) ; pour α dans G_{ξ} (resp. dans G), $\theta_{\xi}^{\alpha^{-1}}$ est dans K_{ξ} . Si $\mathfrak{A}_{\xi}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[G_{\xi}]$, notons $\theta_{\xi}^{\mathfrak{A}_{\xi}}$ l'image de $\mathfrak{A}_{\xi}$ par l'application $\alpha \rightarrow \theta_{\xi}^{\alpha}$.

1.2. Pour tout groupe fini X , désignons par $[X]$ son ordre. Pour chaque ξ , introduisons l'idempotent correspondant de $\mathbb{Q}[G]$

$$e_{\xi} = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma \in G} \xi(\sigma^{-1}) \sigma , \quad (3)$$

et $u_{\xi} = [G] \cdot e_{\xi}$. Désignons par N_G l'indice de $\mathbb{Z}[G]$ dans la somme directe $\oplus e_{\xi} \mathbb{Z}[G]$ où ξ parcourt l'ensemble de tous les caractères de G définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Le discriminant de la $\mathbb{Z}$ -algèbre $\mathbb{Z}[G]$ est $[G]^{[G]}$; celui de $\oplus e_{\xi} \mathbb{Z}[G]$ est $\prod_{\xi} d_{\xi}$. On a donc (cf [5], §1.3) :

$$N_G = \sqrt{\frac{[G]^{[G]}}{\prod_{\xi} d_{\xi}}} . \quad (4)$$

On introduit aussi l'entier C_G (cf [3] §14 et §15) :

$$C_G = \sqrt{\prod_{\xi} d_{\xi} \left(\frac{[G]}{g_{\xi}^2} \right)^{\varphi(g_{\xi})}} = \prod_p p^{\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left[q \frac{[G]}{p^{\mu}} - \frac{[G]}{p^{\mu}} \right]} \quad (5)$$

où q est la fonction qui à un entier m associe le nombre d'éléments de G d'ordre divisant m ; dans le produit p parcourt l'ensemble des diviseurs premiers de $[G]$. En effectuant le produit et la division de N_G par C_G et en tenant compte de la valeur de d_ξ et de la relation $[G] = \sum \varphi(g_\xi)$, on obtient :

$$N_G \cdot C_G = \prod_{\xi} \left(\frac{[G]}{g_\xi} \right)^{\varphi(g_\xi)}$$

et

$$N_G / C_G = \prod_{\xi} \frac{g_\xi^{\varphi(g_\xi)}}{d_\xi} = \prod_{\xi} \prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1} . \quad (6)$$

§ 2. - RESULTATS DE LEOPOLDT

2.1. Pour chaque ξ , $\xi \neq \xi_0$, considérons l'élément γ_ξ de $\mathbb{Z}[G_\xi]$:

$$\gamma_\xi = \prod_{p|g_\xi} (1 - \sigma(\xi)^{g_\xi/p}) .$$

L'élément $\theta_\xi^{\gamma_\xi}$ est dans K_ξ et on vérifie qu'on a :

$$\theta_\xi^{[G] \cdot \gamma_\xi} = \pm \theta^{u_\xi} \quad \text{avec} \quad \theta = \prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{\gamma_\xi} . \quad (7)$$

Désignons par $\pm \theta^{I(G)}$ le sous-groupe de E des éléments de la forme $\pm \theta^\alpha$ où α appartient à l'idéal d'augmentation $I(G)$ de $\mathbb{Z}[G]$. Son indice est le quotient du régulateur du groupe $\theta^{I(G)}$ par le régulateur R de E . D'après le résultat classique sur les déterminants de groupes (cf [3] §11(3)) on a donc :

$$[E : \pm \theta^{I(G)}] = \pm \frac{1}{R} \prod S(\chi) ,$$

où dans le produit χ parcourt l'ensemble des caractères de G définis et irréductibles sur $\mathbb{C}$, avec

$$S(\chi) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \log |\theta^\sigma| .$$

Pour évaluer $S(\chi)$ prolongeons χ par linéarité à $\mathbb{Z}[G]$ et utilisons le lemme :

LEMME 1. - Soit L une application $\mathbb{Z}$ -linéaire de $\mathbb{Z}[G]$ dans R ; alors pour tout u dans $\mathbb{Z}[G]$, on a :

$$\sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) L(u\sigma) = \chi(u) \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) L(\sigma) .$$

Démonstration : ceci se voit par un changement de sommation si u est dans G . Le lemme se déduit alors par $\mathbb{Z}$ -linéarité.

Si χ intervient dans la décomposition de ξ sur $\mathbb{C}$, on a $\chi(u_\xi) = [G]$, si bien qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} S(\chi) &= \frac{1}{2[G]} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \log |\theta_\xi^{2\sigma u_\xi}| \\ &= \frac{1}{2[G]} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \log |\theta_\xi^{2[G] \gamma_\xi \sigma}| \\ &= \frac{\chi(\gamma_\xi)}{2} \frac{[G]}{g_\xi} \sum_{\sigma \in G_\xi} \chi(\sigma^{-1}) \log |\theta_\xi^{2\sigma}| \\ &= \frac{\chi(\gamma_\xi)}{2} \frac{[G]}{g_\xi} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_\chi)=1}}^{f_\chi} \chi^{-1}(a) \log |1 - \zeta_{f_\chi}^a| . \end{aligned}$$

Dans ces égalités, on a considéré χ comme un caractère de G_ξ , ce qui permet de définir $\chi(\gamma_\xi)$ par linéarité ; puis on a remplacé le caractère χ par le caractère de Dirichlet $\underline{\chi}$ (de conducteur $f_\chi = f_\xi$) qu'il définit et utilisé (2) . D'après [3] 5 (1.a), on a la formule analytique du nombre de classes :

$$\prod_{\chi \neq 1} \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_\chi)=1}}^{f_\chi} \underline{\chi}(a)^{-1} \log |1 - \zeta_{f_\chi}^a| \right) = \pm h.R .$$

Pour chaque caractère ξ , $\xi \neq \xi_0$, le produit des éléments $\chi(\gamma_\xi)$, pris sur l'ensemble des caractères χ figurant dans la décomposition de ξ sur $\mathbb{C}$, est la norme entre $\mathbb{Q}(\zeta_{g_\xi})$ et $\mathbb{Q}$ de $\prod_p (1 - \zeta_p)$. Comme

$\mathbb{Q}(\zeta_{g_\xi})$ est de degré $\varphi(g_\xi)/p-1$ sur $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et que la norme de $1-\zeta_p$ entre $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et $\mathbb{Q}$ est p , on obtient :

$$[E : \pm \oplus^{I(G)}] = h \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} \left(\frac{[G]}{g_\xi} \right)^{\varphi(g_\xi)} \prod_{\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}$$

c'est-à-dire d'après (6) :

$$[E : \pm \oplus^{I(G)}] = \frac{h}{[G]} (N_G)^2. \quad (8)$$

Considérons l'application de $I(G)$ dans $E : \alpha \rightarrow \oplus^{2 \cdot \alpha}$; c'est un homomorphisme dont l'image est d'indice fini donc est encore $\mathbb{Z}$ -isomorphe à $\mathbb{Z}^{[G]-1}$. Son noyau est donc nul.

2.2. Désignons pour tout ξ , $\xi \neq \xi_0$, par $\mathfrak{u}_\xi^0$ l'idéal de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ engendré par γ_ξ et posons

$$F_\xi^0 = \pm \theta_\xi^{\mathfrak{u}_\xi^0}, \quad F_{\xi_0}^0 = \pm 1, \quad F^0 = \prod F_\xi^0.$$

D'après [5] on a :

$$\text{THEOREME 1.} - [E:F^0] = h \cdot \frac{N_G}{[G]}.$$

Démonstration : il résulte de 2.1 que l'application $I(G) \rightarrow \oplus^{I(G)}$ définie par $\alpha \rightarrow \oplus^{2\alpha}$ est injective. On a donc d'après (7), en élevant au carré pour se débarrasser de ± 1 :

$$\begin{aligned} [F^0 : \pm \oplus^{I(G)}] &= \left[\prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{2[G](\gamma_\xi)} : \oplus^{[G] \cdot 2I(G)} \right] \\ &= \left[\oplus_{\xi \neq \xi_0} \mathfrak{u}_\xi \mathbb{Z}[G] : [G] \cdot I(G) \right] \\ &= \left[\oplus e_\xi \mathbb{Z}[G] : I(G) \oplus e_{\xi_0} \mathbb{Z}[G] \right]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[G] + e_{\xi_0} \mathbb{Z}[G] / I(G) \oplus e_{\xi_0} \mathbb{Z}[G] &\simeq (1 - e_{\xi_0}) \mathbb{Z}[G] / I(G) \\ &\simeq (1 - e_{\xi_0}) \mathbb{Z} / I(G) \cap (1 - e_{\xi_0}) \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} / [G] \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{Z}[G] + e_{\xi_0} \mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z}[G] \simeq e_{\xi_0} \mathbb{Z} / e_{\xi_0} \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}[G] \simeq \mathbb{Z} / [G] \mathbb{Z} .$$

D'où l'égalité qui avec (8) prouve le théorème :

$$[F^0 : \pm \Theta^{I(G)}] = [\oplus_{\xi} \mathbb{Z}[G] : \mathbb{Z}[G]] = N_G .$$

§3. - RESULTATS PREPARATOIRES

Si M est un $\mathbb{Z}$ -module de type fini, on appelle rang essentiel de M , la dimension sur $\mathbb{Q}$ de $M \otimes \mathbb{Q}$.

3.1. Définissons une relation d'ordre partiel sur les caractères de G , définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$ par l'équivalence :

$$\xi' < \xi \Leftrightarrow K_{\xi'} \subsetneq K_{\xi} .$$

Pour ξ, ξ' vérifiant $\xi' < \xi$, soit $N_{\xi, \xi'}$ la somme dans $\mathbb{Z}[G_{\xi}]$ des éléments du noyau de la surjection $G_{\xi} \rightarrow G_{\xi'}$. Pour chaque ξ , désignons par η_{ξ} l'idéal de $\mathbb{Z}[G_{\xi}]$ engendré par les éléments $N_{\xi, \xi'}$ avec $\xi' < \xi$. Le résultat suivant est dû à J. Martinet (cf [2], p.9-10) :

PROPOSITION 1. - L'idéal η_{ξ} est engendré par $P_{g_{\xi}}(\sigma(\xi))$.

En envoyant $\sigma(\xi)$ sur $\zeta_{g_{\xi}}$, on obtient alors un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}[G_{\xi}] / \eta_{\xi} \simeq \mathbb{Z}[\zeta_{g_{\xi}}] . \quad (9)$$

Ainsi par (9), $\theta_{\xi}^{2\mathfrak{U}_{\xi}^0}$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_{\xi}}]$ -module monogène ; son rang essentiel est donc inférieur ou égal à $\varphi(g_{\xi})$. Comme $2\mathfrak{U}_{\xi}^0$ contient $2[G]_{\gamma_{\xi}}$, il résulte de (7) et de la fin de 2.1 que le rang essentiel de $\theta_{\xi}^{2\mathfrak{U}_{\xi}^0}$ est $\varphi(g_{\xi})$, c'est-à-dire que ce $\mathbb{Z}[\zeta_{g_{\xi}}]$ -module est libre de rang 1.

3.2. Soit ξ un caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ distinct de ξ_0 . On peut énoncer

PROPOSITION 2. - Le $\mathbb{Z}$ -module $E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$ est libre de rang $\varphi(g_\xi)$.

Démontrons d'abord quelques lemmes.

LEMME 2. - Pour tout ξ' , $\xi' < \xi$, $E_\xi / E_{\xi'}$ est un $\mathbb{Z}$ -module sans torsion.

Démonstration : il suffit de démontrer le lemme 2' :

LEMME 2'. - Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}$, ϵ une unité de L , $\sqrt[n]{\epsilon}$ une racine $n^{\text{ième}}$ de ϵ . L'extension $L' = L(\sqrt[n]{\epsilon})$ n'est pas une extension cyclique réelle de $\mathbb{Q}$.

Démonstration : supposons en effet que $L'/\mathbb{Q}$ est cyclique réelle : L' contient les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et puisque L' est réelle, n est égal à 2. Soient $d = [L:\mathbb{Q}]$ et σ un générateur de $\text{Gal}(L'/\mathbb{Q})$; considérons $\alpha = (\sqrt[2]{\epsilon})^{1+\sigma+\dots+\sigma^{d-1}}$. Il est clair que α^2 est une unité de $\mathbb{Q}$ donc vaut ± 1 . Puisque L' est réelle, on a donc $\alpha = \pm 1$. Mais la relation $(\sqrt[2]{\epsilon})^{\sigma^d} = -\sqrt[2]{\epsilon}$ implique que $\alpha^{\sigma^d} = -\alpha$.

Soit p un nombre premier et désignons par $\xi(p)$ le caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $g_{\xi(p)} = g_\xi/p$ si p divise g_ξ . Si p ne divise pas g_ξ , posons $\xi(p) = \xi_0$.

LEMME 3. - Le groupe $(E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}) \otimes \mathbb{Z}_p$ est isomorphe à un sous-groupe de $(E_\xi / E_{\xi(p)}) \otimes \mathbb{Z}_p$.

Démonstration : on peut décomposer G_ξ en un produit direct $\Gamma \times \Delta$ où Γ est un p -groupe et Δ un groupe d'ordre premier à p . Soit λ le caractère de Δ , défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $\{\sigma \in \Delta \mid \lambda(\sigma) = \lambda(1)\} = 1$ et e_λ l'idempotent de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ associé à λ par une formule analogue à (3). Le produit tensoriel de $E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$

avec $\mathbb{Z}_p$ est égal -en notations additives- à $e_\lambda((E_\xi/E_{\xi(p)}) \otimes \mathbb{Z}_p)$ qui est facteur direct dans $(E_\xi/E_{\xi(p)}) \otimes \mathbb{Z}_p$.

LEMME 4. - L'application canonique de $\theta_\xi^{2\mathfrak{U}_\xi^0}$ dans $E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$ est injective.

Démonstration : soit θ_ξ^α un élément du noyau, avec $\alpha \in 2\mathfrak{U}_\xi^0$.

On a alors

$$\theta_\xi^{u_\xi \cdot \alpha} = 1.$$

Mais d'après (7), $\theta_\xi^{u_\xi \cdot \alpha}$ est égal à $\theta_\xi^{[G]} \cdot \alpha$ et la nullité de α résulte alors de la fin de 3.1.

Démonstration de la prop. 2 : les lemmes 2 et 3 montrent que $E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$ est sans torsion. L'application du lemme 4 est injective et son image est d'indice fini, d'après le théorème 1 appliqué à K_ξ ; le rang de $E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$ est donc celui de $\theta_\xi^{2\mathfrak{U}_\xi^0}$, c'est-à-dire $\varphi(g_\xi)$ d'après la fin de 3.1.

§4. - CALCULS D'INDICES

4.1. Pour chaque $\xi \neq \xi_0$, considérons un idéal $\mathfrak{U}_\xi$ de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ contenant $\mathfrak{U}_\xi^0$ et posons $F_\xi = \pm \theta_\xi^{\mathfrak{U}_\xi}$, $F_{\xi_0} = \pm 1$, $F = \prod F_\xi$. On suppose que F_ξ est inclus dans E_ξ et que la condition suivante est réalisée :

$$(N) \quad \forall \xi, \quad \theta_\xi^{\mathfrak{U}_\xi \cap \mathfrak{U}_\xi} \subset \prod_{\xi' < \xi} F_{\xi'}.$$

Remarquons que F_ξ ne dépend pas des choix faits en 1.1 lors de la définition de θ_ξ (choix de $\bar{\sigma}$ relevant σ) et de θ_ξ^α (choix d'une racine carrée de $\theta_\xi^{2\alpha}$). Désignons par $\mathfrak{B}_\xi$ l'image de $\mathfrak{U}_\xi$ dans $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$

par l'application déduite de (9) et $N(\mathfrak{A}_\xi)$ la norme de cet idéal. On peut alors énoncer :

THEOREME 2. - L'indice de F dans E vérifie les égalités :

$$[E:F] = \frac{C_G}{[G]} \left(\prod_{\xi \neq \xi_0} N(\mathfrak{A}_\xi) \right) h = [E: \prod_{\xi} E_{\xi}] \cdot \prod_{\xi} [E_{\xi} : F_{\xi} \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}] .$$

Pour démontrer le théorème 2, nous considérerons le diagramme

$$\mathfrak{A}_{\xi} + \eta_{\xi} / \eta_{\xi} \simeq \mathfrak{A}_{\xi} / \mathfrak{A}_{\xi} \cap \eta_{\xi} \xrightarrow{p_{\xi}} F_{\xi} / F_{\xi} \cap \prod_{\xi' < \xi} F_{\xi'} \xrightarrow{q_{\xi}} E_{\xi} / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'} .$$

qui permet de définir une application $\mathfrak{A}_{\xi} \rightarrow E_{\xi} / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$. Le lemme 4 et la fin de 3.1 montrent que cette application est injective : il en résulte que p_{ξ} est un isomorphisme et que q_{ξ} est une injection.

4.2. Démontrons le lemme :

$$\text{LEMME 5. - On a } [E:F] = [E: \prod_{\xi} E_{\xi}] \prod_{\xi} [E_{\xi} : F_{\xi} \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}]$$

Démonstration : nous allons construire des bases de $(\prod_{\xi} E_{\xi}) / \{\pm 1\}$ et $(\prod_{\xi} F_{\xi}) / \{\pm 1\}$. Pour cela numérotions les caractères ξ de façon à vérifier : $\xi_i < \xi_j \Rightarrow i < j$. Ceci est compatible avec la définition de ξ_0 (§ 1). Observons qu'on a

$$E_{\xi_k} \cap \prod_{i < k} E_{\xi_i} = \prod_{\xi' < \xi_k} E_{\xi'} .$$

En effet, soit α un élément de E_{ξ_k} qui est dans $\prod_{i < k} E_{\xi_i}$. Sa norme de K à K_{ξ_k} est une puissance de α qui est dans $\prod_{\xi' < \xi_k} E_{\xi'}$. Donc d'après la prop. 2, α est dans $\prod_{\xi' < \xi_k} E_{\xi'}$. L'égalité précédente résulte immédiatement de l'inclusion ainsi démontrée. Elle permet de construire par récurrence une base de $(\prod_{i=0}^k E_{\xi_i}) / \{\pm 1\}$: ayant une base de $(\prod_{i=0}^{k-1} E_{\xi_i}) / \{\pm 1\}$, on la complète en remontant une base du $\mathbb{Z}$ -module libre $(\prod_{i=0}^k E_{\xi_i}) / \{\pm 1\}$ (cf. prop. 2) $E_{\xi_k} / \prod_{\xi' < \xi_k} E_{\xi'}$.

D'autre part, on a une suite d'inclusions :

$$F_{\xi_k} \cap \prod_{i < k} F_{\xi_i} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{i < k} E_{\xi_i} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{\xi' < \xi_k} E_{\xi'} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{\xi' < \xi_k} F_{\xi'} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{i < k} F_{\xi_i}.$$

Ces inclusions sont donc des égalités et on peut construire une base de $(\prod F_{\xi})/\{\pm 1\}$ par la même méthode que pour $(\prod E_{\xi})/\{\pm 1\}$. Remarquons que pour chaque k , les bases de $F_{\xi_k} / (\prod_{\xi' < \xi_k} F_{\xi'}) \cap F_{\xi_k}$ sont en correspondance avec celles de $\mathfrak{B}_{\xi_k}$.

L'indice $[\prod E_{\xi} : \prod F_{\xi}]$ est au signe près le déterminant de la matrice exprimant une base de $(\prod F_{\xi})/\{\pm 1\}$ dans une base de $(\prod E_{\xi})/\{\pm 1\}$. Avec les bases introduites plus haut cette matrice est triangulaire par blocs, i.e. de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & & & \\ & \boxed{} & & \\ & & \boxed{} & \\ 0 & & & \boxed{} \end{pmatrix} ;$$

son déterminant est égal au produit des déterminants des blocs ; or le $k^{\text{ième}}$ bloc, correspondant à ξ_k , est la matrice exprimant une base de $F_{\xi_k} / F_{\xi_k} \cap \prod_{\xi' < \xi_k} F_{\xi'}$ dans une base de $E_{\xi_k} / \prod_{\xi' < \xi_k} E_{\xi'}$: c'est au signe près $[E_{\xi_k} : F_{\xi_k} \cap \prod_{\xi' < \xi_k} E_{\xi'}]$. D'où le lemme.

4.3. On suppose $\xi \neq \xi_0$.

$$\text{LEMME 6. - On a : } [E_{\xi} : F_{\xi} \cap \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}] = [E_{\xi} : F_{\xi}^0 \cap \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}] \frac{N(\mathfrak{B}_{\xi})}{\prod_{\substack{p \\ p|g_{\xi}}} p^{\varphi(g_{\xi})/p-1}}.$$

Démonstration : grâce à l'injectivité de $q_{\xi} \circ p_{\xi}$, on voit que l'indice $[F_{\xi} \cap \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'} : F_{\xi}^0 \cap \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}]$ est égal à $[\mathfrak{A}_{\xi} + \eta_{\xi} : \mathfrak{A}_{\xi}^0 + \eta_{\xi}]$ i.e.

à $[\mathfrak{B}_\xi : \mathfrak{B}_\xi^0] = \frac{N(\mathfrak{B}_\xi^0)}{N(\mathfrak{B}_\xi)}$. L'idéal $\mathfrak{B}_\xi^0$ est engendré par $\prod_{p|g_\xi} (1 - \zeta_{g_\xi/p}) = \prod_{p|g_\xi} (1 - \zeta_p)$.

Sa norme est donc (cf. 2.1) $\prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}$, d'où le lemme.

4.4. Le théorème 2 résulte alors du théorème 1, des deux lemmes précédents et de (6).

§5. - APPLICATION A DIFFERENTS GROUPES

5.1. Pour chaque ξ , $\xi \neq \xi_0$, soit $\mathfrak{U}_\xi^1$ l'idéal d'augmentation de G_ξ . Rappelons d'abord que d'après [5], §8, on a :

$$\forall \xi', \xi' < \xi, \quad \theta_{\xi'}^{2N_{\xi, \xi'}} = (-1)^{\epsilon} \theta_{\xi'}^{2u} \quad (10)$$

avec $\epsilon = s(\xi') + s(\xi)g_{\xi}/g_{\xi'}$, et $u = 1$ si f_ξ et $f_{\xi'}$ ont mêmes facteurs premiers et avec $\epsilon = s(\xi)g_{\xi}/g_{\xi'}$, et $u \in \mathfrak{U}_{\xi'}^1$, sinon. Dans la suite, nous disons qu'un nombre entier est composé s'il possède au moins deux facteurs premiers distincts.

5.2. Définissons F_ξ^1 , F^1 , $\mathfrak{B}_\xi^1$ comme dans 4.1. D'après (10), on a

$$\forall \xi', \theta_{\xi'}^{\mathfrak{U}_\xi^1 \cdot N_{\xi, \xi'}} \subseteq \pm \theta_{\xi'}^{\mathfrak{U}_{\xi'}^1}$$

ce qui, compte tenu de l'égalité $\mathfrak{U}_\xi^1 \cdot \eta_\xi = \mathfrak{U}_\xi^1 \cap \eta_\xi$ prouve (N). Le théorème 2 s'applique et donne (puisque $\mathfrak{B}_\xi^1 = (1 - \zeta_{g_\xi}) \cdot \mathbb{Z}[G_\xi]$) :

COROLLAIRE 1. - On a $[E:F^1] = h \frac{C_G}{[G]} \prod_{\xi \neq \xi_0} N(\mathfrak{B}_\xi^1)$, où $N(\mathfrak{B}_\xi^1)$ est égal à 1 si g_ξ est composé et à ℓ si g_ξ est puissance d'un nombre premier ℓ .

Exemple : si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a : $[E:F^0] = 27648h$ et $[E:F^1] = 16h$. Remarquons que si G est cyclique $\prod_{\xi \neq \xi_0} N(\mathfrak{B}_\xi^1)$ vaut

[G] et on retrouve les résultats de [3] § 17 : Hasse y définit F^1 comme groupe engendré par un système explicite : pour retrouver ce système, il suffit de choisir pour chaque ξ ($\xi \neq \xi_0$) une base de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ d'où par multiplication par $1 - \zeta_{g_\xi}$ une base de $\mathfrak{B}_\xi^1$ et donc une base de $F_\xi^1 / F_\xi^1 \cap (\prod_{\xi' < \xi} F_{\xi'}^1)$. En procédant comme en 4.2, on obtient un système qui avec ± 1 engendre F^1 . Ainsi nous avons rendu canonique la construction de [3] : elle ne dépend pas du choix de la base de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ effectué pour chaque ξ .

5.3. Pour $\xi \neq \xi_0$ soit $\mathfrak{A}_\xi^2$ l'idéal $\{\alpha \in \mathbb{Z}[G_\xi] \mid \pm \theta_\xi^\alpha \in E\}$ et définissons comme dans 4.1, F_ξ^2 , F_ξ^2 , $\mathfrak{B}_\xi^2$. Posons $\ell_\xi = N(\mathfrak{B}_\xi^1) / N(\mathfrak{B}_\xi^2)$ et donnons sa valeur (comparer à [2] p. 85) :

a) si f_ξ est puissance d'un nombre premier, on a $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathfrak{A}_\xi^1$, $\mathfrak{B}_\xi^2 = \mathfrak{B}_\xi^1$, $\ell_\xi = 1$.

b) si f_ξ est composé, θ_ξ est une unité. On sait alors que

$\mathfrak{A}_\xi^{1+2\mathbb{Z}[G_\xi]}$
 θ_ξ est inclus dans E . Comme l'indice de $\mathfrak{A}_\xi^1 + 2\mathbb{Z}[G_\xi]$ dans $\mathbb{Z}[G_\xi]$ vaut 2, deux cas peuvent se produire :

i) $\theta_\xi \notin K$, d'où $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathfrak{A}_\xi^1 + 2\mathbb{Z}[G_\xi]$. Si g_ξ est composé $\mathfrak{B}_\xi^2 = \mathfrak{B}_\xi^1$ et $\ell_\xi = 1$; même résultat si g_ξ est puissance de 2. Si g_ξ est puissance d'un nombre premier impair, $\mathfrak{B}_\xi^2 = \mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ d'où $\ell_\xi = 2$.

ii) $\theta_\xi \in K$, d'où $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathbb{Z}[G_\xi]$. Si g_ξ est composé ℓ_ξ vaut 1; si g_ξ est puissance d'un nombre premier ℓ , $\ell_\xi = \ell$.

LEMME 7. - Si f_ξ est composé et g_ξ est une puissance de 2, on a

$$\frac{\mathfrak{A}_\xi^2 \cap \mathfrak{A}_{\xi'}^2}{\theta_\xi} \subset \pm \theta_{\xi'}$$

où ξ' est tel que $[K_\xi : K_{\xi'}] = 2$.

Démonstration : si f_ξ et $f_{\xi'}$ n'ont pas les mêmes facteurs premiers, la formule (10) donne :

$$\frac{N_{\xi, \xi'}}{\theta_\xi} \subseteq \pm \frac{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}{\theta_{\xi'}} \quad (11)$$

Supposons maintenant que f_ξ et $f_{\xi'}$ ont les mêmes facteurs premiers : (11) est encore vérifié si $s(\xi')$ est pair. Si $s(\xi')$ est impair, notons $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})^+$ (resp. $\mathbb{Q}(\zeta_{f_{\xi'}})^+$) le sous-corps réel maximum de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$ (resp. de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_{\xi'}})$). Le diagramme des corps

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})^+ \\ & \nearrow & \downarrow \\ K_\xi & & \mathbb{Q}(\zeta_{f_{\xi'}})^+ \\ \downarrow 2 & \nearrow s(\xi') & \\ K_{\xi'} & & \end{array}$$

prouve que $f_\xi = 2f_{\xi'}$ et que $K_\xi/K_{\xi'}$ est non ramifiée en dehors de 2. Il en est alors de même pour $K_\xi/\mathbb{Q}$, contrairement aux hypothèses du lemme. Avec ces hypothèses (11) est donc toujours vérifié. Puisque η_ξ est engendré par $N_{\xi, \xi'}$, on déduit de (11)

$$\frac{\eta_\xi \mathbb{Z}[G_\xi]}{\theta_\xi} \cap K \subseteq \left(\pm \frac{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}{\theta_{\xi'}} \right) \cap K,$$

ce qui prouve le lemme 7 d'après la définition même des idéaux $\mathfrak{u}_\xi^2$ et $\mathfrak{u}_{\xi'}^2$.

LEMME 8. - On a $\mathfrak{u}_\xi^2 \cap \eta_\xi = \mathfrak{u}_\xi^2 \cdot \eta_\xi$, sauf peut-être dans le cas où f_ξ est composé et g_ξ est puissance de 2.

Démonstration : l'assertion du lemme se voit facilement dans les cas a et b ii) définis plus haut. Dans le cas b i), $\mathfrak{u}_\xi^2$ est le noyau de l'application de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ envoyant $\sum n_\tau \cdot \tau$ (τ parcourant G_ξ) sur la classe modulo 2 de $\sum n_\tau$, si bien qu'on peut écrire un diagramme commutatif où les lignes sont des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{u}_\xi^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}[G_\xi] & \rightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{u}_\xi^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}[G_\xi] & \rightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \end{array}$$

et où les colonnes sont définies par multiplication par $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$

-cf. prop.1- ou $P_{g_\xi}(1)$. Le lemme du serpent permet d'écrire une suite exacte

$$\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z} + P_{g_\xi}(1)\mathbb{Z}) \rightarrow \mathfrak{A}_\xi^2 / \mathfrak{A}_\xi^2 \cdot \eta_\xi \rightarrow \mathbb{Z}[G_\xi] / \eta_\xi.$$

Comme $P_{g_\xi}(1)$ est la norme de $(1 - \zeta_{g_\xi})$, il n'est divisible par 2 que si g_ξ est une puissance de 2. Si ce n'est pas le cas, le groupe de gauche dans la suite exacte précédente est nul, d'où le lemme 8.

LEMME 9. - La condition (N) est vérifiée pour la famille d'idéaux
 $\mathfrak{A}_\xi = 2\mathfrak{A}_\xi^2$.

Démonstration : d'après les lemmes 7 et 8, il suffit de démontrer

$$\frac{\mathfrak{A}_\xi^2 \cdot N_{\xi, \xi'}}{\theta_\xi} \subset \pm \frac{\mathfrak{A}_{\xi'}^2}{\theta_{\xi'}} \quad (12)$$

pour tout couple de caractères ξ et ξ' tels que $K_{\xi'}$ soit inclus dans K_ξ avec $[K_\xi : K_{\xi'}]$ premier, ce que nous supposons désormais. Il résulte de (10) que (12) est vérifié dans les cas a) et b i). Dans le cas b ii) on a $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathbb{Z}[G_\xi]$ et on sait que θ_ξ est réel, donc que $s(\xi)$ est pair (cf(2)). Si f_ξ et $f_{\xi'}$ n'ont pas les mêmes facteurs premiers, $\theta_\xi^{N_{\xi, \xi'}}$ et $\theta_{\xi'}^u$ sont dans K -u comme dans (10)- et l'on déduit de (10) et du fait que K est réel

$$\frac{N_{\xi, \xi'}}{\theta_\xi} = \pm \frac{\theta_{\xi'}^u}{\theta_{\xi'}} \in \frac{\mathfrak{A}_{\xi'}^2}{\theta_{\xi'}}.$$

Si f_ξ et $f_{\xi'}$ ont les mêmes facteurs premiers, on a

$$s(\xi')/s(\xi) = (f_\xi/f_{\xi'})^{-1} (g_\xi/g_{\xi'})$$

et $s(\xi')$ est pair comme $s(\xi)$: c'est clair si $f_\xi/f_{\xi'}$ est impair ; si $f_\xi/f_{\xi'}$ est pair, puisque $[K_\xi : K_{\xi'}]$ est premier, on a forcément $[K_\xi : K_{\xi'}] = 2 = f_\xi/f_{\xi'}$, d'où $s(\xi) = s(\xi')$. De la parité de $s(\xi')$ on tire alors de (10) :

$$\frac{N_{\xi, \xi'}}{\theta_\xi} = \pm \frac{\theta_{\xi'}^u}{\theta_{\xi'}} \in (\pm \frac{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}{\theta_{\xi'}}) \cap K = \pm \frac{\mathfrak{A}_{\xi'}^2}{\theta_{\xi'}}.$$

Le lemme 9 permet d'appliquer le théorème 2 à la famille $F_{\xi} = \pm \theta_{\xi}^{2\mathfrak{A}_{\xi}^2} (\xi \neq \xi_0)$, $F_{\xi_0} = \pm 1$ de sous-groupes des groupes E_{ξ} . En extrayant alors les racines carrées on obtient :

$$\text{COROLLAIRE 2. - } \underline{\text{On a}} \quad [E:F^2] = \frac{C_G}{[G]} \cdot h \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} \frac{N(\mathfrak{A}_{\xi}^1)}{\ell_{\xi}}.$$

Remarquons que si G est cyclique on peut écrire les résultats sous la forme :

$$[E:F^2] = \prod_{\xi} [E_{\xi} : F_{\xi}^2 \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}] = \frac{h}{\prod_{\xi \neq \xi_0} \ell_{\xi}}.$$

On obtient ainsi la divisibilité de h par $\prod_{\xi \neq \xi_0} \ell_{\xi}$: ce résultat est une conséquence de la théorie des genres.

5.4. Dans [2] G. Gras considère l'idéal $\mathfrak{A}_{\xi}^3 = \{\alpha \in \mathbb{Z}[G_{\xi}] \mid \pm \theta_{\xi}^{\alpha} \in E_{\xi}\}$, et suppose G cyclique. Le théorème 2 s'applique sans cette restriction : les résultats sont alors similaires à ceux de 5.3 en remplaçant la condition $\theta_{\xi} \in K$ (resp. $\theta_{\xi} \notin K$) par $\theta_{\xi} \in K_{\xi}$ (resp. $\theta_{\xi} \notin K_{\xi}$). En plus par rapport à [2] nous avons une formule pour l'indice de F^3 (défini comme dans 4.1) dans E , tout à fait analogue au corollaire 2. On peut remarquer que lorsque G est cyclique, il résulte du lemme 2' que pour tout ξ les idéaux $\mathfrak{A}_{\xi}^2$ et $\mathfrak{A}_{\xi}^3$ sont égaux.

5.5. Si on pose $h_{\xi}^i = [E_{\xi} : F_{\xi}^i \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}]$ pour $i = 0, 1, 3$, alors on peut écrire une formule comparable à [5], §9 satz 21, c'est-à-dire de la forme

$$h = \frac{Q'_K}{Q_G^i} \prod_{\xi} h_{\xi}^i$$

avec $Q'_K = [E : \prod E_{\xi}]$ (c'est un diviseur de l'indice Q_K^+ de [5] ; $Q'_K = 1$ si G est cyclique) et Q_G^i coefficient ne dépendant pour $i = 0, 1, 3$ que de la structure du groupe G . De plus h_{ξ}^i (i fixé) est une fonction du couple (K, ξ) qui ne dépend que de K_{ξ} si $i = 0, 1$ ou 3 .

§ 6. - LOCALISATION

Soit ℓ un nombre premier et décomposons G en un produit d'un ℓ -groupe Γ par un groupe Δ d'ordre premier à ℓ . Choisissons une valeur absolue dans une clôture algébrique Ω_ℓ de $\mathbb{Q}_\ell$ telle qu'on ait $|\ell| = 1/\ell$. Soit ϕ un caractère de Δ défini et irréductible sur $\mathbb{Q}_\ell$, ϕ non trivial, d la dimension de ϕ et

$$e_\phi = \frac{1}{[\Delta]} \sum_{\sigma \in \Delta} \phi(\sigma-1)\sigma$$

l'idempotent de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ correspondant. Désignons par ϕ^* le caractère de G induit par ϕ .

Pour chaque idéal premier $\mathfrak{q}$ de K au-dessus de ℓ , désignons par $U_\mathfrak{q}$ le groupe des unités du complété correspondant $K_\mathfrak{q}$ de K , qui sont congrues à 1 modulo le complété de $\mathfrak{q}$. Soit U le produit des groupes $U_\mathfrak{q}$. Considérons (pour $i = 0, 1, 2, 3$) l'intersection de U et de l'image de F^i par l'application diagonale $K \rightarrow \prod_{\mathfrak{q}|\ell} K_\mathfrak{q}$. Désignons par $\overline{C}_1$ sa fermeture dans U muni de la topologie produit. On sait que $U/\overline{C}_1$ est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module. Si χ est un caractère de G intervenant dans la décomposition de ϕ^* en caractères absolument irréductibles sur Ω_ℓ (on écrit $\chi|\phi^*$), notons $L_\ell(s, \underline{\chi})$ la fonction L ℓ -adique associée au caractère de Dirichlet primitif $\underline{\chi}$ défini par χ (cf. [4]). D'après [1], le groupe $e_\phi(U/\overline{C}_0)$ est fini d'ordre

$$[e_\phi(U/\overline{C}_0)] = (N_\Gamma)^d \left| \prod_{\chi|\phi^*} \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1}.$$

THEOREME 3. - Pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$[e_\phi(U/\overline{C}_i)] = (C_\Gamma)^d \left| \prod_{\chi|\phi^*} \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1}.$$

Si Γ est cyclique C_Γ vaut 1 et on retrouve le résultat de [1], § 5.

Démonstration : soit ξ un caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Observons d'abord que si Φ ne figure pas dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_\ell$ de la restriction de ξ à Δ on a (Δ opérant sur $\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi$ via $\mathbb{Z}[\Delta] \hookrightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G_\xi] \rightarrow \mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi$) :

$$e_\Phi((\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi) \otimes \mathbb{Z}_\ell) = 0. \quad (13)$$

Supposons maintenant que Φ intervienne dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_\ell$ de la restriction de ξ à Δ . Soit g'_ξ le plus grand diviseur de g_ξ premier à ℓ . On voit alors que la restriction de ξ à Γ est égale à $\varphi(g'_\xi)$ fois un caractère λ de Γ défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Notons g_λ l'indice de $\ker \lambda = \{\sigma \in \Gamma \mid \lambda(\sigma) = \lambda(1)\}$ dans Γ ; g_λ est la plus grande puissance de ℓ divisant g_ξ . De plus ξ est caractérisé par λ . Soit χ un facteur de la décomposition de ξ sur $\mathbb{Q}_\ell$; χ permet de définir un isomorphisme

$$e_\Phi((\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi) \otimes \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell[\zeta_{g_\xi}]; \quad (14)$$

à un élément $e_\Phi(\bar{\alpha} \otimes 1)$ avec $\bar{\alpha}$ appartenant à $\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi$, on associe $\chi(\alpha)$ où α est un élément d'image $\bar{\alpha}$ par la surjection composée

$$\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G_\xi] \rightarrow \mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi.$$

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème 3, en notant que l'on peut supposer Γ non trivial (sinon $N_\Gamma = C_\Gamma = 1$). Il suffit de montrer que $e_\Phi((F_1/F_0) \otimes \mathbb{Z}_\ell)$ est d'ordre $(N_\Gamma/C_\Gamma)^{d_\Gamma}$. Or en raisonnant comme en 4.2 et 4.3, on voit qu'on a :

$$[e_\Phi((F_1/F_0) \otimes \mathbb{Z}_\ell)] = \prod_{\xi} [e_\Phi((\mathfrak{A}_\xi^1 + \eta_\xi)/(\mathfrak{A}_\xi^0 + \eta_\xi)) \otimes \mathbb{Z}_\ell].$$

D'après (13), on peut se restreindre aux caractères ξ tels que Φ intervienne dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_\ell$ de leur restriction à Δ . On utilise alors l'isomorphisme (14) : $e_\Phi((\mathfrak{A}_\xi^1 + \eta_\xi) \otimes \mathbb{Z}_\ell)$ est envoyé sur l'idéal de $\mathbb{Z}_\ell[\zeta_{g_\xi}]$ engendré par $1 - \zeta_{g_\xi}$; mais Φ étant non trivial cet idéal est $\mathbb{Z}_\ell[\zeta_{g_\xi}]$ lui-même. Pour $e_\Phi((\mathfrak{A}_\xi^i + \eta_\xi) \otimes \mathbb{Z}_\ell)$ avec $i = 2$ ou 3 ,

le résultat est similaire. Par l'isomorphisme (14), $e_{\mathbb{F}}((\mathfrak{A}_{\xi}^0 + \eta_{\xi}) \otimes \mathbb{Z}_{\ell})$ est envoyé sur l'idéal de $\mathbb{Z}_{\ell}[\zeta_{g_{\xi}}]$ engendré par $\prod_{p|g_{\xi}} (1 - \zeta_p)$ donc aussi

par $1 - \zeta_{\ell}$ (par 1 si λ est trivial). Comme le degré de $\mathbb{Q}_{\ell}[\zeta_{g_{\xi}}]$ sur $\mathbb{Q}_{\ell}$ est $d \cdot \varphi(g_{\lambda})$, la norme de $1 - \zeta_{\ell}$ (si λ est non trivial) est égale à la puissance $d \cdot \varphi(g_{\lambda}) / (\ell - 1)$ de ℓ . On a donc :

$$[e_{\mathbb{F}}(F_1/F_0) \otimes \mathbb{Z}_{\ell}] = \left(\prod_{\lambda} \ell^{\varphi(g_{\lambda})/(\ell-1)d} \right)$$

où dans le produit, λ parcourt l'ensemble des caractères non triviaux de Γ définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Ceci achève la démonstration du théorème en vertu de (6).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. GILLARD - Unités cyclotomiques et unités semi-locales. Séminaire de théorie des Nombres de Grenoble, 28 avril 1977.
- [2] G. GRAS - Application de la notion de φ -objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes. Fac. Sc. de Besançon théorie des nombres. Fasc. 2 (75-76).
- [3] H. HASSE - Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Akademie Verlag Berlin 1952.
- [4] K. IWASAWA - Lectures on p-adic L functions. Ann. Math. Studies 74, Princeton Univ. Press.
- [5] H. LEOPOLDT - Über Einheitgruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper. Abh. Deutschen Akad. Wiss. Berlin 2 (1954).