SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

JEAN-RENÉ JOLY

Formules sommatoires, distributions périodiques et applications arithmétiques, I

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 5 (1975-1977), exp. nº 4, p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1975-1977__5__A4_0>

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1975-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de Théorie des Nombres
1976-1977
Grenoble

FORMULES SOMMATOIRES, DISTRIBUTIONS PERIODIQUES ET APPLICATIONS ARITHMETIQUES, I

par

Jean-René JOLY

[Cette rédaction regroupe plusieurs exposés faits au Séminaire de Théorie des Nombres (Grenoble, 8 et 15 avril 1976, 14 avril et 5 mai 1977) et au Groupe de travail de Théorie multiplicative des Nombres (Grenoble, octobre 1976, avril-mai 1977).]

1. INTRODUCTION

1.1. - Objet de ce travail : donner une présentation systématique de la notion de formule sommatoire. Une telle présentation possède divers avantages :

i) elle rend naturels l'énoncé et la démonstration des formules classiques (Abel, Poisson, Euler-Maclaurin) et la définition des outils correspondants (fonctions sommatoires ; nombres, polynômes et fonctions de Bernoulli) ; c'est un avantage pédagogique...

ii) elle suggère une définition canonique des nombres, polynômes et fonctions de Bernoulli associés à un caractère de Dirichlet, ou, plus généralement, à une suite périodique, et elle permet de démontrer instantanément les formules de Poisson et d'Euler-Maclaurin périodiques à partir des formules classiques correspondantes ;

iii) elle élimine, dans l'écriture de ces formules, un certain nombre de phénomènes parasites : non-invariance par $x \mapsto -x$ (Abel), apparition de termes du type $\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$ (Poisson, Euler-Maclaurin), mauvaise numérotation ou mauvaise signature des nombres de Bernoulli ordinaires, définition non canonique des $b_r(\chi)$ ou des $\mathcal{B}_r(x,\chi)$, etc...

iv) elle suggère enfin une interprétation des formules sommatoires périodiques en termes de <u>distributions périodiques</u>, et permet ainsi de replacer leur énoncé et leur démonstration dans le bon cadre : <u>l'analyse de Fourier sur</u> $\mathbf{R}$.

1.2. - <u>Origine de ce travail</u> : une tentative pour comprendre et généraliser le mécanisme de divers calculs de sommes du type $\sum \chi(n)f(n)$ (χ : caractère de Dirichlet) à l'aide de développements en série de Fourier, notamment dans la subtile démonstration de l'inégalité de Pólya ([24] , ou [16] , chap.4). L'explication cherchée étant <u>grosso modo</u> la suivante :

si $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une suite k-périodique (par exemple un caractère de Dirichlet mod k) et si $\hat{\lambda} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est la suite k-périodique des coefficients de Fourier de λ , alors on a, dans l'espace des distributions k-périodiques sur $\mathbf{R}$, la double égalité suivante (avec $b_0(\lambda) = \hat{\lambda}(0)$, $0^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli associé à λ) :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda(n)\,\delta(x-n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(n)\,e^{2\pi inx/k} = b_0(\lambda) - \mathcal{B}_1'(x,\lambda) \ .$$

$\mathcal{B}_1'(x,\lambda) = -\sum_{n\neq 0} \hat{\lambda}(n)\,e^{2\pi inx/k}$ désigne la dérivée au sens des distributions de $\mathcal{B}_1(x,\lambda)$, $1^{\text{ère}}$ fonction de Bernoulli associée à λ . La première égalité est la formule de Poisson périodique (en termes de distributions) ; la seconde donne la formule d'Euler-Maclaurin périodique après un certain nombre d'intégrations par parties ; elle implique immédiatement les développements de Fourier

$$\mathcal{B}_r(x,\lambda) = -r\,! \sum_{n\neq 0} \hat{\lambda}(n)\,\frac{e^{2\pi inx/k}}{(2\pi in/k)^r} \ .$$

Noter (puisque $b_0(\lambda) = k^{-1}\sum_{h=1}^{k} \lambda(h)$) que $\mathcal{B}_1'(x,\lambda)$ mesure tout

simplement l'écart entre "λ fois Dirac" (discrète, de masse moyenne $b_o(\lambda)$) et "$b_o(\lambda)$ fois Lebesgue" (qui en est une approximation continue et homogène, également de masse moyenne $b_o(\lambda)$) . En d'autres termes, $\mathcal{B}'_1(x,\lambda)$ mesure l'écart entre une somme discrète et sa meilleure approximation par une somme continue (= une intégrale définie) dans une formule du type

$$\sum_a^b \lambda(n) f(n) = \text{coeff.} \int_a^b f(x)\,dx + \text{reste}.$$

Ce type d'explication est également valable pour des formules sommatoires telles que celles de Voronoï (à ce sujet, voir par exemple [3] , pp. 21-23) ; on y reviendra dans une prochaine rédaction [20] .

1.3. - <u>Lien avec d'autres travaux récents</u> ; <u>applications</u> : les <u>formules de Poisson</u> et <u>d'Euler-Maclaurin périodiques</u> ont été obtenues simultanément par Berndt, Rosser, Schoenfeld et l'auteur ([4] , [7] , [18] , [19] , [25]). Elles permettent de redémontrer et de généraliser de façon simple et élégante une foule de résultats relatifs aux restes et non-restes quadratiques, aux sommes de caractères, aux séries L de Dirichlet, aux fonctions zêta de Kronecker avec caractère, etc... A ce sujet, voir les références ci-dessus, ainsi que [5] , [6] , et le §7 ci-après. Les <u>nombres de Bernoulli</u> et les <u>polynômes de Bernoulli avec caractère</u> apparaissent dans la théorie des séries L p-adiques de Leopoldt-Iwasawa-Fresnel : voir à ce sujet le rapport d'Iwasawa et le récent livre de Lang ([17] ; [22] , notamment chap.13-14 et bibliographie). Les formules sommatoires de Voronoï ont été étudiées en détail par Berndt ([3] , et sa bibliographie) : on y reviendra (du point de vue adopté ici) dans [20] . Indiquons enfin que certains des calculs faits ici, et aussi dans [20] (notamment ceux suggérés par le chap.20, §§ 3-4, de [21]) recoupent une remarque faite par Weil dans son récent livre ([29] , chap. 6-7) sur l'utilisation des distributions dans la sommation des séries de Kronecker.

2. FORMULES SOMMATOIRES NORMALISEES

Soit f une fonction complexe d'une variable réelle x, définie sur un intervalle I, et soient a, b $(a<b)$ deux éléments de I. L'idée de base des formules sommatoires classiques est d'approcher une somme discrète $S(f)$ du type $\sum_{n=a}^{b} f(n)$ par une somme continue $R(f)$ du type $\int_a^b f(x)\,dx$, et plus précisément d'écrire une égalité du type

$$S(f) = R(f) + \sum_{\nu} R_{\nu}(f) , \tag{1}$$

avec des termes de reste $R_{\nu}(f)$ faciles à évaluer, individuellement ou globalement. Exemple : la formule de Poisson

$$\sum_{n=a}^{b}{}' f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b 2 f(x) \cos 2\pi\nu x \, dx , \tag{2}$$

valable (sous cette forme) pour f continue et à variations bornées. (Le signe $\sum'$ indique que si a ou b est entier, le terme $f(n)$ correspondant doit être affecté du coefficient $\frac{1}{2}$; cf. [10], pp.15-16).

Une formule du type (1) appelle une série de remarques.

2.1. - Une telle formule est en général valable pour toute f appartenant à un sous-espace vectoriel $\mathfrak{F}$ convenable de l'espace des fonctions complexes sur I ; $S(f)$, $R(f)$ et les $R_{\nu}(f)$ sont alors des formes $\mathbb{C}$-linéaires sur $\mathfrak{F}$. (Dans (2), par exemple, $\mathfrak{F}$ est l'espace des fonctions continues et localement à variations bornées sur I.)

2.2. - Si $\mathfrak{F}$ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ convenable (plus forte à la fois que celle de la convergence simple et que celle de la convergence L^1 locale), les formes linéaires $S(f)$, $R(f)$ et $R_{\nu}(f)$ sont continues. (Dans (2), par exemple, il est raisonnable de choisir pour $\mathcal{T}$ la topologie de la convergence uniforme locale, c'est-à-dire sur tout compact.) On dira que $\mathcal{T}$ est adaptée à (1). On peut cependant remarquer que l'écriture et la validité de (1) sont indépendantes de toute topologie sur $\mathfrak{F}$. D'où un pre-

mier principe de démonstration de formules telles que (1) :

(P_1) On choisit une famille $\mathcal{G}$ de fonctions de $\mathcal{F}$ et une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{T}$ <u>soit adaptée</u> à (1) (et plus précisément, si les $R_\nu(f)$ sont en nombre infini, que le <u>second membre de</u> (1) <u>soit continu en</u> f <u>pour</u> $\mathcal{T}$), que les combinaisons linéaires des fonctions de $\mathcal{G}$ forment un <u>sous-espace de</u> $\mathcal{F}$ <u>dense pour</u> $\mathcal{T}$, et que la formule (1) soit <u>valable pour toute</u> $f \in \mathcal{G}$. <u>Alors</u> (1) <u>est valable pour toute</u> $f \in \mathcal{F}$.

2.3. - Dans la formule (1), la fonction f n'intervient que par sa restriction aux intervalles de la forme $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$; d'où un nouveau principe évident :

(P_2) Pour démontrer une formule du type (1), il suffit de la démontrer pour f <u>à support compact</u>.

2.4. - Les divers termes de (1) dépendent non seulement de f , mais aussi de l'intervalle de sommation $[a,b]$: si (1) est bien écrite, chaque terme doit être <u>fonction additive de</u> $[a,b]$. (Ainsi, (2) est bien écrite : elle ne le serait pas si son premier membre était $\sum_{n=a}^{b} f(n)$, sans accent.) D'où un nouveau principe :

(P_3) Pour démontrer une formule (bien écrite) du type (1), il suffit (par partage arbitrairement fin de $[a,b]$) de la démontrer <u>localement</u>. On peut par exemple se borner à envisager des intervalles du type $[n,n+\varepsilon]$, $[n-\varepsilon,n]$ et $[n+\varepsilon,n+1-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<\frac{1}{2})$.

Noter que si $\mathcal{F}$ est l'espace des fonctions m fois continûment dérivables $(0 \leq m \leq \infty)$, l'existence de <u>partitions</u> C^∞ <u>de l'unité arbitrairement fines</u> fait de (P_3) une conséquence de (P_1) ou de (P_2) .

2.5. - Certaines formules sommatoires (Abel, Euler-Maclaurin et Poisson périodiques, Voronoï) ont un premier membre $S(f)$ avec coefficients, de la forme $\sum_{n=a}^{b} \lambda(n) f(n)$, où $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une suite à valeurs complexes ; les termes du second membre, tels que $R(f)$ et $R_\nu(f)$, dépendent alors également de λ , et, si la formule est bien écrite, chacun d'eux en dépend linéairement. D'où un dernier principe :

(P_4) Pour démontrer une formule (bien écrite) du type

$$S(f,\lambda) = R(f,\lambda) + \sum_\nu R_\nu(f,\lambda) \ , \tag{3}$$

valable pour toute suite $\lambda \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ = un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$), il suffit de la démontrer sur une base de $\mathcal{S}$.

Ajoutons une remarque d'un autre ordre : dans les applications des formules sommatoires à la Théorie des Nombres, les fonctions f envisagées sont généralement analytiques par morceaux (donc de la classe de Dirichlet, donc a fortiori localement à variations bornées), ou même tout simplement analytiques (donc de classe $\mathcal{C}^m$ pour tout $m \geq 0$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$) . Dans ce qui suit, on prendra le plus souvent $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ (les fonctions localement à variations bornées), ou $\mathcal{F} = \mathcal{C}^m$, $0 \leq m \leq \infty$. On aura donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, et toute $f \in \mathcal{F}$ sera différence de deux fonctions monotones, donc intégrable au sens de Riemann, et munie de limites à droite et à gauche $f(x^+)$ et $f(x^-)$ en tout $x \in I$. Si alors on veut écrire une formule sommatoire ayant un premier membre du type $\sum_{n=a}^{b} \lambda(n) f(n)$, on sera amené (cf. §2.4 et 2.5) à normaliser ce premier membre en l'écrivant

$$S(f,\lambda\,;a,b) = \sum_a^{b}{}' \lambda(n) f(n) \tag{4}$$

avec les deux conventions suivantes (indiquées par l'accent) :

(C_1) Si $a < n < b$, et si f est discontinue en n , $f(n)$ signifie $\frac{1}{2}[f(n^+) + f(n^-)]$;

(C_2) Si a (ou b) est <u>entier</u>, et si $n = a$ (ou b), $f(n)$ signifie $\frac{1}{2}f(a^+)$ (ou $\frac{1}{2}f(b^-)$) .

Moyennent ces deux conventions, $S(f,\lambda\,;a,b)$ est <u>fonction additive de</u> $[a,b]$ (bien entendu, la convention (C_1) est vide si f est continue). Cela étant :

DEFINITION 1. - Nous appellerons <u>formule sommatoire normalisée</u> toute formule sommatoire du type

$$S(f,\lambda\,;a,b) = R(f,\lambda\,;a,b) + \sum_{\nu} R_{\nu}(f,\lambda\,;a,b) \qquad (5)$$

ayant la propriété suivante : chaque terme du second membre est <u>linéaire par rapport à</u> f , <u>linéaire par rapport à</u> λ , et <u>fonction additive de</u> $[a,b]$.

Dans ce qui suit, nous allons écrire sous forme normalisée les formules sommatoires usuelles (§ 3), puis en déduire (par ($P_{3,4}$)), les formules sommatoires de Poisson et d'Euler-Maclaurin <u>périodiques</u> (§ 4) en introduisant les <u>fonctions de Bernoulli périodiques</u> ; aux §§ 5-6, nous reprendrons tout ceci en termes de <u>distributions périodiques</u>, et nous appliquerons ce point de vue à <u>l'interprétation intuitive</u> et au <u>développement en série de Fourier</u> des fonctions de Bernoulli périodiques. Enfin (§ 7) , nous terminerons en indiquant un certain nombre d'applications et de prolongements des idées et résultats des §§ 2-6.

3. FORMULES SOMMATOIRES CLASSIQUES : POISSON, ABEL, EULER-MACLAURIN

3.1. - <u>Préliminaires</u> : dans tout ce qui suit, nous utiliserons les conventions suivantes : $H(x)$ désignera la fonction de Heaviside, égale à 0 , $\frac{1}{2}$ ou 1 selon que $x < 0$, $x = 0$ ou $x > 0$; si $a < b$, $\pi_a^b(x)$ dési-

gnera la fonction égale à 0 , $\frac{1}{2}$ ou 1 selon que $x \notin [a,b]$, $x = a$ ou b , ou $a < x < b$; noter que

$$\pi_a^b(x) = H(x-a) - H(x-b) \ . \tag{7}$$

$[x]$ signifiera <u>partie entière de</u> x ; $\beta(x)$ désignera la fonction égale à 0 ou $[x]-\frac{1}{2}$ selon que x est entier ou non entier. D'autre part, les notations $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ et $\sum_{n=-N}^{N}{}^{*}$ signifieront respectivement $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}$ et $\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N}$. On a alors le lemme suivant :

LEMME 3.1.1. - <u>Pour tout</u> x <u>réel</u>,

$$\beta(x) = -\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in} \ . \tag{8}$$

<u>Démonstration</u> : la méthode la plus simple consiste à remarquer que $\beta(x)$ (1-périodique) est partout égale à sa série de Fourier, et à calculer les coefficients de ladite série à l'aide d'une intégration par parties. Voici une autre méthode, indépendante de la théorie des séries de Fourier : posons $E_N(x) = \sum_{-N}^{N}{}^{*} \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in}$; pour x <u>entier</u>, on a $E_N(x) = 0 = \beta(x)$: il n'y a donc rien à prouver ; pour x <u>non entier</u>, un argument de périodicité (et de symétrie par rapport à la valeur $x = \frac{1}{2}$) montre qu'<u>on peut se limiter à</u> $0 < x \leq \frac{1}{2}$: mais on a évidemment

$$\frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in} - \frac{e^{2\pi in(1/2)}}{2\pi in} = \int_{1/2}^{x} e^{2\pi int}\,dt$$

pour tout $n \neq 0$, d'où, par sommation de $-N$ à N ,

$$E_N(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt - \int_{1/2}^{x} dt \ ,$$

ou encore

$$E_N(x) + \beta(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt \ . \tag{8'}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $N \to \infty$ (Riemann-Lebesgue ; on

a supposé $0 < x \leq \frac{1}{2}$) ; d'où

$$\beta(x) = - \lim_{N\to\infty} E_N(x) = - \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in} ,$$

c'est-à-dire l'égalité (8) à démontrer. ∎

La démonstration de (8) par l'intermédiaire de (8') a un avantage : toujours sous l'hypothèse $0 < x \leq \frac{1}{2}$, on peut appliquer au second membre de (8') la <u>seconde formule de la moyenne</u>

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(a) \int_a^{\xi} g(t)\,dt$$

([28] , pp.94-95) avec $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$, $a = x$ et $b = \frac{1}{2}$; (8') mène alors à

$$\left| - \sum_{-N}^{N}{}^{*} \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in} - \beta(x) \right| \leq \frac{1}{2\pi M\|x\|} , \qquad (8'')$$

valable pour tout x <u>non entier</u> avec la notation $\|x\|$ = <u>distance de</u> x <u>à l'entier le plus proche</u>. (8") montre en particulier que <u>dans</u> (8) , <u>la convergence de la série vers</u> $\beta(x)$ <u>est uniforme sur tout compact ne contenant aucun entier</u>.

3.2. - <u>Formule de Poisson classique</u> : son écriture normalisée est la suivante (valable pour f à variations bornées sur $[a,b]$) :

$$\sum_a^{b}{}' f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f(x)\, e^{2\pi i\nu x}\, dx . \qquad (9)$$

<u>Démonstrations</u> : (i) Poser $f_1(x) = \pi_a^b(x) f(x)$, puis $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_1(x+n)$ (somme localement finie ; $F(x)$ est la <u>série de Poisson de</u> f_1 : voir § 5); développer $F(x)$ (1-périodique et à variations bornées) en série de Fourier; enfin faire $x = 0$ et noter que $F(0) = \sum_a^b{}' f(n)$. ∎

(ii) Pour $a \leq n < n+1 \leq b$, développer en <u>série de Fourier</u> la fonction 1-périodique égale à $f(x)$ pour $n < x < n+1$; faire $x = 0$ (d'où

$$\frac{1}{2}[f(n)+f(n+1)] = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\, e^{2\pi i\nu x}\, dx) \ ;$$

enfin, sommer sur n (en faisant attention aux extrémités a et b). ∎

[(i) et (ii) sont les démonstrations habituelles : [25], chap.3, et [10], pp.15-16 ; (ii) est essentiellement une démonstration <u>locale</u> utilisant (P_3).]

3.3. - <u>Formule d'Abel</u> : soit $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une suite complexe, et notons Λ une <u>primitive</u> de λ, c'est-à-dire une fonction constante sur tout intervalle du type $]n,n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$ et telle que

$$\Lambda(n^+) - \Lambda(n^-) = \lambda(n) \ , \quad \Lambda(n) = \frac{1}{2}[\Lambda(n^+) + \Lambda(n^-)] \ , \tag{11}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit par ailleurs f une fonction <u>de classe</u> C^1 sur $[a,b]$. L'écriture normalisée de la formule d'Abel est alors la suivante :

$$\sum_a^b{}' \lambda(n) f(n) = [\Lambda(x) f(x)]_a^b - \int_a^b \Lambda(x) f'(x)\, dx \ . \tag{12}$$

<u>Démonstrations</u> : (i) Utiliser la théorie de l'<u>intégrale de Stieltjès</u> et effectuer une intégration par parties. ∎

(ii) Effectuer une <u>transformation d'Abel</u>. ∎

(iii) Voici une démonstration de (12) par <u>localisation</u>, c'est-à-dire utilisant (P_3) ; il suffit de prouver (12), de la forme

$$S = R_1 - R_2 \ , \tag{12'}$$

pour un intervalle $[a,b]$ contenant au plus un entier ; supposons donc par exemple $a = n-\varepsilon$, $b = n+\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$; on a alors $\Lambda(b) = \Lambda(n^+)$, $\Lambda(a) = \Lambda(n^-)$, d'où (puisque $\Lambda(n^+) = \Lambda(n^-) + \lambda(n)$)

$$R_1 = \lambda(n) f(b) + \Lambda(n^-)[f(b) - f(a)] \ ,$$

$$R_2 = \int_a^n \Lambda(n^-) f'(x) dx + \int_n^b \Lambda(n^+) f'(x) dx = \Lambda(n^-)[f(b)-f(a)] + \lambda(n)[f(b)-f(n)] \ ,$$

et par conséquent

$$R_1 - R_2 = \lambda(n) f(n) = S \ :$$

(12') se trouve ainsi démontrée. ∎

3.4. - Formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre 1 : son écriture normalisée est la suivante (valable pour f de classe C^1 sur $[a.b]$) :

$$\sum_a^{b}{}' f(n) = \int_a^b f(x)\,dx - [\beta(x) f(x)]_a^b + \int_a^b \beta(x) f'(x)\,dx \ . \tag{14}$$

Démonstrations : (i) A partir de la formule de Poisson (9) : isoler le terme correspondant à $\nu = 0$ (dans le membre de droite), soit $\int_a^b f(x)dx$; effectuer sur chaque terme avec $\nu \neq 0$ une intégration par parties :

$$\int_a^b f(x)\, e^{2\pi i\nu x} dx = \left[\frac{e^{2\pi i\nu x}}{2\pi i\nu} f(x)\right]_a^b + \int_a^b \left(-\frac{e^{2\pi i\nu x}}{2\pi i\nu}\right) f'(x)\,dx \ ;$$

sommer ensuite sur $\nu \neq 0$, en remarquant que la série du membre de droite de (8) a des sommes partielles bornées, d'où (par le théorème de la convergence bornée)

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{*} \int_a^b \left(-\frac{e^{2\pi i\nu x}}{2\pi i\nu}\right) f'(x)dx = \int_a^b \beta(x) f'(x)\,dx \ ;$$

et regrouper enfin le terme avec $\nu = 0$ et la somme des termes avec $\nu \neq 0$. ∎

(ii) A partir de la formule d'Abel (12) : le premier membre de (14) est un cas particulier du premier membre de (12), λ étant la suite constante égale à 1 . On peut appliquer (12) avec $\Lambda(x) = [x] + \frac{1}{2} = x - \beta(x)$, ce qui donne

$$\sum_a^{b}{}' f(n) = [x f(x)]_a^b - [\beta(x) f(x)]_a^b - \int_a^b x f'(x)\,dx + \int_a^b \beta(x) f'(x)\,dx \ ; \tag{15}$$

une intégration par parties donne par ailleurs

$$\int_a^b x f'(x)\,dx = [x f(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx \ , \tag{16}$$

et il suffit de porter (16) dans (15) pour obtenir (14). ∎

(iii) Exercices suggérés : démontrer (15) par localisation (cf. (P_3)) ou par linéarité par rapport à λ (cf. (P_4)) : prendre pour $\mathcal{S}$ l'espace des suites nulles hors de $[a-\varepsilon\ ,\ b+\varepsilon]$, et normaliser les primitives de manière que $\lambda \mapsto \Lambda$ soit linéaire, par exemple en choisissant

$$\Lambda(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda(n)\, H(x-n)) \ . \ \blacksquare$$

3.5. - Formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre m : la formule (14) contient un terme $\int_a^b \beta(x) f'(x)\, dx$: si on veut transformer ce terme par intégration par parties répétée, il est raisonnable d'introduire une suite de fonctions $(\mathcal{B}_r)_{r\geq 1}$ ayant les propriétés suivantes :

(a) $\mathcal{B}_1(x) = \beta(x)$ (cf. 3.1) ;

(b) pour tout $r \geq 2$, $\mathcal{B}_r(x)$ est continue et 1-périodique ;

(c) pour tout $r \geq 2$, $\mathcal{B}_r(x)$ est (à peu près) une primitive de $\mathcal{B}_{r-1}(x)$; en pratique, pour simplifier l'écriture des formules, on impose

$$\mathcal{B}_r'(x) = r\,\mathcal{B}_{r-1}(x) \ .$$

Si alors f est de classe C^m $(m \geq 1)$ sur $[a,b]$, une succession de $m-1$ intégrations par parties donne (à partir de (14)) la formule d'Euler-Maclaurin (normalisée) à l'ordre m :

$$\sum_a^b{}' f(n) = \int_a^b f(x)\, dx + \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^r}{r!} \Big[\mathcal{B}_r(x)\, f^{(r-1)}(x)\Big]_a^b + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_a^b \mathcal{B}_r(x)\, f^{(r)}(x)\, dx \ . \tag{18}$$

3.6. - Nombres, polynômes et fonctions de Bernoulli (rappels) : $\mathcal{B}_r(x)$ est la $r^{\text{ième}}$ fonction de Bernoulli. Si on se limite à l'intervalle ouvert $]0,1[$, et si on note $B_r(x)$ la restriction de $\mathcal{B}_r(x)$ à cet intervalle, on a $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, et on voit (par récurrence, en utilisant (a) et (c)) que $B_r(x)$ est un polynôme unitaire de degré r pour tout $r \geq 1$: c'est le $r^{\text{ième}}$ po-

lynôme de Bernoulli. Il se calcule de la façon suivante :

• On pose $b_o = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$ (d'où $B_1(x) = b_o x + b_1$) ; la relation (17) (avec $r = 2$, 3 ,...) donne alors $B_2(x) = b_o x^2 + 2b_1 x + b_2$, $B_3(x) = b_o x^3 + 3b_1 x^2 + 3b_2 x + b_3$,... ou, plus généralement, et avec $C_r^j = r!/j!(r-j)!$,

$$B_r(x) = \sum_{j=0}^{r} C_r^j b_j x^{r-j} . \tag{19}$$

Il reste à déterminer les constantes d'intégration successives $b_2, b_3, \ldots,$ qui sont par définition les nombres de Bernoulli (notation de Bourbaki [9]) : ceci se fait à l'aide de (b) , en écrivant $b_r = B_r(0) = B_r(1)$, soit (cf. (19))

$$\sum_{j=0}^{r} C_r^j b_j = b_r ,$$

ou encore, avec une notation symbolique évidente,

$$(1+b)_r = b_r . \tag{20}$$

Faisant $r = 3, 4, 5, \ldots,$ on obtient ainsi successivement $b_r = \frac{1}{6}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\frac{1}{30}$,... ce qui donne les $B_r(x)$ et les $\mathcal{B}_r(x)$ correspondants (par (19)).

Rappelons les deux propriétés les plus importantes des b_r et des $\mathcal{B}_r(x)$:

• Les b_r sont (à peu près) les coefficients de Taylor de $x/(e^x - 1)$; plus précisément, on a

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_r}{r!} x^r . \tag{21}$$

Démonstration (indications) : appeler $g(x)$ le membre de gauche de (21) , et définir provisoirement les b_r à l'aide de (21) ; écrire alors $(e^x-1)g(x) = x$, et égaler les termes de degré 0 , 1 , et $r \geq 2$: on trouve respectivement $b_o = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, et la relation (20). ∎

- Le développement de Fourier des $\mathcal{B}_r(x)$ est donné par

$$\mathcal{B}_r(x) = -r\,!\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*}\frac{e^{2\pi i\nu x}}{(2\pi i\nu)^r} \quad . \tag{22}$$

Démonstration (indications) : c'est vrai pour $\mathcal{B}_1(x) = \beta(x)$ (lemme 3.1); c'est également vrai pour $\mathcal{B}_2(x)$: intégration terme à terme avec application du théorème de la convergence bornée - ou, plus simplement, calcul des coefficients de Fourier de $\mathcal{B}_2(x)$ par $c_\nu = \int_0^1 (x^2-x+\frac{1}{6})e^{-2\pi i\nu x}dx$; c'est vrai enfin pour tout $\mathcal{B}_r(x)$ $(r \geq 3)$: intégration terme à terme de séries normalement convergentes - ou, encore une fois, calcul des coefficients de Fourier (simplifié par intégration par parties et utilisation de (17)). (Pour une démonstration plus "conceptuelle", voir les §§5-6.)

Pour d'autres propriétés des b_r et des $\mathcal{B}_r(x)$, voir les deux premiers chapitres de [25] ; voir également [9] , [12] , [13] et [14] .

4. FORMULES DE POISSON ET D'EULER-MACLAURIN PERIODIQUES

Dans ce qui suit, k désigne un entier fixé ≥ 1 , et Λ_k désigne l'ensemble des suites k-périodiques, c'est-à-dire des applications $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ telles que $\lambda(n+k) = \lambda(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Λ_k est évidemment un espace vectoriel complexe, isomorphe à $\mathbb{C}^k$: cette simple remarque va nous permettre (en utilisant le principe (P_4) du §2 avec $\mathcal{S} = \Lambda_k$) d'établir des versions périodiques (c'est-à-dire à coefficients périodiques) des formules de Poisson et d'Euler-Maclaurin à partir des versions classiques de ces formules rappelées au §3 .

4.1. - Bases naturelles de Λ_k . Si on identifie Λ_k à l'espace vectoriel des fonctions complexes sur l'ensemble $\{1,2,\ldots,k\}$, on obtient une première base naturelle de Λ_k : la famille $(\delta_j)_{1\leq j\leq k}$ définie par

$$\delta_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv j \pmod k , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{23}$$

Si d'autre part on identifie Λ_k à l'espace vectoriel des fonctions complexes sur le <u>groupe chinois</u> $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, on obtient une deuxième base naturelle de Λ_k : la famille $(\varepsilon_j)_{1\le j\le k}$ définie par

$$\varepsilon_j(n) = e^{2\pi ijn/k} , \quad n \in \mathbb{Z} , \tag{24}$$

essentiellement identique à la famille des <u>caractères</u> du groupe $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$; si $\lambda \in \Lambda_k$, on notera $\hat{\lambda}(j)$ la composante de λ sur ε_j : $\hat{\lambda}(j)$ est donc le $j^{\text{ième}}$ <u>coefficient de Fourier</u> de λ , donné par

$$\hat{\lambda}(j) = k^{-1} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h) e^{-2\pi ijh/k}$$

([1] , p.160, th.8.4). Plus généralement, on posera, pour tout $\lambda \in \Lambda_k$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{\lambda}(n) = k^{-1} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h) e^{-2\pi inh/k} ; \tag{25}$$

$\hat{\lambda}$ est alors une <u>suite</u> k-<u>périodique</u> (autrement dit, $\hat{\lambda} \in \Lambda_k$) , et $\lambda \mapsto \hat{\lambda}$ est une <u>application</u> $\mathbb{C}$-<u>linéaire</u> de Λ_k dans Λ_k . Pour $\lambda = \delta_j$, (25) se réduit à

$$\hat{\delta}_j(n) = k^{-1} e^{-2\pi inj/k} . \tag{26}$$

4.2. - <u>Formule de Poisson périodique</u>.

THEOREME 4.2.1 ([4] , [18] , [19]). - <u>Soient</u> k <u>un entier</u> ≥ 1 , λ <u>une suite</u> k-<u>périodique</u> , <u>et</u> $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>une fonction à variations bornées</u>. <u>On a alors</u> (avec les conventions de sommation habituelles : cf. (C_1), (C_2) et § 3.1)

$$\sum_a^b{}' \lambda(n) f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(\nu) \int_a^b f(x) e^{2\pi i\nu x/k} dx . \tag{27}$$

<u>Démonstration</u> : si a , b et f sont supposés fixés, les deux membres de (27) (qu'on notera respectivement $S(\lambda)$ et $I(\lambda)$) sont des formes

$\mathbb{C}$-linéaires sur Λ_k : il suffit donc de prouver $S(\lambda) = I(\lambda)$ sur une base de Λ_k , et par exemple, en utilisant la première base naturelle, de prouver

$$S(\delta_j) = I(\delta_j) \ , \ j = 1,2,\ldots,k \ . \tag{28}$$

Mais si on pose $a_j = (a-j)/k$, $b_j = (b-j)/k$ et $f_j(y) = f(j+ky)$, on a évidemment, par définition de δ_j ,

$$S(\delta_j) = \sum_{a\le j+kn\le b}' f(j+kn) = \sum_{a_j}^{b_j}{}' f_j(n) \ . \tag{29}$$

D'autre part, f_j est à variations bornées, ce qui permet d'appliquer au dernier membre de (29) la formule de Poisson (§ 3.1, (9)) ; d'où

$$S(\delta_j) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{a_j}^{b_j} f_j(y)\, e^{2\pi i\nu y}\, dy \ . \tag{30}$$

Si alors on effectue dans chaque intégrale du membre de droite de (30) le changement de variable $y = (x-j)/k$, on obtient

$$S(\delta_j) = \sum_{-\infty}^{\infty} k^{-1}\, e^{-2\pi i\nu j/k} \int_a^b f(x)\, e^{2\pi i\nu x/k}\, dx \ ,$$

soit (en utilisant (26))

$$S(\delta_j) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}_j(\nu) \int_a^b f(x)\, e^{2\pi i\nu x/k}\, dx = I(\delta_j) \ ,$$

et la formule (28) se trouve effectivement établie. ∎

Pour d'autres démonstrations, voir [4] , [18] (et sans doute [25] , à paraître). La démonstration I , dans [18] , p.8, est une démonstration <u>par localisation</u> ; la démonstration III, p.9, est une transposition naturelle de la démonstration habituelle (cf. § 3.2, (i)) de la formule de Poisson ordinaire (développement en série de Fourier de la série de Poisson

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \pi_a^b(x+n)\, \lambda(n) f(x+n) \ ,$$

laquelle est ici k-<u>périodique</u>).

4.3. - Formule d'Euler-Maclaurin périodique.

DEFINITION 4.3.1. - Soient k un entier ≥ 1 et λ une suite k-périodique. On posera

$$b_o(\lambda) = \hat{\lambda}(0) = k^{-1} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h) \ , \tag{31}$$

et (pour tout entier $r \geq 1$)

$$\mathcal{B}_r(x,\lambda) = k^{r-1} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h)\ \mathcal{B}_r\left(\frac{x-h}{k}\right) \tag{32}$$

($r^{\text{ième}}$ fonction de Bernoulli associée à la suite k-périodique λ) .

THEOREME 4.3.2. ([4],[19]). - Mêmes données qu'au th.4.2.1. Supposons f m fois continûment dérivable sur $[a,b]$. On a alors (avec les conventions habituelles)

$$\begin{aligned}\sum_a^b{}' \lambda(n) f(n) &= b_o(\lambda) \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^r}{r!} \Big[\mathcal{B}_r(x,\lambda) f^{(r-1)}(x)\Big]_a^b \\ &\quad + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_a^b \mathcal{B}_m(x,\lambda) f^{(m)}(x)\,dx \ .\end{aligned} \tag{33}$$

Démonstration : si $S(\lambda)$ et $J(\lambda)$ désignent les deux membres de (33), il suffit (comme pour le th.4.2.1) de démontrer

$$S(\delta_j) = J(\delta_j) \ , \ j = 1,2,\ldots,k \ . \tag{34}$$

Appliquons au dernier membre de (29) la formule d'Euler-Maclaurin (§3.5, (18)) ; il vient

$$\begin{aligned}S(\delta_j) &= \int_{a_j}^{b_j} f_j(y)\,dy + \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^r}{r!} \Big[\mathcal{B}_r(y) f_j^{(r-1)}(y)\Big]_{a_j}^{b_j} \\ &\quad + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_{a_j}^{b_j} \mathcal{B}_m(y)\, f_j^{(m)}(y)\,dy \ .\end{aligned} \tag{35}$$

Dans chaque terme du membre de droite, effectuons le changement de variable $y = \frac{x-j}{k}$: comme $dy = k^{-1}dx$, comme $f_j^{(r-1)}(y) = k^{r-1} f^{(r-1)}(x)$, et comme par définition

$$k^{-1} = b_o(\delta_j) \ , \ k^{r-1}\mathcal{B}_r(\frac{x-j}{k}) = \mathcal{B}_r(x,\delta_j) \ ,$$

(35) se transforme alors en $S(\delta_j) = J(\delta_j)$, et (34) se trouve effectivement établie.■

4.4. - Etude des $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$.

THEOREME 4.4.1. - Pour tout $r \geq 2$ et tout x (non entier si $r = 2$), on a

$$\mathcal{B}_r'(x,\lambda) = r\mathcal{B}_{r-1}(x,\lambda) \ . \tag{36}$$

Démonstration : la formule (32) donne en effet d'une part

$$\mathcal{B}_r'(x,\lambda) = k^{r-1} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h) k^{-1} \mathcal{B}_r'(\frac{x-h}{k}) \ ,$$

et d'autre part

$$\mathcal{B}_{r-1}(x,\lambda) = k^{r-2} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h) \mathcal{B}_{r-1}(\frac{x-h}{k}) \ ;$$

d'où immédiatement (36), puisque, pour les fonctions de Bernoulli ordinaires, $\mathcal{B}_r' = r\mathcal{B}_{r-1}$ (cf. § 3.6).

COROLLAIRE. - Pour tout $r \geq 2$, la fonction $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$ est l'unique primitive de la fonction $r\mathcal{B}_{r-1}(x,\lambda)$ de moyenne nulle (sur une période).

Ce corollaire implique une définition récurrente naturelle (analogue à celle du § 3.6) des $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$ à partir de $\mathcal{B}_1(x,\lambda)$. Cherchons donc maintenant à caractériser de façon simple la fonction $\mathcal{B}_1(x,\lambda)$. Par k-périodicité, on peut se limiter à $0 \leq x \leq k$; mais on sait que pour $-1 < y < 1$ et $y \neq 0$, on a $\mathcal{B}_1(y) = y + \frac{1}{2}$ si $y < 0$, et $\mathcal{B}_1(y) = y - \frac{1}{2}$ si $y > 0$; si donc on suppose x non entier et si on pose $[x] = j$ (d'où $0 \leq j < x < j+1 \leq k$), on a, par (32), la représentation

$$\mathcal{B}_1(x,\lambda) = \sum_{h \leq j} \lambda(h) \left[\frac{x-h}{k} - \frac{1}{2}\right] + \sum_{h>j} \lambda(h) \left[\frac{x-h}{k} + \frac{1}{2}\right]$$

qui peut se réécrire

$$\mathcal{B}_1(x,\lambda) = b_o(\lambda)x - b'_1(\lambda) - \Lambda(x) \ ,$$

avec $b_o(\lambda) = k^{-1} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h)$ (rappel), $b'_1(\lambda) = k^{-1} \sum_{h=1}^{k} h\lambda(h)$, et $\Lambda(x)$ = la primitive de la suite λ (cf. § 3.3) telle que $\Lambda(0^+) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{k} \lambda(h)$.

D'où, en résumé :

THEOREME 4.4.2. - <u>La fonction</u> $\mathcal{B}_1(x,\lambda)$ <u>est la fonction</u> k-<u>périodique et affine par morceaux définie sur l'intervalle</u> $[0,k]$ <u>par</u>

$$\mathcal{B}_1(x,\lambda) = b_o(\lambda)x - b'_1(\lambda) - \Lambda(x) \ , \tag{37}$$

$b'_1(\lambda)$ <u>et</u> $\Lambda(x)$ <u>étant définis plus haut dans le texte</u>.

COROLLAIRE. - <u>La fonction</u> $\mathcal{B}_1(x,\lambda)$ <u>est l'unique fonction de moyenne nulle ayant pour dérivée au sens des distributions la mesure</u> k-<u>périodique</u> $\mathcal{B}_o(x,\lambda)$ <u>définie par</u>

$$\mathcal{B}_o(x,\lambda) = b_o(\lambda)\,dx - \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda(n)\,\delta(x-n) \tag{38}$$

(dx désigant la mesure de Lebesgue, et $\delta(x-n)$ la masse-unité de Dirac en $x = n$).

La $0^{\text{ième}}$ <u>distribution de Bernoulli</u> $\mathcal{B}_o(x,\lambda)$ associée à λ admet une interprétation évidente (cf. Introduction) : elle mesure l'écart entre la <u>distribution discrète</u> (de densité moyenne $b_o(\lambda)$ sur une période) <u>consistant à placer la masse</u> $\lambda(n)$ en $x = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et la <u>distribution continue et homogène</u> (de densité $b_o(\lambda)$) <u>égale à</u> $b_o(\lambda)$ <u>fois la mesure de Lebesgue</u>. Elle permet de définir $\mathcal{B}_1(x,\lambda)$ comme l'unique primitive de moyenne nulle de $\mathcal{B}_o(x,\lambda)$. Plus généralement, elle donne la définition récurrente suivante des $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$ (déduite des deux corollaires ci-dessus) :

THEOREME 4.4.3. - <u>Pour tout</u> $r \geq 1$, <u>la fonction</u> $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$ <u>est l'unique primitive de moyenne nulle de</u> $r\mathcal{B}_{r-1}(x,\lambda)$ ($\mathcal{B}_o(x,\lambda)$ <u>étant définie par</u> (38)).

On notera que pour tout $r \geq 1$, la restriction de $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$ à chaque intervalle entier $]n,n+1[$ est un <u>polynôme</u>. En particulier, en faisant $n = 0$ et en se restreignant donc à l'intervalle $]0,1[$, on peut définir ainsi (un peu artificiellement) les <u>polynômes de Bernoulli périodiques</u> $B_r(x,\lambda)$ <u>associés à la suite</u> $\lambda \in \Lambda_k$ (c'est le point de vue adopté dans [7] , p.24, déf.1 ; voir aussi [4] , p.422, déf.2). En particulier, pour $r = 1$, on a (cf. (37))

$$B_1(x,\lambda) = b_o(\lambda)x - b_1''(\lambda) ,$$

avec $b_1''(\lambda) = b_1'(\lambda) - \frac{k}{2}b_o(\lambda)$. On peut également définir ainsi les <u>nombres de Bernoulli périodiques</u> $b_r(\lambda)$ <u>associés à la suite</u> $\lambda \in \Lambda_k$:

DEFINITION 4.4.4. - <u>Pour toute suite</u> k-<u>périodique</u> λ <u>et tout entier</u> $r \geq 0$, <u>on note</u> $b_r(\lambda)$ <u>le nombre complexe défini par</u>

$$b_o(\lambda) = \hat{\lambda}(0) = k^{-1}\sum_{h=1}^{k}\lambda(h) \quad (r=0) ,$$

$$b_1(\lambda) = \mathcal{B}_1(0,\lambda) \quad (r=1) , \text{ (on aurait pu décider } \mathcal{B}_1(0^+,\lambda))$$

$$b_r(\lambda) = \mathcal{B}_r(0,\lambda) \quad (r \geq 2) .$$

Bien entendu, on a $b_r(\lambda) = B_r(0,\lambda)$ pour tout $r \geq 2$. Le meilleur moyen d'étudier les $b_r(\lambda)$ n'est pourtant pas de calculer les $B_r(x,\lambda)$, mais de développer en série de Fourier les fonctions k-périodiques $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$ puis de faire tendre x vers 0^+ : voir § 6 .

5. DISTRIBUTIONS PERIODIQUES

5.1. - Distributions : on suppose connus les rudiments de la théorie des distributions (sur $\mathbb{R}$). Rappelons seulement quelques définitions et notations :

$\mathcal{D}$ désigne l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ indéfiniment différentiables à support compact, topologifié de la manière suivante : une suite (f_j) d'éléments de $\mathcal{D}$ tend vers 0 si et seulement si (i) toutes les f_j ont leur support dans un même compact ; (ii) toutes les suites $(f_j^{(m)})$ (pour $m = 0,1,2,\ldots$) convergent uniformément vers 0 .

$\mathcal{D}'$ désigne l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}$, lui-même topologifié de la façon suivante : une suite (α_j) d'éléments de $\mathcal{D}'$ tend vers 0 si et seulement si, pour toute $f \in \mathcal{D}$, la suite $(\alpha_j(f))$ tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. Une distribution est un élément de $\mathcal{D}'$. Si α est une distribution, on écrira $\langle \alpha, f \rangle$ au lieu de $\alpha(f)$; on écrira aussi $\alpha(x)$ au lieu de α , et $\langle \alpha(x), f(x) \rangle$, ou même $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha(x)\,dx$, au lieu de $\langle \alpha, f \rangle$, cette dernière écriture n'étant correcte que si α est une distribution définie par une fonction localement intégrable.

Soient α une distribution, g un élément de $\mathcal{D}$, m un entier ≥ 0 . Le produit αg est par définition la distribution β telle que $\langle \beta, f \rangle = \langle \alpha, gf \rangle$ pour toute $f \in \mathcal{D}$. La dérivée $m^{\text{ième}}$ $\alpha^{(m)}$ est par définition la distribution γ telle que $\langle \gamma, f \rangle = (-1)^m \langle \alpha, f^{(m)} \rangle$ pour toute $f \in \mathcal{D}$. Avec cette définition, la règle d'intégration par parties reste valable pour les distributions. De plus : si φ est une fonction de classe C^1 et si $\varphi^{(1)}$ et sa dérivée au sens habituel, $\varphi^{(1)}$ est aussi sa dérivée au sens des distributions ; toute fonction localement intégrable est indéfiniment dérivable au sens des distributions ; enfin, si une suite (α_j) converge vers α dans $\mathcal{D}'$, la suite $(\alpha_j^{(m)})$ converge vers $\alpha^{(m)}$ dans $\mathcal{D}'$; en particulier, toute série (de distributions) convergente peut être dérivée terme à terme (au sens des distributions) ([27] , chap.1-2).

5.2. - Distributions périodiques : soit $k > 0$ un nombre réel fixé. Une fonction $f(x)$ est dite k-périodique si $f(x+k) = f(x)$ pour tout x. Une distribution $\alpha(x)$ est dite de même k-périodique si $\alpha(x+k) = \alpha(x)$, $\alpha(x+k)$ étant par définition la distribution $\beta(x)$ telle que

$$\langle \beta(x), f(x) \rangle = \langle \alpha(x), f(x-k) \rangle .$$

On notera respectivement $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{D}'_k$ l'espace des fonctions k-périodiques indéfiniment différentiables, et l'espace des distributions k-périodiques. Notre objectif est de faire opérer les éléments de $\mathcal{D}'_k$ sur $\mathcal{P}_k$ (une telle opération n'existe pas a priori, puisque les fonctions périodiques non nulles ne sont pas à support compact...). La méthode est la suivante (pour les détails et les démonstrations, voir [27], chap.11) : soit u une fonction k-unitaire, c'est-à-dire une fonction $u \in \mathcal{D}$ et telle que $\sum_{-\infty}^{\infty} u(x+nk) = 1$ (ça existe) ; supposons $f \in \mathcal{P}_k$; alors : (i) on a $uf \in \mathcal{D}$; (ii) on a (pour tout $x \in \mathbf{R}$)

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (uf)(x+nk) \qquad \text{(série "de Poisson") ;}$$

(iii) si $\alpha \in \mathcal{D}_k$, $\langle \alpha, uf \rangle$ ne dépend que de α et f (et non de u). L'accouplement $(\alpha, f) \mapsto \langle \alpha, uf \rangle$ est l'opération annoncée de $\mathcal{D}'_k$ sur $\mathcal{P}_k$ (si on topologifie $\mathcal{P}_k$ comme $\mathcal{D}_k$, $\mathcal{D}'_k$ s'identifie ainsi à l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{P}_k$). Si $\alpha = \varphi$, fonction localement intégrable et k-périodique, on a le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, uf \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,u(x)\,dx \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{nk}^{(n+1)k} f(x)\,\varphi(x)\,u(x)\,dx \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{k} f(x)\,\varphi(x)\,u(x+nk)\,dx
\end{aligned}$$

(changement de variable et k-périodicité de f et φ) d'où facilement

$$\langle \varphi, uf \rangle = \int_0^k f(x)\,\varphi(x)\,dx .$$

Ceci justifie la notation

$$\langle \alpha, uf \rangle = \int_0^k f(x)\,\alpha(x)\,dx$$

que nous emploierons (assez abusivement) dans ce qui suit, et rend intuitive l'action des $\alpha \in \mathcal{D}'_k$ sur les $f \in \mathcal{P}_k$.

5.3. - Développement en série de Fourier d'une distribution k-périodique : les rappels des deux §§ ci-dessus permettent d'énoncer le théorème que nous avions en vue :

THEOREME 5.3.1. - Soit $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe ayant la propriété suivante (croissance modérée) : il existe un entier $r \geq 0$ tel que $|a_\nu| = O(|\nu|^r)$ (pour $\nu \to \infty$) . Alors la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu e^{2\pi i\nu x/k} \tag{39}$$

converge dans $\mathcal{D}'$ vers une distribution k-périodique α , et on a

$$a_\nu = k^{-1} \int_0^k \alpha(x)\, e^{-2\pi i\nu x/k}\, dx \ . \tag{40}$$

Réciproquement, si α est une distribution k-périodique, et si on définit les a_ν par (40) (coefficients de Fourier de α) , alors la suite (a_ν) est à croissance modérée, et la série (39) converge dans $\mathcal{D}'$ vers la distribution α .

Démonstration (indications ; pour les détails, voir [27] , chap.11).
Partie directe : supposons pour simplifier $a_0 = 0$, et posons

$$f_\nu = a_\nu \left(\frac{2\pi i\nu}{k}\right)^{-r-2} \ . \tag{41}$$

Alors $|f_\nu| = O(|\nu|^{-2})$, et la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_\nu e^{2\pi i\nu x/k} \tag{42}$$

converge uniformément, donc aussi au sens des distributions, vers une fonction continue k-périodique φ : il en résulte immédiatement (par $r+2$ dérivations terme à terme de (42)) que (39) converge au sens des

distributions vers $\varphi^{(r+2)}$, dérivée $(r+2)^{\text{ième}}$ de φ au sens des distributions : d'où $\alpha = \varphi^{(r+2)}$. ∎

Partie réciproque : si $\alpha = \varphi$, fonction k-périodique de classe C^2 , il est facile de prouver (double intégration par parties) que $|a_\nu| = O(|\nu|^{-2})$, donc que (39) converge uniformément ; par ailleurs, on sait (théorème de Dirichlet, cas particulier facile du théorème de Dini-Jordan) que (39) converge simplement vers φ : par suite, (39) converge uniformément, donc aussi au sens des distributions, vers $\varphi = \alpha$: d'où la partie réciproque dans ce cas particulier. Le cas général s'en déduit en appliquant à αu (voir § 5.2) le fait (non trivial) que toute distribution à support compact est du type $\varphi^{(m)}$, avec φ de classe C^2 , et en raisonnant comme dans la partie directe. ∎

5.4. - Application 1 : formule de Poisson classique : on suppose ici $k=1$.

THEOREME 5.4.1. - La distribution périodique "masse-unité de Dirac en tout point entier n" admet le développement de Fourier suivant :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\nu x} . \tag{43}$$

Démonstration : Soit α le premier membre de (43) . D'après le théorème 5.3.1, il suffit pour prouver (43) de montrer que si $u(x) \in \mathcal{D}$ est une fonction 1-unitaire et si $a_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, u(x)\, e^{-2\pi i\nu x} dx$, on a $a_\nu = 1$ pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$. Mais, par définition même de α ,

$$a_\nu = \sum_{-\infty}^{\infty} u(n) e^{-2\pi i\nu u} = \sum_{-\infty}^{\infty} u(n) ,$$

et cette dernière somme vaut effectivement 1 , puisque u est 1-unitaire. ∎

COROLLAIRE. - Si f est indéfiniment différentiable à support compact contenu dans $[a,b]$, on a

$$\sum_{a}^{b} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f(x)\, e^{2\pi i\nu x} dx .$$

5.5. - Application 2 : formule de Poisson "à pas variable" : soient à nouveau $k > 0$ un nombre réel fixé, $q \geq 1$ un nombre entier, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ une suite de coefficients complexes, et $a_1, a_2, \ldots, a_q$ une suite de nombres réels qu'on pourra, sans diminuer la généralité, supposer tels que

$$0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_q < k .$$

Soient $\beta(x)$ la distribution $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \delta(x-a_j)$, $\alpha(x)$ la distribution k-périodique $\sum_{-\infty}^{\infty} \beta(x-nk)$, et posons pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\hat{\lambda}_\nu = k^{-1} \sum_{j=1}^{q} \lambda_j e^{-2\pi i \nu a_j/k} . \tag{45}$$

Alors :

THEOREME 5.5.1. - La distribution périodique α admet le développement de Fourier

$$\alpha = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}_\nu e^{2\pi i \nu x/k} . \tag{46}$$

Démonstration : appliquer comme ci-dessus le théorème 5.3.1. ∎

COROLLAIRE. - Si f est indéfiniment différentiable à support compact contenu dans $[a,b]$, on a la formule sommatoire

$$\sum_j \sum_n \lambda_j f(a_j+nk) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}_\nu \int_a^b f(x) e^{2\pi i \nu x/k} dx . \tag{47}$$

Si $q = k$ et $a_j = j$ $(0 \leq j \leq k-1)$, la formule (47) se réduit évidemment à la formule de Poisson périodique (27) du §4 (pour f de classe C^∞ à support dans $[a,b]$). Bien entendu, (47) peut aussi se démontrer comme (27) , et reste vraie, mutatis mutandis, pour f à variations bornées quelconque.

5.6. - Noyau de Dirichlet, interférences et diffraction : revenons à la formule (43) : elle a été démontrée de gauche à droite conformément à l'objectif énoncé au § 2 : approcher du discret par du continu. Il est ce-

pendant plus naturel de la lire de droite à gauche : elle admet alors en effet diverses interprétations intuitives donc voici (pour mémoire) les plus connues :

Noyau de Dirichlet : posons $D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{2\pi i\nu x}$. On a $D_N(x) = \sin(2N+1)\pi x/\sin \pi x$; le graphe de $D_N(x)$ présente donc essentiellement un pic de hauteur $2N+1$, de largeur $2/(2N+1)$ et d'aire voisine de 1 en chaque point entier n ; un tel pic est une approximation de $\delta(x-n)$, et on arrive ainsi intuitivement (pour $N \to \infty$) à l'égalité (43) . Bien entendu, la relation

$$\lim_{N\to\infty} D_N(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \tag{43'}$$

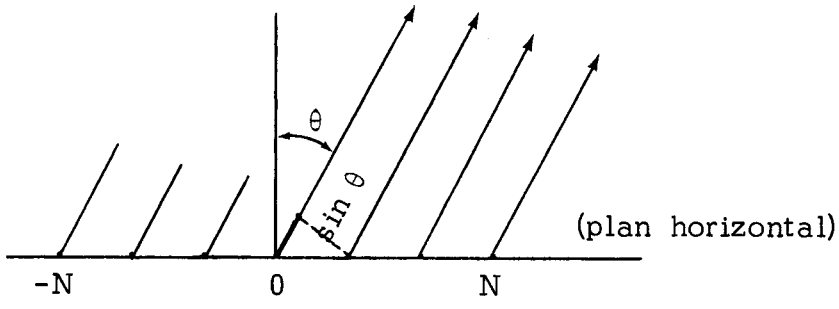
se démontre directement sans difficulté (c'est le lemme central du théorème de Dirichlet sur les séries de Fourier) : on pourrait ainsi éviter l'utilisation du théorème 5.3.1.

Interférences, diffraction : considérons un dispositif radioélectrique du type antenne de télévision formé (par exemple) de $2N+1$ oscillateurs harmoniques verticaux numérotés de $-N$ à N , séparés par une même distance 1 , et émettant en phase avec l'amplitude 1 sur une longueur d'onde λ petite par rapport à 1 . Si T désigne la période, le signal reçu à l'instant t , à l'infini, dans l'azimut θ (voir figure) est évidemment (à un facteur constant près)

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i(\frac{t}{T}+\frac{n}{\lambda}\sin\theta)} = e^{2\pi i\frac{t}{T}} D_N(\frac{\sin\theta}{\lambda}) .$$

On reçoit donc (cf. Noyau de Dirichlet) un signal de grande amplitude (proportionnelle à $2N+1$) dans les azimuts mesurés en radians par $\theta = 0$, $\pm\lambda$, $\pm 2\lambda$,... et un signal pratiquement nul (interférences) dans les zones séparant ces azimuts. Pour $N \to \infty$, on a ainsi une distribution azimutale d'amplitude décrite par le premier membre de (43) . On laisse au lecteur le plaisir d'interpréter de la même manière le phénomène optique des franges d'interférence provoqué par le passage d'un faisceau de lumière

à travers un réseau plan (diffraction).



5.7. - <u>Application 3</u> : <u>développement de Fourier des fonctions de Bernoulli classiques</u> : on a évidemment ici $k = 1$. On sait que la distribution $\mathcal{B}_1(x)$ est égale à la fonction $\beta(x)$ définie au §3.1. Les coefficients de Fourier a_ν correspondants sont donc donnés (pour $\nu \neq 0$) par

$$a_\nu = \int_0^1 (x - \tfrac{1}{2}) e^{-2\pi i \nu x} dx = -\frac{1}{2\pi i \nu}$$

(intégration par parties). Comme $\beta(x)$ est de moyenne nulle sur $[0,1]$, on a d'autre part $a_o = 0$. D'où

$$\mathcal{B}_1(x) = -\sum_{-\infty}^{\infty}{}^* \frac{e^{2\pi i \nu x}}{2\pi i \nu} \tag{48}$$

(au sens des distributions). Les développements de Fourier de $\mathcal{B}_2(x)$, $\mathcal{B}_3(x)$,... s'en déduisent de proche en proche en intégrant terme à terme (au sens des distributions : pas de problème de convergence uniforme) et en remarquant à chaque fois que la constante d'intégration à prendre est 0 , puisque chaque $\mathcal{B}_r(x)$ est de moyenne nulle sur $[0,1]$, et que le terme constant dans le développement de Fourier correspondant est donc 0 . On retrouve ainsi (voir (22), §3.6)

$$\mathcal{B}_r(x) = -r! \sum_{-\infty}^{\infty}{}^* \frac{e^{2\pi i \nu x}}{(2\pi i \nu)^r} \tag{49}$$

(au sens des distributions). Le fait que (48) et (49) soient vraies au sens des fonctions ne présente alors aucune difficulté (convergence uniforme pour $r \geq 2$; lemme 3.1.1 et formule (8") (par exemple) pour $r = 1$).

Remarque : le résultat (48) peut aussi se déduire directement de (43) , en remarquant que si on pose $\mathcal{B}_0(x) = 1 - \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$, on a (par (43))

$$\mathcal{B}_0(x) = -\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} e^{2\pi i\nu x} ,$$

et que $\mathcal{B}_1(x)$ est l'unique primitive de $\mathcal{B}_0(x)$ (au sens des distributions) de moyenne nulle sur $[0,1]$. Inversement, (43) peut se déduire de (48) :

Exercice suggéré : démontrer (43) sans utiliser le th.5.3.1 en déduisant du lemme 3.1.1 et de (8") la relation

$$x - \mathcal{B}_1(x) = x + \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} e^{2\pi i\nu x}/2\pi i\nu$$

(au sens des distributions) et en la dérivant terme à terme (toujours au sens des distributions).

5.8. - Application 4 : développement de Fourier des fonctions de Bernoulli périodiques $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$. On en vient au but essentiel de ce §5 (annoncé aux §§ 4.3 et 4.4, dont on reprend les notations et les hypothèses) : développer en série de Fourier les $\mathcal{B}_r(x,\lambda)$. D'après (38), on a (compte tenu de la k-périodicité de la suite λ)

$$\mathcal{B}_0(x,\lambda) = \hat{\lambda}(0) - \sum_{h=1}^{k} \lambda(h) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(x-h-\nu k) ;$$

d'après (43), et par un changement de variable évident (ou directement, par application du th.5.3.1)

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(x-h-\nu k) = k^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\nu(x-h)/k} ;$$

en combinant ces deux résultats, on arrive à

$$\mathcal{B}_0(x,\lambda) = \hat{\lambda}(0) - \sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{h=1}^{k} k^{-1}\lambda(h)e^{-2\pi i\nu h/k}\Big)e^{2\pi i\nu x/k}$$

ou encore, en remplaçant la parenthèse par $\hat{\lambda}(\nu)$ et en remarquant que le terme constant disparaît (ce qui correspond au fait que $\mathcal{B}_0(x,\lambda)$ est de moyenne nulle sur une période)

$$\mathcal{B}_0(x,\lambda) = -\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*}\ \hat{\lambda}(\nu)e^{2\pi i\nu x/k} .$$

Par r intégrations (au sens des distributions) et r applications de l'argument de moyenne nulle sur une période (voir th.4.4.3), on obtient alors le résultat cherché :

THEOREME 5.8.1. - <u>Pour toute suite</u> k-<u>périodique</u> λ <u>et tout entier</u> $r \geq 0$, <u>on a</u> (au sens des distributions)

$$\mathcal{B}_r(x,\lambda) = -r!\ \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*}\ \hat{\lambda}(\nu)\ \frac{e^{2\pi i\nu x/k}}{(2\pi i\nu/k)^r} . \tag{50}$$

(Pour $r \geq 2$, il y a en fait convergence <u>uniforme</u> ; pour $r = 1$, il y a convergence simple et aussi L^1_{loc} : utilisation du lemme 3.1.1 et de (8")) .

COROLLAIRE. - <u>Pour</u> $r \geq 2$, <u>on a</u> (voir le §4.4)

$$b_r(\lambda) = \frac{i^{2-r}r!}{(2\pi/k)^r}\ \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*}\ \frac{\hat{\lambda}(\nu)}{\nu^r} . \tag{51}$$

<u>Exercice suggéré</u> : écrire une "théorie de Bernoulli-Euler-Maclaurin périodique à pas variable" en partant de la situation décrite au §5.5. (Les fonctions de Bernoulli correspondant à cette situation sont évidemment les

$$\mathcal{B}_r(x;(\lambda_j,a_j)) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \mathcal{B}_r\left(\frac{x-a_j}{k}\right).) \tag{52}$$

Donner notamment une interprétation intuitive de $\mathcal{B}_0$ et de la formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre 1 généralisant celle indiquée dans l'introduction et au §4.4.

6. FORMULES SOMMATOIRES PERIODIQUES ASSOCIEES A UN CARACTERE DE DIRICHLET

Dans ce paragraphe, on spécialise les résultats des §§4-5 au cas où $\lambda = \chi$, caractère de Dirichlet primitif de conducteur k ; on suppose en outre χ non principal, donc $k > 1$.

6.1. - Formules de Poisson et d'Euler-Maclaurin avec caractère :

LEMME 6.1.1. - Soit $\tau(\chi) = \sum_{h=1}^{k} \chi(h) e^{2\pi ih/k}$ la somme de Gauss fondamentale associée à χ . Alors

$$\hat{\chi}(n) = k^{-1} \chi(-1) \tau(\chi) \bar{\chi}(n) . \tag{53}$$

En particulier, si χ est réel pair, on a

$$\hat{\chi}(n) = k^{-1/2} \chi(n) ; \tag{54}$$

si χ est réel impair, on a

$$\hat{\chi}(n) = -ik^{-1/2} \chi(n) . \tag{54'}$$

Démonstration : D'après les propriétés classiques des sommes de Gauss ([1] , chap.8), on a

$$\hat{\chi}(n) = k^{-1} \tau(-n,\chi) = k^{-1} \bar{\chi}(-n) \tau(\chi) ,$$

d'où (53) , puisque $\bar{\chi}(-n) = \bar{\chi}(-1) \bar{\chi}(n)$, et que $\bar{\chi}(-1) = \pm 1 = \chi(-1)$. D'autre part, tout caractère de Dirichlet primitif réel est un caractère de Kronecker, et on sait que pour un tel caractère, $\tau(\chi) = k^{1/2}$ si χ est pair et $\tau(\chi) = ik^{1/2}$ si χ est impair : d'où (54) et (54'). ∎

THEOREME 6.1.2. - Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction à variations bornées. Alors, avec les conventions habituelles, on a

$$\sum_{a}^{b}{}' \chi(n) f(n) = A(\chi) \sum_{1}^{\infty} \bar{\chi}(\nu) \int_a^b f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi\nu x/k \, dx \tag{55}$$

avec les deux précisions suivantes : (i) si χ est pair (resp.

impair), la fonction trigonométrique à choisir est le cosinus (resp. le sinus) ; (ii) le facteur $A(\chi)$ est égal à $2k^{-1}\tau(\chi)$ si χ est pair et à $-2ik^{-1}\tau(\chi)$ si χ est impair ; en particulier, si χ est réel (pair ou impair), on a

$$A(\chi) = 2k^{-1/2} \quad . \tag{56}$$

Démonstration : Supposons par exemple χ pair : le lemme 6.1.1 donne alors $\hat{\chi}(n) = k^{-1}\tau(\chi)\bar{\chi}(n)$, et le th.4.2.1 s'écrit

$$\sum_a^b{}' \lambda(n) f(n) = k^{-1}\tau(\chi) \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(\nu) \int_a^b f(x) e^{2\pi i\nu x/k} dx \quad . \tag{57}$$

La formule (55) se déduit immédiatement de (57) en remarquant que $\bar{\chi}(0) = 0$, que $\bar{\chi}(-\nu) = \bar{\chi}(\nu)$, et en regroupant les termes correspondant à l'indice ν et à l'indice $-\nu$ pour $\nu = 1,2,\ldots$. Calcul analogue pour χ impair. Enfin, (56) résulte des évaluations de $A(\chi)$, et de la valeur $\tau(\chi) = k^{1/2}$ ou $ik^{1/2}$ (pour χ réel pair ou impair) déjà utilisée dans la démonstration du lemme 6.1.1. ∎

THEOREME 6.1.3. - Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^m , $m \geq 1$. Alors, avec les conventions habituelles, on a

$$\begin{aligned}\sum_a^b{}' \chi(n) f(n) = \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^r}{r!} \left[\mathcal{B}_r(x,\chi) f^{(r-1)}(x)\right]_a^b \; + \\ + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_a^b \mathcal{B}_m(x,\chi) f^{(m)}(x)\, dx\end{aligned} \tag{58}$$

Démonstration : Il suffit de recopier la formule (33) du th.4.3.2 en remplaçant λ par χ et en remarquant que puisque χ est non principal, on a $b_o(\chi) = \sum_{h=1}^{k} \chi(h) = 0$. ∎

COROLLAIRE. - Si a et b sont entiers et multiples de k , on a

$$\begin{aligned}\sum_a^b{}' \chi(n) f(n) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \frac{b_r(\chi)}{r!} \left[f^{(r-1)}(x)\right]_a^b \; + \\ + (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{\mathcal{B}_m(x,\chi)}{m!} f^{(m)}(x)\, dx \; .\end{aligned} \tag{59}$$

Démonstration : La k-périodicité de $\mathcal{B}_r(x,\chi)$ implique en effet $\mathcal{B}_r(a,\chi) = \mathcal{B}_r(b,\chi) = \mathcal{B}_r(0,\chi) = b_r(\chi)$ (voir §4 , déf.4.4.4). ∎

6.2. - Etude des $\mathcal{B}_r(x,\chi)$ et des $b_r(\chi)$:

THEOREME 6.2.1. - Pour tout $r \geq 1$, la fonction $\mathcal{B}_r(x,\chi)$ est développable en série trigonométrique selon la formule

$$\mathcal{B}_r(x,\chi) = \frac{2\rho(r,\chi)k^{r-1}\tau(\chi)r!}{(2\pi)^r} \sum_1^\infty \frac{\bar{\chi}(\nu)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi\nu x/k}{\nu^r} \tag{60}$$

avec les deux précisions suivantes : (i) si χ et r sont de même parité (resp. de parités opposées), la fonction trigonométrique à choisir est le cosinus (resp. le sinus) ; (ii) le coefficient $\rho(r,\chi)$ est une puissance de i donnée en fonction de la parité de χ et de la classe de r modulo 4 par le tableau suivant :

$r \equiv$	0	1	2	3	(mod 4)
$\rho(r,\chi) =$	-1	-1	+1	+1	$\chi(-1) = +1$
	+i	-i	-i	+i	$\chi(-1) = -1$

.

Démonstration : Même démarche que pour le th.6.1.2 : on combine le th.5.8.1 et le lemme 6.1.1, et on simplifie le résultat en remarquant que $\bar{\chi}(0) = 0$ et que les termes correspondant à l'indice ν et à l'indice $-\nu$ pour $\nu = 1,2,\ldots$ se regroupent pour donner (à cause du facteur $\bar{\chi}(\nu)/\nu^r$) un terme en $\cos 2\pi\nu x/k$ si χ et r ont même parité, et un terme en $\sin 2\pi\nu x/k$ si χ et r ont des parités opposées. ∎

COROLLAIRE 1. - Si χ et r sont de même parité, on a

$$b_r(\chi) = \frac{2\rho(r,\chi)k^{r-1}\tau(\chi)r!}{(2\pi)^r} L(r,\bar{\chi}) \; ; \tag{61}$$

si au contraire χ et r sont de parités opposées, on a tout simplement $b_r(\chi) = 0$.

Démonstration : Il suffit de faire $x = 0$ dans la formule (60) et d'utiliser les deux définitions $b_r(\chi) = \mathcal{B}_r(0,\chi)$ et $L(s,\chi) = \sum_1^\infty \chi(\nu)\nu^{-s}$. ∎

COROLLAIRE 2. - Dans la formule d'Euler-Maclaurin avec caractère (59), seuls apparaissent en fait les termes avec r pair si χ est pair, et ceux avec r impair si χ est impair. D'autre part, le premier facteur figurant dans le terme intégral admet la majoration

$$\left|\frac{\mathcal{B}_m(x,\chi)}{m!}\right| \leq \frac{2k^{m-1/2}\zeta(m)}{(2\pi)^m} \quad . \tag{62}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser les formules (59) , (60) , le corollaire 1 et la définition $\zeta(s) = \sum_1^\infty \nu^{-s}$. ∎

6.3. - Remarques et compléments : les résultats des §§ 6.1-6.2 ont été obtenus indépendamment par Berndt [4] , par une démarche complètement différente : la méthode de Berndt a pour point de départ une identité générale due à Chandrasekharan et Narasimhan, et donnant le développement en fonctions de Bessel de sommes du type $\sum_{\lambda_n \leq x} a(n)(x-\lambda_n)^q$ (loc. cit., p.414) ; Berndt redémontre cette identité pour $a(n) = \chi(n)$ ou $n\chi(n)$, $\lambda_n = \pi n^2/k$ et $q > 0$ (pp. 415-416), puis l'étend au cas $q = 0$ par une méthode due à Hardy et Landau (pp. 417-419), et déduit de là la formule de Poisson avec caractère (pp. 419-420) ; la formule d'Euler-Maclaurin avec caractère s'en déduit alors par l'argument habituel (voir ci-dessus § 3.4, dém.(i)) . Berndt introduit les fonctions de Bernoulli par leur développement trigonométrique : signalons que ceci équivaut (p. 421) à les définir comme étant

$$k^{r-1}\sum_{h=1}^{k} \bar{\chi}(h)\,\mathcal{B}_r\left(\frac{x+h}{k}\right) = \chi(-1)\,k^{r-1}\sum_{h=1}^{k} \bar{\chi}(h)\,\mathcal{B}_r\left(\frac{x-h}{k}\right) ;$$

par rapport à la définition adoptée ici, il y a donc changement de χ en son conjugué $\bar{\chi}$, et (pour χ impair) différence de signe.

Les résultats de [4] ont été généralisés par Berndt et Schœnfeld

au cas d'une suite périodique quelconque [7] ; les formules (4.13) et (3.1) de [7] coïncident essentiellement avec les formules (27) et (33) des §§ 4.2 - 4.3 ci-dessus ; les démonstrations, différentes de celles proposées ici, consistent en calculs élémentaires, avec recours à la formule de Poisson classique. Voir sans doute également l'article de Rosser et Schœnfeld [26] (annoncé dans [7], à paraître).

Les articles [4] et [7] contiennent une étude détaillée des $b_r(\chi)$, des $B_r(x,\chi)$ et des $\mathcal{B}_r(x,\chi)$, les démonstrations et les résultats généralisant ceux, bien connus ([9], [12], [25]), relatifs à la "quincaillerie de Bernoulli" classique (signes, parités ; expression des B_r à l'aide des b_r ; fonctions génératrices des suites b_r et B_r ; formules de différences finies, etc...) ; on constate ainsi en particulier que les $b_r(\chi)$ coïncident avec les nombres de Bernoulli généralisés de Leopoldt-Iwasawa-Fresnel. Le lecteur pourra reconstituer ces résultats à titre d'exercices sur les §§ 6.1 - 6.2, ou se reporter à [4], § 6 et à [7], § 9. Voir également le § 7 ci-dessous.

7. APPLICATIONS A LA THEORIE MULTIPLICATIVE DES NOMBRES

Du point de vue analytique, la théorie multiplicative des nombres consiste essentiellement à manipuler des séries de Dirichlet (fonctions zêta, séries L, fonctions génératrices de fonctions arithmétiques), dont la principale caractéristique est de converger très lentement : il est donc important de disposer de techniques sommatoires accélérant (en un sens quelconque) la convergence de ces séries, ou permettant d'en exprimer la somme sous une forme "finie". Des exemples de telles techniques sont

(i) la sommation d'Abel, qui permet généralement de remplacer une convergence conditionnelle (semi-convergence) par une convergence absolue ;

(ii) la formule d'Euler-Maclaurin (pour une série), où le reste d'ordre m, pour m donné, converge généralement mieux que la série de départ, et qui fournit souvent un développement asymptotique divergent mais plus maniable que la série, si celle-ci converge trop lentement ;

(iii) la transformation de Mellin (inverse) qui "remplace" une série de Dirichlet $\alpha(s) = \sum a_n n^{-s}$ lentement convergente par une série d'exponentielles $A(y) = \sum a_n e^{-ny}$ rapidement convergente ;

(iv) la formule des résidus, qui est par essence une formule sommatoire, et qui d'ailleurs, dans le cadre analytique complexe, "contient" en un certain sens Mellin, Euler-Maclaurin et Abel.

De ce point de vue, les formules de Poisson et d'Euler-Maclaurin avec caractère sont un outil commode pour l'étude des séries $L(s,\chi)$ de Dirichlet, et aussi pour l'étude de sommes de la forme $\sum_1^k \chi(n)f(n)$, ou plus généralement de la forme $\sum_a^{b}{}' \chi(n)f(n)$, donc (arithmétiquement) pour l'étude des corps quadratiques et cyclotomiques, des restes et non-restes quadratiques, de la distribution des nombres premiers, etc... : même si elles ne contiennent rien d'essentiellement nouveau (en fait, Dirichlet lui-même aurait pu les écrire, disons, en 1839), ces formules simplifient nettement l'utilisation des techniques sommatoires habituelles ; de façon générale, elles permettent des calculs "compacts" et donnent souvent, pour une série ou une somme $\sum \chi(n)f(n)$, une expression "exacte", ou une évaluation, beaucoup plus simple que ce qu'on aurait pu supposer a priori.

Le but de ce paragraphe est d'illustrer les assertions précédentes par un certain nombre d'exemples et d'applications, dus à Berndt, à Schœnfeld et à l'auteur. Pour les détails, pour des énoncés plus généraux, ou pour d'autres résultats, voir [4], [5], [7], [18], [19], [20].

7.1. - Restes et non-restes quadratiques : soit p un nombre premier $\equiv 3 \pmod 4$, et soit χ le caractère de Legendre associé à p. Comme χ

est <u>réel impair</u>, la formule de Poisson avec caractère (55) donne

$$\sum_{0}^{p/2} \chi(n) = 2p^{-1/2} \sum_{1}^{\infty} \chi(\nu) \int_{0}^{p/2} \sin 2\pi\nu x/p \quad dx \ . \tag{63}$$

Les intégrales du membre de droite se calculent instantanément par le changement de variable $\xi = 2\pi\nu x/p$, ce qui transforme (63) en

$$\sum_{0}^{p/2}{}' \chi(n) = 4\pi^{-1} p^{1/2} \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi_1(\nu)}{\nu} \ , \tag{63'}$$

$\chi_1(\nu)$ valant par définition 0 si ν est pair et $\chi(\nu)$ si ν est impair. Mais χ_1 est alors un <u>caractère</u> (non primitif) de conducteur $2p$, d'où $\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi_1(\nu)}{\nu} > 0$ et donc $\sum_{0}^{p/2}{}' \chi(n) > 0$; on retrouve ainsi en quelques lignes ce résultat de Dirichlet : si $p \equiv 3 \pmod 4$, <u>l'intervalle</u> $[0,p/2]$ <u>contient davantage de restes que de non-restes quadratiques modulo</u> p . <u>Exercice suggéré</u> : démontrer un résultat analogue avec $p \equiv 1 \pmod 4$ et $[0,p/4]$, ou encore avec p quelconque (impair) et $[0,p/3]$ (voir [5]). Pour une étude systématique de la répartition des restes et non-restes quadratiques, voir [6] .

7.2. - <u>Sommes de caractères</u> : Soit χ un caractère de Dirichlet modulo k . Pour $0 < a < b$, la formule de Poisson avec caractère donne

$$\left|\sum_{a}^{b}{}' \chi(n)\right| \leq (2\pi)^{-1} k^{1/2} \{ |T_a| + |T_b| \} \tag{64}$$

avec la notation $T_x = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\nu x} \frac{\chi(\nu)}{\nu}$. Mais si on pose $\lambda(\nu) = e^{2\pi i\nu x}\chi(\nu)$, on a évidemment

$$T_x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\nu)}{\nu} \ , \tag{65}$$

et λ est une <u>suite</u> k-<u>périodique</u> telle que (i) $|\lambda(\nu)| \leq 1$ pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$; (ii) $\lambda(\nu) = 0$ pour tout $\nu \equiv 0 \pmod k$. Un argument de "linéarité-périodicité" analogue à ceux du §4 donne

$$T_x = \sum_{h=1}^{k-1} \lambda(h) \sum_{\nu \equiv h(k)} \frac{1}{\nu} \tag{65'}$$

puis (en remarquant que $\sum_{\nu \equiv h(k)} \frac{1}{\nu}$ est une série alternée)

$$|T_x| \leq 2 \sum_{1}^{k/2} \frac{1}{h} < 2 \log k \ . \tag{66}$$

D'où finalement (en combinant (64), (65) et (66))

$$|\sum_{a}^{b}{}' \chi(n)| < 2\pi^{-1} k^{1/2} \log k \ . \tag{67}$$

Cette formule (67) n'est autre que l'<u>inégalité de Pólya</u> (sous une forme d'ailleurs un peu meilleure que celles figurant dans la littérature : [1], pp. 173-174 et 176 ; [2], pp. 320-321 ; [16], pp. 14-17). Pour $a = 0$ et χ <u>pair</u>, (64) montre également que la fonction sommatoire de χ est majorée par $\pi^{-1} k^{1/2} \log k$. Pour les détails, voir [19].

7.3. - <u>Equations fonctionnelles</u> : soient χ un caractère <u>réel</u> et $s = \sigma + it$ $(0 < \sigma < 1)$ une variable de Dirichlet dans la bande critique. Supposons par exemple χ <u>pair</u>. L'application <u>formelle</u> à $\sum_{0}^{\infty}{}' \frac{\chi(n)}{n^{1-s}}$ de la formule de Poisson avec caractère donne

$$L(1-s,\chi) = 2k^{-1/2} \sum_{1}^{\infty} \chi(\nu) \int_0^\infty x^{s-1} \cos 2\pi\nu x/k \, dx \ . \tag{68}$$

Les intégrales du membre de droite se calculent par le changement de variable $\xi = 2\pi\nu x/k$, en utilisant la formule classique ([25], pp.82-83)

$$\int_0^\infty (\cos \xi)\xi^{s-1} d\xi = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \ .$$

La formule (68) devient alors

$$L(1-s,\chi) = 2k^{-1/2} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \ L(s,\chi) \ : \tag{69}$$

c'est l'<u>équation fonctionnelle de</u> $L(s,\chi)$ pour χ réel pair ; calcul analogue pour χ impair, ou pour χ complexe (voir [18]). (Il reste naturellement à justifier le passage à la limite implicite $b \to \infty$, ce qui peut se faire par intégration par parties et sommation d'Abel.) Berndt et Schœnfeld ont traité plus généralement le cas de l'équation fonctionnelle des séries de Lerch-Hurwitz périodiques et des fonctions thêta périodiques : [4], [7].

On peut également traiter ainsi les séries de Kronecker périodiques (définies au § 7.9).

7.4. - Valeurs de $L(s,\chi)$ aux points entiers : la définition même des $b_r(\chi)$ (§ 4.4) donne immédiatement la valeur de $L(r,\chi)$ en fonction de $b_r(\bar{\chi})$ pour r pair si χ est pair, et pour r impair si χ est impair. L'équation fonctionnelle (69) donne alors $L(1-r,\chi)$ en fonction également de $b_r(\chi)$. Voir le § 6 ci-dessus, ainsi que [4], et aussi naturellement [17].

7.5. - Moments d'un caractère : soient χ un caractère modulo k et $m \geq 0$ un entier. On appelle moment d'ordre m de χ la somme

$$M_m(\chi) = \sum_1^k \chi(n)\, n^m \ . \tag{70}$$

Cette somme est de la forme $\sum_0^k{}' \chi(n) f(n)$ avec $f(x) = x^m$ et donc $f^{(m+1)}(x) = 0$. La formule d'Euler-Maclaurin avec caractère (59), combinée avec l'expression des $b_r(\chi)$ en fonction des $L(r,\bar{\chi})$ (voir § 7.4), donne ainsi (pour χ pair)

$$M_m(\chi) = 2\,\tau(\chi)\,k^m \sum_{r=1}^{m/2} \frac{(-1)^{r-1}\, m!}{(2\pi)^{2r}\,(m-2r+1)!}\, L(2r,\bar{\chi}) \ .$$

Formule analogue pour χ impair. Voir [4]. Ces formules règlent en particulier le problème du signe des moments $M_m(\chi)$ pour χ réel : voir [5].

7.6. - Signe des "paquets" de la série $L(1,\chi)$: pour $m \geq 0$, posons $L_m(s,\chi) = \sum_{mk}^{(m+1)k} \frac{\chi(n)}{n^s}$ ($m^{\text{ième}}$ "paquet" de longueur k dans $L(s,\chi)$). Davenport [11] a établi que si χ est réel et pair, on a $L_m(1,\chi) > 0$ pour tout $m \geq 0$: on peut donc dire alors que l'inégalité de Dirichlet $L(1,\chi) > 0$ "reste vraie paquet par paquet". La formule de Poisson avec caractère, combinée avec une suite d'intégrations par parties (application déguisée d'Euler-Maclaurin), montre que pour $m \geq 1$, $L_m(s,\chi)$ reste en fait positif sur tout l'intervalle réel $0 < s < 1$: voir [18], pp.11-14. Rap-

pelons ([11], [18]) que si χ est réel et impair, on a $L_o(1,\chi) > 0$ et (pour chaque χ) $L_m(1,\chi) > 0$ pour $m \geq m_o(\chi)$, mais que, pour $L(1,\chi)$ assez petit, on peut réaliser $L_1(1,\chi) < 0$, $L_2(1,\chi) < 0$, etc... ("phénomène de Davenport"). Par exemple, si $L(1,\chi) < \frac{1}{25}$, on a certainement $L_1(1,\chi) < 0$.

7.7. - Signe de la somme $\sum_1^k \chi(n) \log n$: notons $S(\chi)$ cette somme (c'est le $0^{\text{ième}}$ "paquet" de $-L'(0,\chi)$). Si χ est réel et pair, la formule de Poisson avec caractère, combinée avec une suite d'intégrations par parties (voir § 7.6) permet de montrer que si $L(1,\chi) > 1/6$, on a $S(\chi) < 0$, mais que si $L(1,\chi)$ est assez petit ($L(1,\chi) < 1/20$), on a au contraire $S(\chi) > 0$ (nouvel exemple de "phénomène de Davenport").

Conséquence arithmétique : soit p un nombre premier $\equiv 1 \pmod 4$, et notons R (resp. N) le produit des restes (resp. des non-restes) quadratiques modulo p contenus dans $[1,p-1]$. Alors, si $L(1,\chi) > 1/6$ (resp. $< 1/20$), on a $R < N$ (resp. $R > N$). (Ce résultat complète en un certain sens ceux du § 7.1, et aussi le fait que pour χ pair, $\sum_1^k n\chi(n) = 0$: somme des restes égale somme des non-restes. Le nombre $L(1,\chi)$ est une sorte de mesure de l'accumulation des non-restes "vers le bas" : contempler la formule

$$\log L(1,\chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p} + O(1).)$$

Exercice suggéré : faire les calculs décrits ci-dessus (en s'inspirant de [18] ou de [11]) et lire la littérature consacrée à l'ordre de grandeur de $L(1,\chi)$ (réf. [3], [5], [8], [10], [11] et [13] dans la bibliographie de notre exposé "Petite analyse de Fourier" = [18]).

7.8. - Signe de sommes $\sum \chi(n) f(n)$: soient χ un caractère réel modulo k, et $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle C^∞ par morceaux vérifiant (pour fixer les idées) $f(x) \geq 0$; $f(x) \to 0$ (quand $x \to \infty$) ; $f'(x) \leq 0$; $f''(x) \geq 0$. Pour a et b fixés, $0 \leq a < b \leq \infty$, posons

$$S(f,\chi) = \sum_a^b{}' \chi(n) f(n) \ .$$

Un problème classique est le suivant : <u>étudier le signe de</u> $S(f,\chi)$, <u>et éventuellement</u> (pour f fixée) <u>l'influence de l'ordre de grandeur de</u> $L(1,\chi)$ <u>sur ce signe</u> (comparer d'ailleurs avec les §§ 7.5 - 7.6 - 7.7). Il est clair que les formules sommatoires avec caractère permettent de "déblayer" considérablement ce problème : on y reviendra dans des exposés ultérieurs. Bornons-nous ici à signaler que se rattachent à ce problème, directement ou indirectement, les questions suivantes : (i) les "phénomènes de Davenport" (pour $\sum \chi(n)/n$ et $\sum \chi(n) \log n$) vus aux §§ 7.6 - 7.7 ; (ii) le problème du signe des sommes $\sum \chi(n)\, e^{-ny}$ pour $y > 0$ voisin de 0 ; (iii) le contre-exemple de Heilbronn à une conjecture de Chowla concernant les fonctions sommatoires itérées de caractères de Dirichlet ; et naturellement (iv) le problème des zéros réels (exceptionnels ou non) de $L(s,\chi)$ sur $0 < s < 1$.

7.9. - <u>Sommation</u> (<u>ou accélération de la convergence</u>) <u>des séries de Kronecker</u> : soit $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ une forme quadratique binaire indécomposable, définie positive et à coefficients entiers. Soit d'autre part χ un caractère de conducteur k (on ne suppose aucune relation spéciale entre k et le discriminant de F) . Posons

$$Z_F(s,\chi) = \sum_m \sum_n \frac{\chi(F)}{F^s} \ , \ F = F(m,n) \ ;$$

si $k = 1$ ($\chi = \chi_o$, caractère principal), et si (pour fixer les idées) le discriminant $-d$ de F est supposé fondamental, Z_F est la fonction zêta d'une classe d'idéaux du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, et on sait ([21] , pp. 273-275) que la formule de Poisson classique permet de transformer Z_F en série rapidement convergente de fonctions de Bessel $K_{s-\frac{1}{2}}$. Cette technique d'accélération de la convergence donne le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle de Z_F et fournit une démonstration naturelle de la première formule-limite de Kronecker. Elle a également permis à Low de démontrer la non-existence de zéros réels (sur $0 < s < 1$) pour la fonction $\zeta_K(s)$ de tous les corps quadratiques imagi-

naires $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ avec $d < 581000$ (à une exception près). (Rappelons que $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi_{-d})$, avec $\chi_{-d}(n) = (\frac{-d}{n})$, caractère de Kronecker de K , et que d'autre part $\zeta_K(s) = \sum_F Z_F(s,\chi_o)$, F décrivant une famille de $h(-d)$ formes non équivalentes de discriminant $-d$.) Une application intéressante de la formule de Poisson <u>périodique</u> (27) est, plus généralement, de donner de la même manière un développement de $Z_F(s,\chi)$ en série rapidement convergente de fonctions $K_{s-\frac{1}{2}}$, et de simplifier ainsi certains calculs faits notamment par Baker et Stark à propos du problème "$h(-d) = 1$" : il suffit de remarquer que dans $Z_F(s,\chi)$, chaque série partielle $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\chi(F)}{F^s}$ (pour s et $m \neq 0$ fixés) est de la forme $\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda(n)f(n)$, avec $\lambda(n) = \chi(F(m,n))$ (λ est donc k-<u>périodique</u>) et $f(x) = F(m,x)^{-s}$.

7.10. - <u>Résultats de Rosser et Low</u> : terminons sur une remarque relative aux §§ 7.8 et 7.9. D'après Rosser, si χ est un caractère primitif réel <u>pair</u> de discriminant < 980 , $L(s,\chi)$ n'admet pas de zéro réel sur $0 < s < 1$. D'après Low, ce même résultat est vrai pour χ <u>impair</u> de discriminant < 581000 : la supériorité des performances de Low sur celle de Rosser illustre bien la supériorité de la formule de Poisson (utilisée implicitement par Low : §7.9) sur la formule d'Abel (utilisée par Rosser) en tant qu'instrument d'accélération de la convergence. A ce propos, on peut observer que si χ est un caractère réel <u>pair</u> de conducteur k , et si on prend $F(x,y) = x^2 + y^2$ (par exemple et pour simplifier), et $\psi(n) = (\frac{-4}{n})$ (caractère de Kronecker de $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$) , on a

$$4\,L(s,\chi)L(s,\psi) = Z_F(s,\chi) .$$

Le problème des zéros réels de $L(s,\chi)$, χ <u>pair</u> (c'est-à-dire le problème des zéros réels de $\zeta_K(s)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{k})$, quadratique <u>réel</u>), est donc le même que celui des zéros réels de $Z_F(s,\chi)$, ce qui fournirait peut-être à un calculateur astucieux un moyen d'étendre le domaine de validité des résultats numériques de Rosser grâce à des calculs "à la Low". Signalons cependant que les coefficients du développement de Bessel de $Z_F(s,\chi)$

sont compliqués -essentiellement des sommes de Kloosterman- et qu'on risque bien de perdre ainsi du côté de la simplicité des calculs ce qu'on a gagné du côté de la vitesse de convergence.

*

Certaines des questions évoquées rapidement dans les §§ 7.7 à 7.10 seront évidemment reprises en détail dans des exposés ultérieurs. Signalons par ailleurs que la sommation de Poisson des Z_F (§§ 7.9 et 7.10) et l'apparition de "sommes de Riesz" et de fonctions de Bessel $J_\nu(x)$ dans la méthode de Berndt (ainsi que l'apparition de $J_o(x)$ dans la formule sommatoire de Voronoï relative à $\sum r_2(n) f(n)$: voir par exemple [3]) suggèrent l'idée d'appliquer la <u>formule de Poisson</u> et plus généralement le <u>calcul des distributions</u> dans $\mathbf{R}^N$ à la fabrication de formules sommatoires, périodiques ou non, à une seule dimension. Pour des développements de cette remarque, voir [20].

BIBLIOGRAPHIE

[1] APOSTOL T.M. - Introduction to Analytic Number Theory, Springer (1976).

[2] AYOUB R. - An introduction to the Analytic Theory of Numbers, A.M.S. Survey n° 10 (1963).

[3] BERNDT B.C. - The Voronoï Summation Formula. Theory of Arithmetic Functions, Lecture Notes n° 251, Springer (1972).

[4] BERNDT B.C. - Character Analogue of the Poisson and Euler-Maclaurin Summation Formulas with Applications. J. Number Theory 7 (1975), 413-445.

[5] BERNDT B.C. - Periodic Bernoulli Numbers, Summation Formulas and Applications. Theory and Application of Special Functions, Academic Press (1976).

[6] BERNDT B.C. - Classical Theorems on Quadratic Residues. Enseign. math. 12 (1976), 261-304.

[7] BERNDT B.C. + SCHOENFELD L. - Periodic Analogues of the Euler-Maclaurin and Poisson Summation Formulas with Applications to Number Theory. Acta arithm. 28 (1975), 23-68.

[8] BOREVICH Z. + SHAFAREVICH I.R. - Number Theory, Academic Press (1966).

* [9] BOURBAKI N. - Fonctions d'une variable réelle. Chap. VI, Hermann (1960).

* [10] DAVENPORT H. - Multiplicative Number Theory, Markham (1967).

[11] DAVENPORT H. - On the series for L(1) . J. London Math. Soc. 24 (1949), 229-233.

* [12] DIEUDONNE J. - Calcul infinitésimal, Hermann (1960).

* [13] EDWARDS N.M. - Riemann's Zeta Function, Academic Press (1974).

* [14] HARDY G.H. - Divergent Series, Oxford (1967).

[15] HASELGROVE C.B. + DAVIES D. - The Evaluation of Dirichlet L-functions. Proc. Royal Soc. London 264 (1961), 122-132.

[16] HUXLEY N.M. - The Distribution of Prime Numbers, Oxford (1972).

[17] IWASAWA K. - Lectures on p-adic L-functions, Princeton (1969).

[18] JOLY J.R. - Petite analyse de Fourier et évaluation de $L(1,\chi)$ paquet par paquet. Sém. Th. Nombres, Grenoble (1975/76).

[19] JOLY J.R. - Suites périodiques, linéarité et inégalité de Polya. Bull. Sc. Math., 101 (1977), à paraître.

[20] JOLY J.R. - Formules sommatoires, distributions périodiques et applications à la Théorie des Nombres, II. Sém. Th. Nombres, Grenoble, à paraître.

[21] LANG S. - Elliptic Functions. Addison-Wesley (1973).

[22] LANG S. - Introduction to Modular Forms. Springer (1976).

* [23] MORDELL J.L. - Some Applications of Fourier Series in the Analytic Theory of Numbers. Proc. Cambridge Phil. Soc. 24 (1928), 585-596.

[24] POLYA G. - Ueber die Verteilung der Quadratische Reste und Nichtreste. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1918), 21-29.

* [25] RADEMACHER H. - Topics in Analytic Number Theory. Springer (1966).

[26] ROSSER B. + SCHOENFELD L. - Approximations of the Riemann zeta-function. A paraître.

[27] ZEMANIAN A.H. - Distribution Theory and Transform Analysis. Mc Graw + Hill (1965).

[28] VALIRON G. - Théorie des Fonctions. Vol. 1, Masson (1966).

[29] WEIL A. - Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker. Springer (1976).

[Corps quadratiques, caractères de Kronecker et séries $L(s,\chi)$ associées : [2], [8].

Nombres premiers et séries $L(s,\chi)$: [10], [16].

Formules sommatoires classiques : ouvrages marqués * .

Séries de Fourier et Théorie des Nombres : [23], plus les bibliographies détaillées et très utiles à la fin de [4], [5] et [6].

Calculs numériques sur $\zeta(s)$ et $L(s,\chi)$ dans la bande critique comme application de formules sommatoires : [13], [15] et sans doute [26].]

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)