SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MICHEL WALDSCHMIDT

Indépendance algébrique d'exponentielles

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 2, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A2_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1970-1971 , exposé n° 2

27 Octobre 1970

INDEPENDANCE ALGEBRIQUE D'EXPONENTIELLES

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

Dans le premier exposé [12], nous avons vu plusieurs théorèmes de transcendance concernant les valeurs de la fonction exponentielle. Pour compléter l'information sur la transcendance d'un nombre complexe α, deux voies nous sont offertes. La première consiste à chercher une mesure de transcendance de α, c'est-à-dire une borne inférieure de la fonction

$$\Phi(\alpha, n, H) = \min_{n, H} |P(\alpha)|$$

où le minimum est pris sur les polynômes non nuls $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et de hauteur au plus H. La deuxième voie consiste à étudier l'indépendance algébrique de plusieurs nombres transcendants et nous verrons que, pour résoudre ce problème, il est utile d'avoir des renseignements précis sur le premier.

Le résultat le plus ancien sur l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle est celui de Lindemann-Weierstrass, en 1885 [12]; la démonstration, qui se fait par l'absurde, repose sur l'étude de formes linéaires d'exponentielles, et utilise essentiellement le fait que les nombres

étudiés sont les valeurs à des points algébriques de fonctions qui satisfont une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques : $y' = y$. Les généralisations ultérieures de cette méthode pour l'étude de E fonctions par Siegel, Sidlovskij, ... conservent ces hypothèses et sont insuffisantes pour étudier des propriétés de transcendance quand les arguments des exponentielles ne sont plus algébriques, par exemple pour $a^b = \exp(b \operatorname{Log} a)$ où a et b sont algébriques, $a \neq 0$, 1 et b irrationnel.

Néanmoins toutes les démonstrations de transcendance de ces théorèmes utilisent un principe commun : soit K une extension de $\mathbb{Q}$ contenant les nombres étudiés ; on suppose que K est un corps de nombres et on construit, en utilisant les hypothèses faites sur K, un élément non nul α de K, entier sur Z, qui vérifie les relations

$$|\alpha| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |\sigma\alpha| \leq h_\sigma$$

pour tous les conjugués $\sigma\alpha$ de α, avec $\varepsilon \times \prod_\sigma h_\sigma < 1$. La relation $|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| \geq 1$ permet d'obtenir une contradiction qui montre que l'un au moins des nombres considérés est transcendant.

Nous voulons, en utilisant les mêmes principes, obtenir un théorème d'indépendance algébrique. On est alors amené à minorer un polynôme $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont des nombres complexes algébriquement indépendants. Pour cela, Lang [3,4] introduit les définitions suivantes :

Soit $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_q]$. On définit la <u>taille</u> de P par :

$$t(P) = \max[d(P), \operatorname{Log} H(P)],$$

où d(P) est le degré total de P et H(P) sa hauteur.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ des nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On dit que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ a <u>un type de transcendance</u> supérieur ou égal à τ s'il existe deux réels positifs t_o et k tels que, pour $t(P) > t_o$, on ait

$$\operatorname{Log} |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)| > -k[t(P)]^\tau$$

pour tout polynôme non nul P de taille t(P).

Le principe de Dirichlet et l'indépendance algébrique de $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ montrent que $\tau \geq q+1$. On voit alors apparaître une différence essentielle avec le cas où α est algébrique : on a dans ce cas

$$\text{Log}\,|P(\alpha)| > -k\,t(P) \qquad \text{pour} \quad t(P) > t_o \quad \text{et} \quad P(\alpha) \neq 0 \ .$$

C'est en grande partie à cause de cette différence que les résultats que nous allons obtenir sont moins précis que les résultats de transcendance.

Avec cette définition, Lang obtient le

THEOREME 1 [3,4]. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ des nombres complexes algébriquement indépendants de type de transcendance $\tau \geq q+1$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ (resp. $y_1, \ldots, y_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Si $mn \geq \tau(m+n)$, alors l'un au moins des nombres $\exp(x_i\, y_j)$ est transcendant sur $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$.

Ce résultat est un complément du théorème que nous avons vu dans [12] sur la transcendance des valeurs de la fonction exponentielle (Lang [3], [4] ; Ramachandra [5]) correspondant au cas $q = 0$ et qui peut s'énoncer ainsi :

Si $x_1, \ldots, x_n$ (resp. y_1, y_2, y_3) sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, parmi les $3n$ nombres $\exp(x_i\, y_j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 3$, $n-1$ sont transcendants. Ramachandra [5] conjecture que $n-1$ de ces nombres sont algébriquement indépendants. On en déduirait la solution d'une conjecture de Gel'fond (qu'il a lui-même résolu pour $d = 3$, comme nous le verrons) : si a est un nombre algébrique, $a \neq 0$, 1 et si b est un nombre algébrique de degré $d \geq 3$, les $d-1$ nombres

$$a^b \ , \ \ldots \ , \ a^{b^{d-1}}$$

sont algébriquement indépendants (voir aussi problème 7 de Schneider [6]).

Ces conjectures sont des cas particuliers de la suivante :

Soient $x_1, \ldots, x_n$ (resp. y_1, y_2) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors $n-1$ des $2n$ nombres $\exp(x_i\, y_j)$ doivent être algébriquement indépendants.

Dans le cas $n = 2$, ce problème a été posé par Alaoglu et Erdös, Lang et Schneider [12].

Enfin la conjecture la plus générale, contenant tous les résultats et toutes les conjectures concernant la fonction exponentielle (par exemple l'indépendance algébrique de nombres tels que e^e , 2^e , 2^π , π^π , π^e, $\mathrm{Log}\,\pi$) a été faite par Schanuel [1, 6].

Conjecture de Schanuel : Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})$$

est supérieur ou égal à n .

Le théorème 1 constitue une approche de cette conjecture et il a l'avantage de s'étendre à des fonctions autres que la fonction exponentielle [4], mais il faut, pour l'utiliser, déterminer le type de transcendance de nombres complexes, et c'est là un problème très difficile, même dans le cas $q = 1$. Dans ce cas (et, actuellement, dans ce cas seulement), on connait un critère valable pour tout nombre complexe α_1 . Ce résultat a d'abord été trouvé par Gel'fond en 1949 [2] qui considère une suite de polynômes $P_N \in \mathbb{Z}[X]$. La difficulté vient de l'existence de nombres transcendants (par exemple les nombres de Liouville [6], ou, plus généralement, les U-nombres de Mahler [6]) qui vérifient :
pour tout réel $\theta > 0$ et tout entier $n \geq n_o(\theta)$, il existe une suite $(H_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ d'entiers positifs, et une suite $(P_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ de polynômes à coefficients entiers, avec $H(P_\lambda) \leq H_\lambda$; $d(P_\lambda) \leq n$; $\lim H_\lambda = +\infty$ et $0 < |P_\lambda(\alpha)| < H_\lambda^{-\theta \cdot n}$.

Pour obtenir son critère, Gel'fond suppose que $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe une suite "assez dense" (P_N) de polynômes non nuls de $Z[X]$ tels que

$$|P_N(\alpha)| < \exp - C(N)[t(P_N)]^2$$

où $C(N) \to +\infty$. La conclusion est alors que α est algébrique. On peut remplacer $C(N)$ par une constante assez grande (Lang [4], Tijdeman [8]) mais on peut surtout améliorer ce résultat en dissociant le degré et la hauteur de P_N . On obtient alors le

Critère de transcendance [9, 14]. Soient α un nombre complexe, σ_1 et σ_2 deux fonctions réelles de variable réelle x, strictement croissantes, qui tendent vers $+\infty$ avec x ; soient $a_1(x)$ et $a_2(x)$ deux fonctions réelles de x ; on suppose que, pour tout $x > 0$, on a

$$\sigma_2(x) \leq \sigma_1(x) \; ; \; \sigma_i(x) \leq a_i(x)\, \sigma_i(x-1) \; , \quad i = 1 \text{ ou } 2 .$$

On suppose qu'il existe un entier $N_o > 0$ et, pour tout entier $N > N_o$, un polynôme $P_N \in \mathbb{Z}[X]$ de hauteur H_N et de degré d_N avec

$$|P_N(\alpha)| < \exp - C(N)\, \sigma_1(N)\, \sigma_2(N) \; ; \; \operatorname{Log} H_N \leq \sigma_1(N) \; ; \; d_N \leq \sigma_2(N)$$

où $C(N) = \max [8, 4\, a_1(N)\, a_2(N)]$.

Alors α est algébrique et il existe un entier N_1 tel que, pour tout $N > N_1$, on ait $P_N(\alpha) = 0$.

Rappelons qu'on ne connait pas de tel critère d'indépendance algébrique de q nombres $(q \geq 2)$.

Une des difficultés que l'on rencontre dans l'application de ce critère est la recherche d'une majoration pour $a_i(N)$, exprimant que la suite $\sigma_i(N)$ ne tend pas trop vite vers $+\infty$. En particulier il parait difficile, à cause de cette condition, d'utiliser ce critère dans une démonstration par récurrence comme celles de Baker. D'autre part on est amener à majorer le nombre de zéros de la fonction auxiliaire utilisée dans la méthode de Gel'fond [12], ce qui n'a été fait jusqu'à présent que pour la fonction exponentielle. Dans ce cas, la fonction auxiliaire s'écrit

$$F : z \to \sum_{i=1}^{\ell} P_i(z)\, e^{W_i z}$$

où $P_1, \ldots, P_\ell$ sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non tous nuls de degré $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$, et $W_1, \ldots, W_\ell$ des nombres complexes deux à deux distincts. Une évaluation du déterminant de la matrice

$$\left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \left(z^{j-1} e^{W_i z}\right)_{z=0}\right] \quad (1 \leq j \leq \sigma_i \; , \; 1 \leq i \leq \ell) \; (1 \leq s \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i)$$

permet d'obtenir une majoration du nombre N de zéros de F dans un disque $|z - z_o| \leq R$ en fonction de R, $\Omega = \max_{1 \leq i \leq \ell} |W_i|$, $n = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i$, et $\Delta = \min_{i \neq j} |W_i - W_j|$.

Turan avait conjecturé que N pouvait être majoré indépendemment de Δ. On peut effectivement majorer N par [14] :

$$N < \min_{\lambda > 0} \left[\frac{n}{\lambda} + \frac{2(1 + n^{\lambda})}{\lambda \operatorname{Log} n} (1 + \Omega . R) \right].$$

Tijdeman a obtenu la majoration suivante : $N \leq 3n + 4\Omega . R$.

Grâce à l'une ou l'autre de ces majorations, on peut améliorer le cas $q = 1$ du théorème 1, et supprimer des hypothèses inutiles de deux théorèmes de Gel'fond [2] et d'un théorème de Šmelev [7]. On obtiendra de plus un nouveau résultat [9, 15].

ENONCES DES THEOREMES ET CONSEQUENCES

Soient $x_1, \ldots, x_N$ (resp. $y_1, \ldots, y_M$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

THEOREME 2 [11, 14]. Si $MN \geq 2(M+N)$, alors deux au moins des nombres

$$e^{x_i y_j} \qquad (1 \leq i \leq N \; ; \; 1 \leq j \leq M)$$

sont algébriquement indépendants.

THEOREME 3 [8, 11, 14]. Si $MN \geq M + 2N$, alors deux au moins des nombres

$$y_j \, , \; e^{x_i y_j} \qquad (1 \leq i \leq N \; ; \; 1 \leq j \leq M)$$

sont algébriquement indépendants.

THEOREME 4 [8, 11, 14]. Si $MN > M + N$, alors deux au moins des nombres

$$x_i \, , \; y_j \, , \; e^{x_i y_j} \qquad (1 \leq i \leq N \; ; \; 1 \leq j \leq M)$$

sont algébriquement indépendants.

On peut compléter le théorème 3 de la manière suivante :

THEOREME 5 [9, 15]. Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) des nombres complexes $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants. Si les deux nombres

$$e^{x_1 y_2} \, , \; e^{x_2 y_2}$$

sont algébriques, alors deux au moins des nombres

$$x_i\ ,\ y_j\ ,\ e^{x_i y_j} \quad (i = 1, 2\ ;\ j = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

Remarques.

1) La condition $MN \geq 2(M+N)$ du théorème 2 s'écrit (puisque M et N jouent des rôles symétriques) $M \geq 3$ et $N \geq 6$ ou $M \geq 4$ et $N \geq 4$. Un énoncé équivalent au théorème 1 est le suivant :

Soient $a_1, \ldots, a_m$ des nombres complexes dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Si $mn \geq 2(m+n)$, alors deux des nombres

$$a_i^{b_j} \quad (1 \leq i \leq m\ ;\ 1 \leq j \leq n)$$

sont algébriquement indépendants.

Les principaux corollaires sont les suivants :

COROLLAIRE 2.1. Soient $b_1, \ldots, b_m$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Pour $n = \ell = 4$ (resp. $n = 6$ et $\ell = 3$), deux des 10 nombres (resp. des 15 nombres)

$$\exp(b_i b_j)\ ,\quad 1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq \ell$$

sont algébriquement indépendants.

Par exemple, si t est transcendant et $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$, deux des sept nombres

$$\exp(a t^i)\ ;\quad 0 \leq i \leq 6$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 2.2. Soient $b_0, \ldots, b_k$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et $a_1, \ldots, a_m$ des nombres complexes dont les logarithmes sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z} b_0 + \mathbb{Z} b_1$ (resp. $\mathbb{Z} b_0 + \mathbb{Z} b_1 + \mathbb{Z} b_2$). Si $mk > m+k$ (resp. $m = k = 2$), alors deux des nombres

$$a_i^{b_j b_\ell} \quad (i = 1, \ldots, m\ ;\ j = 0, \ldots, k\ ;\ \ell = 0, 1\ (\text{resp. } \ell = 0, 1, 2))$$

sont algébriquement indépendants.

Par exemple, si c est un nombre irrationnel quadratique et si a_o, a_1 (resp. a_o, a_2) sont des nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, deux des 5 nombres

$$a_o^c, \quad a_1^c, \quad a_2^c, \quad x = \exp \frac{\operatorname{Log} a_1 \operatorname{Log} a_2}{\operatorname{Log} a_o}, \quad x^c$$

sont algébriquement indépendants. Plus généralement, on a :

COROLLAIRE 2.3. *Soit c un nombre irrationnel quadratique. Soient a_o, a_1, b des nombres complexes tels que $1, b, c, bc$ (resp. $\operatorname{Log} a_o$, $\operatorname{Log} a_1$, $c \operatorname{Log} a_o$, $c \operatorname{Log} a_1$) soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors deux des huit nombres*

$$a_i, \quad a_i^b, \quad a_i^c, \quad a_i^{bc} \qquad (i = 0, 1)$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 2.4. *Soient y_1 et y_2 deux nombres complexes, et K une extension de $\mathbb{Q}$ de degré de transcendance inférieur ou égal à 1. Si $x^{y_1} \in K$ et $x^{y_2} \in K$ pour tout entier x, alors $1, y_1, y_2$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$.*

2) La condition $MN \geq M+2N$ du théorème 3 est équivalente à $M \geq 3$ et $N \geq 3$ ou $M \geq 4$ et $N \geq 2$. Le premier cas améliore un théorème de Gel'fond [2], le second cas un théorème de Šmelev [7].

Les principaux corollaires sont, pour $M \geq 3$ et $N \geq 3$:

COROLLAIRE 3.1. *Soient α et β des nombres algébriques tels que $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \geq 3$. Alors deux au moins des 4 nombres*

$$\alpha^\beta, \quad \alpha^{\beta^2}, \quad \alpha^{\beta^3}, \quad \alpha^{\beta^4}$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 3.2. *Soient α un nombre algébrique, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, et x un nombre transcendant. Alors deux au moins des 5 nombres*

$$x, \quad \alpha^x, \quad \alpha^{x^2}, \quad \alpha^{x^3}, \quad \alpha^{x^4}$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 3.3. *Soient α_1, α_2, α_3 (resp. β_1, β_2) des nombres algébriques tels que $\log\alpha_1$, $\log\alpha_2$, $\log\alpha_3$ (resp. 1, β_1, β_2) soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors deux au moins des six nombres*

$$\alpha_i^{\beta_j} \quad (i = 1, 2, 3 \; ; \; j = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

Pour $M \geq 4$ et $N \geq 2$, on obtient les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 3.4. *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ des nombres algébriques tels que $\log\alpha_1$, $\log\alpha_2$ (resp. 1, β_1, β_2, β_3) soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors deux au moins des six nombres*

$$\alpha_i^{\beta_j} \quad (i = 1, 2 \; ; \; j = 1, 2, 3)$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 3.5. *Soient a_1, a_2, β des nombres algébriques. Si $\log a_1$, $\log a_2$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants et si β est irrationnel, alors deux au moins des 5 nombres*

$$\frac{\log a_1}{\log a_2}, \quad a_1^{\beta}, \quad a_2^{\beta}, \quad a_1^{\beta^2}, \quad a_2^{\beta^2},$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 3.6. *Soient b et c deux nombres algébriques, tels que $1, b, c$ et bc soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$. Le degré de transcendance de*

$$\mathbb{Q}(a, a^b, a^c, a^{bc}, a^{c^2}, a^{bc^2})$$

est supérieur ou égal à deux.

3) La condition $MN > M+N$ du théorème 4 s'écrit (puisque M et N jouent des rôles symétriques) $M \geq 3$ et $N \geq 2$. On améliore ainsi un théorème de Gel'fond [2].

Les principaux corollaires sont les suivants :

COROLLAIRE 4.1. *Soient* a *et* t *deux nombres complexes,* $a \neq 0$ *et* t *transcendant. Alors deux des* 6 *nombres*

$$a\ ,\ t\ ,\ e^{a}\ ,\ e^{at}\ ,\ e^{at^2}\ ,\ e^{at^3}$$

sont algébriquement indépendants.

En particulier, si α est algébrique $\neq 0\ ,\ 1$ et si r est rationnel non nul, deux des nombres

$$\operatorname{Log}\alpha\ ,\ \exp(\operatorname{Log}\alpha)^{r+1}\ ,\ \exp(\operatorname{Log}\alpha)^{2r+1}\ ,\ \exp(\operatorname{Log}\alpha)^{3r+1}$$

(resp. deux des nombres

$$e\ ,\ \exp e^{r}\ ,\ \exp e^{2r}\ ,\ \exp e^{3r}\ )$$

sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE 4.2. *Soient* a *et* b *deux nombres algébriques,* $a \neq 0\ ,\ 1$ *et* $[\mathbb{Q}(b):\mathbb{Q}] \geq 3$. *Deux des nombres*

$$\operatorname{Log} a\ ,\ a^{b}\ ,\ a^{b^2}\ ,\ a^{b^3}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

4) Le théorème 5 peut s'énoncer ainsi :

Soient a_1 , a_2 deux nombres algébriques dont les logarithmes sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et soit x un nombre complexe irrationnel. Alors deux des 5 nombres

$$x\ ,\ \operatorname{Log} a_1\ ,\ \operatorname{Log} a_2\ ,\ a_1^{x}\ ,\ a_2^{x}$$

sont algébriquement indépendants.

Ce théorème admet de nombreux corollaires. En particulier :

COROLLAIRE 5.1. *Soient* α *et* β *deux nombres algébriques,* $\alpha \neq 0, 1$ *et* $\beta \neq 0$, *et soit* r *un nombre rationnel non nul. Alors l'un au moins des deux nombres*

$$\alpha^{\beta(\operatorname{Log}\alpha)^{r}}\ ,\ \alpha^{\beta(\operatorname{Log}\alpha)^{2r}}$$

est transcendant.

On en déduit que, pour α et β algébriques, $\beta \neq 0$, les trois nombres $e^{\beta e^{\alpha}}$, $e^{\beta e^{2\alpha}}$, $e^{\beta e^{3\alpha}}$ ne sont pas tous algébriques. Dans le cas où $\alpha = \beta$, on peut améliorer ce résultat :

COROLLAIRE 5.2. *Soient* x *et* y *deux nombres complexes,* $x \neq 0, 1$ *et* y *irrationnel. On suppose* x^y *et* x^{y^2} *algébriques. Alors deux des trois nombres* x, y, Log x *sont algébriquement indépendants.*

En particulier, si $\alpha \neq 0$ est algébrique, l'un au moins des deux nombres $\exp(\alpha e^{\alpha})$, $\exp(\alpha e^{2\alpha})$ est transcendant. Pour $\alpha = 1$, ceci résoud le huitième problème de Schneider [6].

Le corollaire 5.2. est une conséquence du

COROLLAIRE 5.3. *Soient* α, β, γ *des nombres algébriques. Si* Log α, Log γ (*resp.* Log β, Log γ) *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants, le degré de transcendance de*

$$\mathbb{Q}\left(\text{Log}\,\alpha,\ \text{Log}\,\beta,\ \text{Log}\,\gamma,\ \exp\frac{\text{Log}\,\alpha\ \text{Log}\,\beta}{\text{Log}\,\gamma}\right)$$

est supérieur ou égal à 2.

Ainsi, pour r rationnel, l'un au moins des deux nombres e^{π^r}, $e^{\pi^{2-r}}$ (resp. $e^{i\pi^r}$, $e^{i\pi^{2-r}}$ si $r \neq 1$) est transcendant.

COROLLAIRE 5.4. *Soient* a *et* x *deux nombres complexes* $a \neq 0, 1$. *Si* x *et* Log a *sont algébriquement dépendants, l'un au moins des trois nombres* a^x, a^{x^2}, a^{x^3} *est transcendant.*

Par exemple si r est rationnel, les trois nombres $e^{\pi^{r+1}}$, $e^{\pi^{2r+1}}$, $e^{\pi^{3r+1}}$ ne sont pas tous algébriques.

COROLLAIRE 5.5. *Soient* α *et* β *deux nombres algébriques,* $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0, 1$. *Si le nombre* $\exp\frac{1}{\alpha}(\text{Log}\,\beta)^2$ *est algébrique, les deux nombres* e^{α} *et* Log β *sont algébriquement indépendants.*

Par suite l'une au moins des deux propriétés suivantes est vraie : e^{π^2} est transcendant, e et π sont algébriquement indépendants.

Citons une dernière conséquence du théorème 5 :

COROLLAIRE 5. 6. Soient α et β deux nombres algébriques, $\alpha \neq 0, 1$ et $\beta \neq 0$. L'un des deux nombres

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}\alpha^{\beta}, \quad \exp\frac{(\operatorname{Log}\alpha)^2}{\operatorname{Log}\operatorname{Log}\alpha^{\beta}}$$

est transcendant.

Donc l'un des deux nombres $\operatorname{Log}\pi$, $\exp\frac{\pi^2}{\operatorname{Log}\pi}$ est transcendant.

Le corollaire 5. 6. revient à dire que, pour α et β algébriques non nuls, l'un des deux nombres

$$e^{\beta e^{\alpha}}, \quad e^{\frac{\beta^2}{\alpha}e^{2\alpha}}$$

est transcendant (cf. corollaire 5. 2.).

Avant d'étudier les démonstrations, indiquons quelques problèmes (qui sont tous des conséquences de la conjecture de Schanuel).

1) Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Montrer que, si $e^{x_1 y_1}$ est algébrique, alors deux au moins des nombres

$$x_i, \quad y_j, \quad e^{x_i y_j} \quad (i = 1, 2 \; ; \; j = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

En particulier, si a est algébrique, $a \neq 0$, $a \neq 1$, et si b est irrationnel quadratique, montrer que les deux nombres

$$\operatorname{Log} a, \quad a^b$$

sont algébriquement indépendants. (exemple : π et e^{π}).

2) Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres algébriques, tels que $\operatorname{Log} a_1$, $\operatorname{Log} a_2$ (resp. 1 , b_1 , b_2) soient $\mathbb{Q}$ - linéairement indépendants. Montrer que deux au moins des quatre nombres

$$a_i^{b_j} \quad (i = 1, 2 \; ; \; j = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

(Ceci généraliserait les corollaires 3.3. et 3.4.).

3) Montrer que, si x est un nombre complexe, $x \neq 0$ et $x \neq 1$, l'un au moins des deux nombres

$$x \ , \ x^e$$

est transcendant.

4) Soit x un nombre complexe irrationnel. Montrer que l'un au moins des deux nombres

$$x^x \ , \ x^{x^2}$$

est transcendant.

APERCU DES DEMONSTRATIONS

Les démonstrations suivent le schéma que nous avions donné dans l'exposé précédent, la partie 4 étant remplacée par le critère de transcendance. La démonstration complète du théorème 2 se trouve dans [14] (pour un cas particulier, voir [13]) ; celle du théorème 5 est exposée en détail dans [15] et succintement dans [9]. Les théorèmes 3 et 4 sont démontrés par Tijdeman [8] qui distingue, dans le théorème 3, les deux cas $M = 3$, $N = 3$ et $M = 4$, $N = 2$. Nous allons simplement montrer comment une seule démonstration permet de résoudre ces deux cas.

Démonstration du théorème 3

Soient $x_1, \ldots, x_N$ (resp. $y_1, \ldots, y_M$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et K une extension de $\mathbb{Q}$ de degré de transcendance inférieur à 2, et contenant les $M(N+1)$ nombres y_j, $\exp(x_i y_j)$ $(1 \leq i \leq N \ ; \ 1 \leq j \leq M)$.

Il existe α_o, $\alpha_1 \in K$ tels que $K = \mathbb{Q}(\alpha_o, \alpha_1)$ où α_o est entier sur $\mathbb{Z}[\alpha_1]$. Supposons $MN = M + 2N$ (c'est-à-dire $M = N = 3$ ou $M = 4$ et $N = 2$). Nous voulons obtenir une contradiction. D'après le théorème de Gel'fond-

Schneider sur la transcendance de a^b [2, 6], le nombre α_1 est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Soit $d = [K : \mathbb{Q}(\alpha_1)]$. Les nombres $\{y_j , \exp(x_i y_j) \mid 1 \le i \le N , 1 \le j \le M\}$ s'écrivent $\{\frac{N_\ell}{N_o} \mid 1 \le \ell \le 12\}$ où $N_k (0 \le k \le 12)$ est un élément de $\mathbb{Z}[\alpha_o , \alpha_1]$.

Ainsi il s'écrit de manière unique

$$\sum_{h_o=0}^{d-1} \sum_{h_1} a_{h_o,h_1} \alpha_o^{h_o} \alpha_1^{h_1} \quad , \text{ où } \quad a_{h_o,h_1} \in \mathbb{Z} .$$

Soit r le maximum des degrés des N_k $(0 \le k \le M(N+1))$ et de α_o^d, comme polynômes en α_1. Soit X un nombre entier arbitrairement grand ; k_o, k_1, .. désigneront des constantes indépendantes de X. On pose

$$Y = 36\, r^2 X^M .$$

1. - Il existe des entiers rationnels non tous nuls, $P(\lambda_1, \dots , \lambda_{M+2}) = P(\lambda)$, définis pour

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 \le \lambda_i \le 2X^2 - 1 , & 1 \le i \le M \\ 0 \le \lambda_{M+1} \le Y - 1 \\ 0 \le \lambda_{M+2} \le d - 1 \end{cases}$$

majorés par $|P(\lambda)| < \exp k_o X^M$, et tels que la fonction F définie par

$$(2) \qquad F(z) = \sum_{(\lambda)} P(\lambda) \exp\Big(\sum_{j=1}^{M} \lambda_j y_j z\Big) . \alpha_1^{\lambda_{M+1}} \alpha_o^{\lambda_{M+2}}$$

vérifie

$$(3) \qquad \frac{d^\sigma F}{dz^\sigma} (a_1 x_1 + \dots + a_N x_N) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \le \sigma \le X^{M-1} , \quad 1 \le a_i \le X^{M-2} , \quad 1 \le i \le N .$$

En effet, en notant $a.x$ la somme $a_1 x_1 + \dots + a_N x_N$, on a

$$(4) \qquad \frac{d^\sigma F}{dz^\sigma} (a.x) = \sum_{(\lambda)} P(\lambda) . \Big(\sum_{j=1}^{M} \lambda_j y_j\Big)^\sigma . \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} [\exp(x_i y_j)]^{a_i \lambda_j} . \alpha_1^{\lambda_{N+1}} \alpha_o^{\lambda_{N+2}} .$$

Donc $N_o^{9X^M} . F^{(\sigma)}(a.x)$ est un élément de $Z[\alpha_o, \alpha_1]$. Ainsi il s'écrit

$$\sum_{h_o=0}^{d-1} \sum_{h_1=0}^{2Y-1} \Big(\sum_{(\lambda)} P(\lambda) A_{\lambda, h, a, \sigma}\Big) \alpha_o^{h_o} \alpha_1^{h_1} ,$$

où $A_{\lambda, h, a, \sigma} \in Z$ et $|A_{\lambda, h, a, \sigma}| < \exp k_1 X^M$.

Considérons le système linéaire homogène en $P(\lambda)$:

$$\sum_{(\lambda)} P(\lambda)\, A_{\lambda,\, h,\, a,\, \sigma} = 0 \qquad \begin{cases} 0 \le \sigma \le X^{M-1} \ ; \\ 1 \le a_i \le X^{M-2} \ ; \ 1 \le i \le N \ ; \\ 0 \le h_1 \le 2Y-1 \ ; \ 0 \le h_o \le d-1 \ . \end{cases}$$

Nous avons $2\,d\,Y\,X^{2M}$ équations à $2^M\,d\,Y\,X^{2M}$ inconnues à coefficients entiers. Le lemme de Siegel [12] montre qu'il existe une solution dans $\mathbb{Z}$ non triviale telle que

$$(5) \qquad |P(\lambda)| \le \exp k_o\, X^M \ .$$

2. - Soit $k_2 = [2^{M+3}]^{\frac{1}{N}}$. Pour X assez grand, il existe des entiers σ_1 , b_1, ..., b_N tels que

$$0 \le \sigma_1 \le \frac{X^M}{2} - 1 \ ; \ 1 \le b_j \le k_2 X^{M-2} \ ; \ 1 \le j \le N$$

et

$$\frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(b.x) \neq 0 \ .$$

Notons $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (resp. $W_1, \ldots, W_n$) les nombres $\sum_{i=1}^{N} b_i x_i$ pour $1 \le b_i \le k_2 X^{M-2}$, $1 \le i \le N$ (resp. $\sum_{i=1}^{M} \lambda_j y_j$ pour $0 \le \lambda_j \le 2X^2 - 1$, $1 \le j \le M$). On a $n = 2^M X^{2M}$ et $m = 2^{M+3} X^M$. Le nombre α_1 étant transcendant, il existe des nombres complexes $q_1, \ldots, q_n$ non tous nuls tels que

$$F(z) = \sum_{\ell=1}^{n} q_\ell\, e^{W_\ell z} \ .$$

Soit $\Omega = \max |W_\ell|$. Le nombre de zéros de F dans le disque $|z| \le \rho$, avec $\rho = k_2 X^{M+2}$. $N \max_{1 \le j \le N} |x_j|$ est majoré par

$$2n + 4 \cdot \frac{1+\sqrt{n}}{\operatorname{Log} n} (1 + \Omega\rho) < 2^{M+2} X^{2M} \ .$$

Donc l'un des $2^{M+2} X^{2M}$ nombres

$$\frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F(b.x) \ , \quad 0 \le \sigma \le \frac{X^M}{2} - 1 \ , \quad 1 \le b_j \le k_2 X^{M-2} \ , \quad 1 \le j \le N$$

est non nul.

3. - On a la majoration suivante :

$$\left|\frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(b.x)\right| < \exp -\frac{1}{8k_2} X^{2M} \operatorname{Log} X \ .$$

En effet, la fonction $z \mapsto \frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(z)$ admet les zéros $a.x$ $(1 \leq a_i \leq X^{M-2}$, $1 \leq i \leq N)$ d'ordre au moins $\frac{1}{2} X^M$. Ecrivons $\prod_a$ pour $\prod_{a_1=1}^{X^{M-2}} \ldots \prod_{a_N=1}^{X^{M-2}}$. On a $\frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(b.x) = G(b.x) \cdot \prod_a (bx - ax)^{\frac{\sigma_o}{2}}$, où la fonction entière G est définie par

$$G(z) = \frac{\frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(z)}{\prod_a (z - ax)^{\frac{\sigma_o}{2}}} \ .$$

On utilise le principe du maximum sur le disque de rayon X^M .

Pour $|z| = X^M$, on a, d'après (1) , (2) , (4) , (5) :

$$\left|\frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(z)\right| \leq \exp k_3 X^{M+2} \ ; \ |z - a.x| \geq X^M - k_4 X^{M-2} \ .$$

D'où

$$(6) \qquad \left|\frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(b.y)\right| < \exp -\frac{1}{8k_2} X^{2M} \operatorname{Log} X \ .$$

4. - Le nombre α_1 vérifie les hypothèses du critère de transcendance.

On pose

$$(7) \qquad q(\alpha_o, \alpha_1) = N^{9k_2 X^M} \cdot \frac{d^{\sigma_1}}{dz^{\sigma_1}} F(b.y) \ .$$

Ainsi $q(\alpha_o, \alpha_1)$ est un élément non nul de $\mathbb{Z}[\alpha_o, \alpha_1]$ et sa norme

$$P_X(\alpha_1) = N_{K|\mathbb{Q}(\alpha_1)}\, q(\alpha_o, \alpha_1)$$

est un polynôme non nul de $Z[\alpha_1]$, de degré d_X et de hauteur H_X avec, d'après (1) , (2) , (5) , (6) , (7) :

$$d_x < k_5 X^M \quad ; \quad \text{Log } H_x < k_5 X^M$$

$$|P_X(\alpha_1)| < \exp - \frac{1}{16 k_2} X^{2M} \text{ Log } X \ .$$

On pose $\sigma_i(X) = k_5 X^M$, $a_i(N) = 2$.

Le théorème 3 est démontré.

Remarque : On peut également démontrer le théorème 3 en utilisant une fonction auxiliaire du type :

$$(2)' \qquad z \mapsto \sum P(\lambda) z^{\lambda_o} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i z \right) .$$

On lui impose la condition

$$(3)' \qquad F(b_1 y_1 + \ldots + b_M y_M) = 0$$

(les dérivées n'intervenant plus).

D'autre part, pour obtenir la majoration (6), on peut également utiliser une formule d'interpolation [2, 7, 8].

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Y. - Conjecture de Schanuel sur la transcendance d'exponentielles. Sém. Bourbaki, Nov. 1970, exposé n° 382, 10 p.

[2] GEL'FOND A. O. - Transcendental and algebraic numbers. Dover, New-York, 1960.

[3] LANG S. - Nombres transcendants. Sém. Bourbaki, 1965-1966, n° 305, 8p .

[4] LANG S. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, 1966.

[5] RAMACHANDRA K. - Contribution to the theory of transcendental numbers, I, II. Acta Arithmetica 14, 1967-1968, p. 65-88.

[6] SCHNEIDER Th. - Introduction aux nombres transcendants. Gauthiers-Villars, 1959.

[7] SMELEV A. A. - On algebraic independence of some numbers. Mat. Zametki, 4, 1968, p. 525-532 (Math. Notes, t. 4, 1969, p. 805-809).

[8] TIJDEMAN R. - On the algebraic independence of certain numbers. Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A, 74, (1971) p. 146-162.

[9] WALDSCHMIDT M. - Solution d'un problème de Schneider sur les nombres transcendants. C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 271 p. 697-700, 1970.

[10] WALDSCHMIDT M. - Répartition des valeurs d'une somme de fonctions exponentielles. Séminaire d'Arithmétique et Algèbre, Bordeaux, 1970-1971, exposés n° 7 et 11.

[11] WALDSCHMIDT M. - Amélioration d'un théorème de Lang sur l'indépendance algébrique d'exponentielles. C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A 272, p. 413-415, 1971.

[12] WALDSCHMIDT M. - La méthode de Gel'fond en théorie des nombres transcendants. Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux, 1970-1971, exposé n° 1, 20 p.

[13] WALDSCHMIDT M. - Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle. Sém. Pisot, 1970-1971, n° 6, 8p.

[14] WALDSCHMIDT M. - Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle. Bull. Soc. Math. France, t. 99, 1971, 20 p.

[15] WALDSCHMIDT M. - Solution du huitième problème de Schneider. J. Number Theory (à paraître).

-:-:-:-

Michel WALDSCHMIDT
Université de Bordeaux 1
U. E. R. de Mathématiques
et d' Informatique
351, cours de la Libération
33 - TALENCE