

JACQUES MARTINET

Algèbre d'un groupe quaternionique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. n° 2, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A2_0

© Université Bordeaux 1, 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRE D'UN GROUPE QUATERNIONIQUE [1]

par

Jacques MARTINET

-:-:-:-

Soit G le groupe quaternionique d'ordre 8, défini par des générateurs σ et τ , liés par les relations $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = \sigma^2$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Soit N une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois isomorphe à G , et soit A son anneau d'entiers.

On suppose que 2 ne se ramifie pas dans N (ce qui équivaut à " $N/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée" ou encore à " A est projectif sur $\mathbb{Z}[G]$ " [2]).

Le but de cet exposé est de donner un exemple où A ne possède pas de base normale sur $\mathbb{Z}$ (ce qui revient à dire que A n'est pas libre sur $\mathbb{Z}[G]$). On peut prendre en fait l'exemple suivant : soient k_1 , k_2 , k_3 les corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{41})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{205})$, K le corps biquadratique composé des k_i , $M = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \frac{41+\sqrt{205}}{2}$. Alors $N = K(\sqrt{M})$ convient.

Esquisse de démonstration

En calculant les normes $N_{K/k_i}(M)$, on montre que N est cyclique sur chacun des k_i , et par suite galoisienne sur $\mathbb{Q}$; le groupe de Galois est isomorphe à G .

- Le nombre 2 est non ramifié dans chacun des k_i , donc non ramifié dans K . La congruence $M \equiv \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{205}}{2}\right)^2 \pmod{4}$ montre que les facteurs premiers de 2 dans K ne se ramifient pas dans N . L'extension $N/\mathbb{Q}$ est donc modérément ramifiée.

- On fait une étude des modules projectifs de rang 1 sur $\mathbb{Z}[G]$. Soit M un tel module, M' le sous-module des invariants pour σ^2 , M'' le sous-module des $x \in M$ annulés par $(1+\sigma^2)$.

On montre successivement que :

1°) M' est libre sur $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[G]/(1-\sigma^2)$ et M'' est libre sur $\mathbb{Z}'' = \mathbb{Z}[G]/(1+\sigma^2)$.

2°) On peut choisir une base φ de M' sur $\mathbb{Z}'$ et une base ψ de M'' sur $\mathbb{Z}''$ de façon que l'une des propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\psi - \varphi \in 2M \quad \text{ou} \quad \psi - (\sigma + \tau + \tau\sigma)\varphi \in 2M.$$

3°) Que M est libre si et seulement si la première propriété est vérifiée.

- On étudie les discriminants Δ de N et D de K , et l'on trouve la relation

$$\Delta = D [\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2)]^4.$$

- On en déduit que $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) = \varepsilon \prod_{p|\Delta} p$, avec $\varepsilon = +1$ si N est réelle, $\varepsilon = -1$ si N est imaginaire.

- La relation $\psi \equiv \varphi \pmod{2A}$ équivaut à $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) \equiv \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2) \pmod{4}$ dans $\mathbb{Z}$.

- On calcule $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2)$ et $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2)$. Le résultat est indépendant du choix de φ et ψ .

$$\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) = 5 \times 41 = 205.$$

Comme $\varphi = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{41} \pm \sqrt{205}}{4}$, $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2) = \frac{1+5+41+205}{4} = 63$,

$\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\psi^2) = 205 \equiv -63 \equiv -\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\varphi^2) \pmod{4}$, donc A n'est pas libre sur $\mathbb{Z}[G]$.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MARTINET. - Modules sur l'algèbre du groupe quaternionique.
(à paraître).
- [2] J. MARTINET. - cf. thèse, th. II-1. Ann. Inst. Fourier, 19, 1,
Grenoble 1969.

-:-:-

Université de Bordeaux 1
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
351, cours de la Libération
33 - Talence