

# SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

## Modules sur une coalgèbre

*Séminaire "Sophus Lie"*, tome 2 (1955-1956), exp. n° 4, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SSL\\_1955-1956\\_\\_2\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSL_1955-1956__2__A6_0)

© Séminaire "Sophus Lie"  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire "Sophus LIE"

Année 1955/56

-:-:-

Exposé n° 4MODULES SUR UNE COALGÈBRE

(Exposé de P. CARTIER, le 10.2.56)

Le but de cet exposé et du suivant est de donner une caractérisation homologique des algèbres du type  $\Gamma(M)$  où  $M$  est un module libre.

1.- Notations.

On suppose donné un anneau commutatif avec unité  $K$ . Les modules sont tous des modules unitaires sur  $K$  et les produits tensoriels sont pris sur  $K$ . L'opérateur identique d'un  $K$ -module  $M$  sera noté  $1_M$  ou même simplement  $1$  lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

On identifiera les produits tensoriels  $M \otimes (N \otimes P)$ ,  $(M \otimes N) \otimes P$  et  $M \otimes N \otimes P$ ; par contre on n'identifiera pas le produit tensoriel  $K \otimes M$  au module  $M$  et l'on notera  $P_M$  l'isomorphisme canonique de  $K \otimes M$  ou de  $M \otimes K$  sur  $M$ ; on a donc :

$$(1) \quad P_M(\lambda \otimes m) = \lambda m \quad (\lambda \in K \quad m \in M)$$

2.- Coalgèbres.

Les coalgèbres forment une structure algébrique moins riche que celle d'hyperalgèbre et n'en retiennent que l'application diagonale. De manière précise :

Une coalgèbre  $A$  est constituée par la donnée :

1) d'un module  $A$  ;

2) d'une application linéaire  $\Delta_A$  de  $A$  dans  $A \otimes A$ , dite application diagonale telle que l'on ait :

$$(2) \quad (\Delta_A \otimes 1_A) \circ \Delta_A = (1_A \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A$$

3) d'une application linéaire  $\xi_A$  de  $A$  dans  $K$  telle que :

$$(3) \quad P_A \circ (\xi_A \otimes 1_A) \circ \Delta_A = P_A \circ (1_A \otimes \xi_A) \circ \Delta_A = 1_A$$

Un homomorphisme de la coalgèbre  $A$  dans la coalgèbre  $B$  est une application linéaire  $f$  de  $A$  dans  $B$  telle que l'on ait

$$(4) \quad \Delta_B \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_A \quad \varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$$

Les coalgèbres forment alors une catégorie.

Un élément unité dans une coalgèbre  $A$  est un  $u \in A$  tel que  $\Delta(u) = u \otimes u$  et  $\varepsilon_A(u) = 1$ . Si  $A$  possède une unité  $u$ , elle est somme directe de  $K.u$  et du sous-module  $A^+$  noyau de  $\varepsilon_A$ ; dans ce cas, la condition (3) s'écrit

$$(5) \quad \delta(a) = \Delta(a) - a \otimes u - u \otimes a \in A^+ \otimes A^+ \text{ pour } a \in A^+.$$

### 3.- Modules sur une coalgèbre.

On se donne une coalgèbre  $A$  qui sera fixée jusqu'à la fin de l'exposé. Nous appellerons module sur la coalgèbre  $A$ , ou  $A$ -module, l'objet constitué par les données suivantes :

1) un  $K$ -module  $M$

2) une application linéaire  $\Delta_M$  de  $M$  dans  $A \otimes M$  vérifiant les conditions suivantes :

$$(6) \quad (\Delta_A \otimes 1_M) \circ \Delta_M = (1_A \otimes \Delta_M) \circ \Delta_M$$

$$(7) \quad P_M \circ (\varepsilon_A \otimes 1_M) \circ \Delta_M = 1_M$$

Un homomorphisme du  $A$ -module  $M$  dans le  $A$ -module  $N$  ou  $A$ -homomorphisme est une application  $K$ -linéaire  $f$  de  $M$  dans  $N$  telle que l'on ait :

$$(8) \quad \Delta_N \circ f = (1_A \otimes f) \circ \Delta_M$$

Les  $A$ -homomorphismes de  $M$  dans  $N$  forment un sous-module  $\text{Hom}_A(M, N)$  du module  $L_K(M, N)$  de toutes les applications  $K$ -linéaires de  $M$  dans  $N$ . De plus, le composé de deux  $A$ -homomorphismes est un  $A$ -homomorphisme et  $1_M \in \text{Hom}_A(M, M)$  ; autrement dit, les  $A$ -modules forment une catégorie additive  $\mathcal{C}_A$ .

Soient  $M$  un  $A$ -module et  $N$  un sous- $K$ -module de  $M$  vérifiant la condition suivante :  $\Delta_M$  applique  $N$  dans le sous-module de  $A \otimes M$  image canonique de  $A \otimes N$ . De la suite exacte  $0 \rightarrow N \xrightarrow{\hat{\pi}} M \xrightarrow{P} M/N \rightarrow 0$  de  $K$ -modules, on déduit une suite exacte :

$$A \otimes N \xrightarrow{\pi'} A \otimes M \xrightarrow{P'} A \otimes (M/N) \rightarrow 0$$

d'où résulte immédiatement qu'il existe sur  $M/N$  une structure et une seule

de  $A$ -module telle que  $\rho \in \text{Hom}_A(M, M/N)$ . De plus, si  $\pi'$  est injectif, par exemple si  $N$  est facteur direct de  $M$ , il existe une structure et une seule de  $A$ -module sur  $N$  telle que  $\pi$  soit un  $A$ -homomorphisme.

Donnons quelques exemples de  $A$ -modules : tout d'abord  $A$  muni de l'application  $\Delta_A$  est un  $A$ -module ; si, ensuite,  $A$  admet une unité  $u$ , l'application  $\lambda \rightarrow u \otimes \lambda$  définit, comme on le voit aussitôt, une structure de  $A$ -module sur  $K$ .

#### 4.- Dualité des coalgèbres.

Soit  $A^*$  le dual du module  $A$ , c'est-à-dire le module des formes  $K$ -linéaires sur  $A$ . Pour  $x', y' \in A^*$ , on pose

$$(9) \quad x'y' = P_K \circ (x' \otimes y') \circ \Delta_A.$$

On définit ainsi une loi de composition interne bilinéaire sur  $A^*$ . La formule (2) montre que cette loi de composition est associative, tandis que la formule (3) montre que  $\varepsilon_A$  est élément neutre : on a muni  $A^*$  d'une structure d'algèbre associative avec unité. De plus, tout homomorphisme de  $A$  dans une coalgèbre  $B$  définit par transposition un homomorphisme  ${}^t f$  de l'algèbre  $B^*$  dans l'algèbre  $A^*$ .

Soit maintenant  $M$  un  $A$ -module ; pour tout  $x' \in A^*$ , posons  $U(x') = P_M \circ (x' \otimes 1_M) \circ \Delta_M$ . La formule (6) montre que l'on a  $U(x'y') = U(x')U(y')$  pour  $x', y' \in A^*$  et la formule (7) montre que  $U(\varepsilon_A) = 1_M$ . Autrement dit, on a muni  $M$  d'une structure de module unitaire sur l'anneau  $A^*$  ; de plus, tout  $A$ -homomorphisme  $f$  de  $M$  dans  $N$  est un homomorphisme pour les structures de modules sur l'anneau  $A^*$  associées aux structures données de  $A$ -modules.

Inversement, sur le dual de toute algèbre  $C$  sur  $K$ , qui soit un  $K$ -module libre de type fini, on définit par transposition une structure de coalgèbre ; on peut de même traiter le cas des  $C$ -modules.

#### 5.- Suites $\mathcal{C}$ -exactes.

Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fini ou non de l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des nombres entiers rationnels. Une suite  $\mathcal{C}$ -exacte  $\mathcal{C}$  de  $A$ -modules est la donnée d'une famille  $(M_i)_{i \in I}$  de  $A$ -modules et d'une famille  $(f_i)_{i \in [a, b[}$  de  $A$ -homomorphismes,  $f_i$  appliquant  $M_i$  dans  $M_{i+1}$ , vérifiant les deux conditions

suivantes :

a) Pour  $i \in [a, b[$ , le noyau  $Z_i$  de  $f_i$  est un sous-module facteur direct de  $M_i$  et l'image  $B_{i+1}$  de  $f_i$  est un sous-module facteur direct de  $M_{i+1}$ .

b) On a  $B_i = Z_i$  pour  $i \in ]a, b[$ .

Autrement dit, considérée comme suite de  $K$ -modules et de  $K$ -homomorphismes,  $\mathcal{C}$  est une suite exacte qui "se décompose" ("split").

$B_i$  est un sous- $A$ -module de  $M_i$  pour  $i \in [a, b[$ , et on voit tout de suite que la suite  $\mathcal{C}$  se décompose en les suites  $\mathcal{C}$ -exactes suivantes :

$$(9) \quad M_a \xrightarrow{f_a} B_{a+1} \longrightarrow 0 \quad a \neq -\infty$$

$$(10) \quad 0 \longrightarrow B_i \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} B_{i+1} \longrightarrow 0 \quad i \in ]a, b[$$

$$(11) \quad 0 \longrightarrow B_b \longrightarrow M_b \quad b \neq +\infty$$

## 6.- Modules $\mathcal{C}$ -injectifs.

Si  $I$  est un  $A$ -module, nous poserons  $T_I(M) = \text{Hom}_A(M, I)$  pour tout  $A$ -module  $M$  et nous appellerons  $T_I(f)$  l'homomorphisme de  $T_I(N)$  dans  $T_I(M)$  défini pour tout  $A$ -homomorphisme  $f$  de  $M$  dans  $N$  par

$$T_I(f)(g) = g \circ f$$

On a défini ainsi un foncteur additif contravariant  $T_I$  de la catégorie  $\mathcal{C}_A$  des  $A$ -modules dans la catégorie  $\mathcal{D}_K$  des  $K$ -modules.

On dira que le  $A$ -module  $I$  est  $\mathcal{C}$ -injectif si le foncteur  $T_I$  est exact, c'est-à-dire si pour toute suite  $\mathcal{C}$ -exacte de  $A$ -modules :

$$M_a \longrightarrow M_{a+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{b-1} \longrightarrow M_b$$

la suite :

$$T_I(M_a) \longleftarrow T_I(M_{a+1}) \longleftarrow \dots \longleftarrow T_I(M_b)$$

de  $K$ -modules est exacte. Il suffit de vérifier cette condition pour les suites  $\mathcal{C}$ -exactes  $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ , vu la décomposition de toute suite  $\mathcal{C}$ -exacte en suites  $\mathcal{C}$ -exactes à trois termes.

Nous allons prouver l'existence de  $A$ -modules  $\mathcal{C}$ -injectifs. Pour cela considérons un  $K$ -module  $U$  quelconque et formons  $\Lambda \otimes U = I$ . On vérifie immédiatement que l'application  $\Delta_A \otimes 1_U$  de  $I$  dans  $\Lambda \otimes I$  vérifie les

axiomes des  $A$ -modules. On a alors le lemme suivant :

LEMME 1.- Soit  $h_U$  l'application  $K$ -linéaire  $P_U \circ (\varepsilon_A \otimes 1_U)$  de  $I$  dans  $U$ . Pour tout  $A$ -module  $M$  et toute application  $K$ -linéaire  $f$  de  $M$  dans  $U$ , il existe un  $A$ -homomorphisme  $\bar{f}$  de  $M$  dans  $I$  et un seul tel que :

$$(12) \quad f = h_U \circ \bar{f}$$

Soit  $f \in L_K(M, U)$  et soit  $\bar{f} = \varphi_U(f) = (1_A \otimes f) \circ \Delta_M$  ;  $\bar{f}$  est une application  $K$ -linéaire de  $M$  dans  $I$ . De plus,

$$\begin{aligned} (1_A \otimes \bar{f}) \circ \Delta_M &= (1_A \otimes 1_A \otimes f) \circ (1_A \otimes \Delta_M) \circ \Delta_M = \\ &= (1_A \otimes 1_A \otimes f) \circ (\Delta_A \otimes 1_M) \circ \Delta_M = (\Delta_A \otimes f) \circ \Delta_M \\ \Delta_I \circ \bar{f} &= (\Delta_A \otimes 1_U) \circ \bar{f} = (\Delta_A \otimes f) \circ \Delta_M \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\bar{f}$  est un  $A$ -homomorphisme et que  $\varphi_U$  applique  $L_K(M, U)$  dans  $\text{Hom}_A(M, I)$ .

Soit  $\psi_U$  l'application  $g \rightarrow h_U \circ g$  de  $\text{Hom}_A(M, I)$  dans  $L_K(M, U)$ . On va montrer que les applications  $\varphi_U$  et  $\psi_U$  sont réciproques :

a)  $\psi_U \circ \varphi_U$  est l'identité : dans le diagramme ci-dessous, les deux carrés sont trivialement commutatifs, le triangle de gauche est commutatif par la formule (7) et celui de droite est commutatif par construction. On en déduit que  $f = h_U \circ (1_A \otimes f) \circ \Delta_M = \psi_U(\varphi_U(f))$

$$\begin{array}{ccccc} M & & \xrightarrow{f} & & U \\ & \nearrow P_M & & & \nearrow P_U \\ & K \otimes M & \xrightarrow{1_K \otimes f} & & K \otimes U \\ & \nearrow \varepsilon_A \otimes 1_M & & & \nearrow \varepsilon_A \otimes 1_U \\ \Delta_M \downarrow & A \otimes M & \xrightarrow{1_A \otimes f} & & A \otimes U \\ & & & & \uparrow h_U \end{array}$$

b)  $\varphi_U \circ \psi_U$  est l'identité : on a en effet pour  $g \in \text{Hom}_A(M, I)$

$$\begin{aligned} \varphi_U(\psi_U(g)) &= (1_A \otimes (h_U \circ g)) \circ \Delta_M \\ &= (1_A \otimes P_U) \circ (1_A \otimes \varepsilon_A \otimes 1_U) \circ (1_A \otimes g) \circ \Delta_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (P_1 \otimes 1_U) \circ (1_A \otimes \varepsilon_A \otimes 1_U) \circ (\Delta_A \otimes 1_U) \circ g \\
&= (1_A \otimes 1_U) \circ g = g
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Posons  $T'_U(M) = L_K(M, U)$  pour tout  $A$ -module  $M$ , et pour tout  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$  soit  $T'_U(f)$  l'application  $g \rightarrow g \circ f$  de  $T'_U(N)$  dans  $T'_U(M)$  : on a défini un foncteur additif contravariant  $T'_U$  de la catégorie  $\mathcal{C}_A$  dans la catégorie  $\mathcal{O}_K$ . De plus, les applications  $\Psi_U$  définies précédemment définissent une équivalence du foncteur  $T_I$  sur le foncteur  $T'_U$  ; comme toute suite  $\mathcal{C}$ -exacte de  $A$ -modules se décompose en tant que suite exacte de  $K$ -module, le foncteur  $T'_U$  transforme une suite  $\mathcal{C}$ -exacte en une suite exacte, et par suite le foncteur  $T_I$  est exact : le  $A$ -module  $I = A \otimes U$  est  $\mathcal{C}$ -injectif.

### 7.- Résolutions.

Un complexe  $\mathcal{M}$  de  $A$ -modules est défini par la donnée d'une famille  $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $A$ -modules et d'une famille de  $A$ -homomorphismes  $d_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$  tels que  $d_{i+1} \circ d_i = 0$ . Soient  $\mathcal{M} = (M_i, d_i)$  et  $\mathcal{M}' = (M'_i, d'_i)$  deux complexes et soit  $F_s$  l'ensemble des familles de  $A$ -homomorphismes  $f = (f_i)$ ,  $f_i : M_i \rightarrow M'_{i+s}$ . Si  $f \in F_s$ , on définit  $\delta f \in F_{s+1}$  par la formule :

$$(13) \quad (\delta f)_i = d'_{i+s} \circ f_i + (-1)^{s+1} f_{i+1} \circ d_i$$

et l'on vérifie facilement que  $\delta(\delta f) = 0$ .

Un élément  $f \in F_s$  tel que  $\delta f = 0$  i.e.  $f_{i+1} \circ d_i = (-1)^s d'_i \circ f_i$  s'appelle un homomorphisme de degré  $s$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}'$  et l'on dit que deux homomorphismes  $f$  et  $g$  de degré  $s$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}'$  sont homotopes si  $f - g = \delta k$  avec  $k \in F_{s-1}$ .

Soit  $M$  un  $A$ -module ; nous appellerons résolution  $\mathcal{M}$  de  $M$  un complexe de  $A$ -modules tel que  $M_i = 0$  pour  $i < -1$  et  $M_{-1} = M$ . Une résolution  $\mathcal{M}$  de  $M$  est dite  $\mathcal{C}$ -acyclique si la suite

$$0 \rightarrow M \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$$

est  $\mathcal{C}$ -exacte ; elle est dite  $\mathcal{C}$ -injective si les  $A$ -modules  $M_i$  sont  $\mathcal{C}$ -injectifs pour  $i \geq 0$ .

Nous nous contenterons pour l'instant d'un lemme d'existence et nous

appliquerons les notions précédentes à la définition de la cohomologie dans l'exposé suivant :

LEMME 2.— Pour tout  $A$ -module  $M$ , il existe une résolution  $\mathcal{C}$ -acyclique et  $\mathcal{C}$ -injective de  $M$ .

Raisonnons par récurrence et supposons construite une suite  $\mathcal{C}$ -exacte  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_{-1}} M_0 \xrightarrow{d_0} M_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{d_{i-1}} M_i$ , où les  $A$ -modules  $M_i$  pour  $i \geq 0$  sont  $\mathcal{C}$ -injectifs. Pour  $i = -1$ , il n'y a rien à prouver. Soit  $P$  le  $A$ -module quotient de  $M_i$  par l'image de  $d_{i-1}$ ; on a donc une suite  $\mathcal{C}$ -exacte :

$$(14) \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_i \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

Posons de plus  $M_{i+1} = A \otimes P$ , la structure de  $A$ -module de  $M_{i+1}$  étant définie par l'application  $\Delta_{M_{i+1}} = \Delta_A \otimes 1_P$ . Le  $A$ -module  $M_{i+1}$  est  $\mathcal{C}$ -

injectif d'après le n° 6. De plus, la formule (6) exprime que l'application  $\Delta_P$  de  $P$  dans  $M_{i+1}$  est un homomorphisme de  $A$ -modules et la formule (7) montre que  $h_P \circ \Delta_P = 1_P$ , donc que l'on a une suite exacte de  $K$ -modules  $0 \longrightarrow P \longrightarrow M_{i+1}$  qui se décompose; autrement dit, on a une suite  $\mathcal{C}$ -exacte :

$$(15) \quad 0 \longrightarrow P \longrightarrow M_{i+1}$$

Tenant compte de (14) et (15), on a bien construit une suite  $\mathcal{C}$ -exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1}$$

formée de  $A$ -modules  $\mathcal{C}$ -injectifs, à l'exception de  $M$  bien entendu.

C.Q.F.D.

REMARQUE.— On voit facilement que si  $M$  est un  $A$ -module  $\mathcal{C}$ -injectif, pour toute suite  $\mathcal{C}$ -exacte  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P$ ,  $f$  applique  $M$  sur un sous- $A$ -module de  $P$  admettant un sous- $A$ -module supplémentaire. Appliquant ceci avec la suite exacte  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\Delta_M} A \otimes M$ , on voit facilement que les  $A$ -modules  $\mathcal{C}$ -injectifs ne sont autres que les facteurs directs des  $A$ -modules de la forme  $A \otimes U$  étudiés au n° 6.