

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 1, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A3_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 1

LE THÉOREME DE POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT

(Exposé de P. CARTIER du 9.11.1954)

1.- Préliminaires.

Pour tous ces préliminaires, on pourra se reporter par exemple à (1) .

Définition. On appelle algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur un anneau commutatif K ayant un élément unité un K -module unitaire $\mathcal{G}$ muni d'une application bilinéaire $(x,y) \rightarrow [x,y]$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, appelée crochet de x et de y , et qui vérifie les deux axiomes suivants :

- (i) $[x,x] = 0$ d'où l'on déduit : $[x,y] = -[y,x]$
- (ii) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (identité de Jacobi) .

Dans ce séminaire, on se bornera en principe, au cas où K est un corps de caractéristique nulle.

Exemples.

1°) Algèbre de Lie libre. Soit S un ensemble quelconque, $\bar{S}$ l'ensemble des mots non associatifs d'éléments de S (i.e. on met autant de parenthèses qu'il est nécessaire). Le module E des combinaisons linéaires formelles d'éléments de $\bar{S}$ à coefficients dans K est muni trivialement d'une structure multiplicative n'ayant d'autres propriétés que d'être une application bilinéaire de $E \times E$ dans E . En passant au quotient par la relation d'équivalence que définissent (i) et (ii), on obtient une algèbre de Lie sur K que l'on appelle l'algèbre de Lie libre construite sur S .

2°) Algèbre de Lie abélienne. Sur un K -module E , posons $[x,y] = 0$ quels que soient x et $y \in E$. E est ainsi muni d'une structure d'algèbre de Lie. On dit que E est une algèbre de Lie abélienne (pour des raisons tirées de la théorie des groupes de Lie, - et aussi de (i)).

3°) Soit A une algèbre associative sur K , et posons $[a,b] = ab - ba$. Cette opération crochet munit le K -module A d'une structure d'algèbre de Lie $\bar{A}$ sur K . Si en particulier A est l'algèbre associative des endomorphismes d'un K -module M , $\bar{A}$, noté en général $\mathcal{L}(M)$, s'appelle l'algèbre de Lie des endomorphismes de M .

4°) Produit direct. Soient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux algèbres de Lie sur K . Définissons sur ${}^{\text{le}}K\text{-module}$ $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ une opération crochet en posant :

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \quad (x_i \text{ et } y_i \in \mathcal{G}_i).$$

Cette opération satisfait aux axiomes (i) et (ii) et munit le module $\mathcal{G}$ d'une structure d'algèbre de Lie : l'algèbre de Lie produit direct des algèbres $\mathcal{G}_i$.

5°) A partir d'une algèbre de Lie donnée, on peut en fabriquer d'autres par extension ou restriction de l'anneau des scalaires.

Définitions. Un sous-module $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre (resp. un idéal) de $\mathcal{G}$ si $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{h}$ (resp. $x \in \mathcal{G}$, $y \in \mathfrak{h}$) entraînent $[x, y] \in \mathfrak{h}$. Il n'y a pas lieu de distinguer idéal à gauche et idéal à droite, vu (i).

Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathcal{G}$, l'opération crochet passe au quotient dans $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ qui est ainsi muni d'une structure d'algèbre de Lie quotient.

Un homomorphisme d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans une algèbre de Lie $\mathcal{G}'$ est une application K -linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}'$ respectant le crochet (i.e. une application K -linéaire f telle que $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$).

Une linéarisation d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans une algèbre associative A avec élément unité (sur le même anneau K) est une application de $\mathcal{G}$ dans A qui est un homomorphisme dans l'algèbre de Lie $\bar{A}$ (i.e. qui vérifie $f([x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x)$). Une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans un K -module M est une linéarisation de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre des endomorphismes de M (ou, si l'on veut, un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^{\text{el}}(M)$).

Exemples.

1°) Les applications $x_1 \mapsto (x_1, 0)$ et $x_2 \mapsto (0, x_2)$ des algèbres de Lie $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ dans l'algèbre produit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ sont des monomorphismes permettant d'identifier $\mathcal{G}_i$ ($i = 1, 2$) à un idéal de $\mathcal{G}$. Avec cette identification $[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2] = 0$; pour que $\mathcal{G}$ soit isomorphe au produit direct de deux sous-algèbres $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, il faut et il suffit que $\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \mathcal{G}''$, $\mathcal{G}' \cap \mathcal{G}'' = \{0\}$, $[\mathcal{G}', \mathcal{G}''] = \{0\}$.

2°) $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L}$ étant deux parties de $\mathcal{G}$, désignons par $[\mathcal{U}, \mathcal{L}]$ l'ensemble des combinaisons linéaires des crochets d'un élément de $\mathcal{U}$ par un élément de $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L}$ sont deux idéaux, il en est de même de $[\mathcal{U}, \mathcal{L}]$ (résulte de Jacobi). En particulier, posons :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}_1 \quad ; \quad \mathcal{G}^{(n)} = [\mathcal{G}^{n-1}, \mathcal{G}^{n-1}] \quad ; \quad \mathcal{G}_n = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_{n-1}]$$

$\mathcal{G}^{(n)}$ (resp. $\mathcal{G}_n$) est un idéal de $\mathcal{G}^{(r)}$ (resp. $\mathcal{G}_r$) ($0 \leq r \leq n$). La suite des $\mathcal{G}_n$ est la série centrale descendante et $\mathcal{G}^{(n)}$ la série dérivée. L'algèbre $\mathcal{G}$ est dite résoluble (resp. nilpotente) s'il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathcal{G}^{(n)}$ (resp. $\mathcal{G}_n$) soit nul. $\mathcal{G}^{(2)}$ s'appelle l'idéal dérivé de $\mathcal{G}$.

3°) L'ensemble des $x \in \mathcal{G}$ tels que $[x, y] = 0$ pour tout $y \in \mathcal{G}$ est un idéal appelé centre de $\mathcal{G}$.

4°) On appelle dérivation d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ tout endomorphisme D du K -module $\mathcal{G}$ vérifiant la condition $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$. L'ensemble des dérivations de $\mathcal{G}$ constitue une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des endomorphismes du K -module $\mathcal{G}$, notée $\mathcal{D}(\mathcal{G})$.

L'application $x \mapsto \text{ad}(x)$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ définie par :

$$\text{ad}(x) : y \mapsto [x, y]$$

est un homomorphisme (on le vérifie, de même que le fait que $\text{ad}(x)$ est une dérivation, grâce à Jacobi), donc une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans le K -module $\mathcal{G}$, appelée représentation adjointe. Son noyau est le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{G}$, ce qui permet de plonger $\mathcal{G}/\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, et son image est un idéal de $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, (car $[D, \text{ad}(x)] = \text{ad}(Dx)$) appelé idéal des dérivations intérieures.

2.- Algèbre enveloppante universelle.

Nous allons montrer qu'on peut associer à toute algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur K une algèbre associative $U(\mathcal{G})$ sur K munie d'un élément unité, et une linéarisation ρ de $\mathcal{G}$ dans U , telle qu'à tout couple (A, f) formé d'une algèbre associative sur K avec élément unité 1 et d'une linéarisation f de $\mathcal{G}$ dans A on puisse associer un homomorphisme d'algèbre $\tilde{f}$ de U dans A vérifiant $f = \tilde{f} \circ \rho$ et $\tilde{f}(1) = 1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad f \quad} & A \\ \rho \searrow & & \uparrow \tilde{f} \\ & U(\mathcal{G}) & \end{array}$$

On peut évidemment se restreindre au cas où U est engendrée (comme K -algèbre) par $\rho(\mathcal{G})$ et l'unité. Il est alors clair que s'il y a une solution, elle est unique à un isomorphisme près. (En effet, s'il y avait deux solutions, (U, ρ) et (U', ρ') , les endomorphismes $\tilde{\rho}\tilde{\rho}'$ (resp. $\tilde{\rho}'\tilde{\rho}$) seraient l'identité sur la sous-

algèbre de U (resp. U') engendrée par $\rho(\mathcal{Y})$ et 1 (resp. $\rho'(\mathcal{Y})$ et 1).

Soit $T = \sum_r T^r$ l'algèbre tensorielle de $\mathcal{Y}$ sur K ($T^0 = K$, $T^1 = \mathcal{Y}$). Toute application linéaire f du K -module $\mathcal{Y}$ dans A se prolonge en un homomorphisme multiplicatif f^0 de T dans A en posant :

$$f^0(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = f(x_1) \dots f(x_k)$$

Si de plus f est une linéarisation, f^0 s'annule sur l'idéal J de T engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, et définit une application $\tilde{f}$ de $U = T/J$ dans A . Réciproquement, soit ρ la restriction à $\mathcal{Y} = T^1$ de l'application canonique de T sur U . Pour toute linéarisation f de $\mathcal{Y}$ dans une algèbre associative unitaire A , et tout $z \in U$, qui soit la classe mod. J d'un tenseur décomposable $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$, posons :

$$\tilde{f}(z) = f(x_1) \dots f(x_k).$$

Il est immédiat que $U, \rho, \tilde{f}$ répondent aux conditions du problème. $U = T/J$ s'appelle l'algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{Y}$.

Exemples :

1°) Supposons $\mathcal{Y}$ abélienne. Alors J est engendré par les tenseurs de la forme $x \otimes y - y \otimes x$, et U est l'algèbre symétrique $S(\mathcal{Y})$ sur $\mathcal{Y}$. Si (x_i) est une base de $\mathcal{Y}$ sur K , U est isomorphe à l'algèbre des polynômes en les x_i .

2°) Si $\mathcal{Y}$ est une algèbre libre de générateurs a_i ($i \in I$), soit L l'algèbre des polynômes non commutatifs en les b_i ($i \in I$) et $\bar{L}$ l'algèbre de Lie déduite de l'algèbre associative L . Puisque $\mathcal{Y}$ est libre, l'application $a_i \rightarrow b_i$ se prolonge en un homomorphisme de $\mathcal{Y}$ dans $\bar{L}$, donc en une linéarisation ρ de $\mathcal{Y}$ dans L . Soit f une linéarisation de $\mathcal{Y}$ dans une algèbre A . Posons $c_i = f(a_i)$. Il existe un homomorphisme $\tilde{f}$ de L dans A et un seul tel que $\tilde{f}(1) = 1$ et $\tilde{f}(b_i) = c_i$ (car L est une algèbre associative libre). Alors f et $\tilde{f} \circ \rho$ sont des linéarisations qui coïncident sur les générateurs de $\mathcal{Y}$, donc partout, et (L, ρ) est l'algèbre enveloppante de $\mathcal{Y}$.

3°) Supposons que $\mathcal{Y}$ soit isomorphe au produit direct de deux sous-algèbres $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$, et soit (U_i, ρ_i) l'algèbre enveloppante de $\mathcal{Y}_i$ ($i=1,2$). Posons $V = U_1 \otimes U_2$ et soit ρ l'application de $\mathcal{Y}$ dans V :

$$\rho : x_1 + x_2 \rightarrow \rho_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(x_2) \quad (x_i \in \mathcal{Y}_i)$$

Il est immédiat que ρ est une linéarisation de $\mathcal{G}$ dans V . De plus si f est une linéarisation de $\mathcal{G}$ dans A , $f(x_1)$ et $f(x_2)$ commutent car $[x_1, x_2] = 0$.

Donc si $\tilde{f}_i : U_i \rightarrow A$ est le prolongement ^{à U_i} de la restriction de f à $\mathcal{G}_i$, $\tilde{f}_1(U_1)$ et $\tilde{f}_2(U_2)$ commutent. Par suite, il existe un homomorphisme $\tilde{f}$ de $U_1 \otimes U_2$ dans A et un seul tel que :

$$\tilde{f}(a \otimes b) = \tilde{f}_1(a) \tilde{f}_2(b).$$

Il est alors immédiat que :

$$\tilde{f}(\rho(x_1 + x_2)) = f(x_1) + f(x_2)$$

et que : $\tilde{f}(1 \otimes 1) = 1 \times 1 = 1$.

Donc (V, ρ) est l'algèbre enveloppante de $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$

4°) Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie, $\mathcal{H}$ un idéal de $\mathcal{G}$, $(U(\mathcal{G}), \rho)$ l'algèbre enveloppante de $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$ l'idéal bilatère engendré dans U par $\rho(\mathcal{H})$, p (resp. p') la projection canonique de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (resp. de U sur $U/\mathcal{R}$). Il existe une application p' de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ dans $U/\mathcal{R}$ et une seule telle que $p' \circ p = p' \circ \rho$, et c'est une linéarisation. Toute linéarisation f de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ dans une algèbre A définit une linéarisation $f \circ p$ de $\mathcal{G}$ dans A , donc un homomorphisme $\tilde{f \circ p}$ de $U(\mathcal{G})$ dans A qui définit à son tour par passage au quotient un homomorphisme $\tilde{f}$ de $U(\mathcal{G})/\mathcal{R}$ dans A (le lecteur est prié de faire un diagramme !). $\tilde{f}$ vérifie toutes les propriétés mirifiques souhaitées, de sorte que l'algèbre enveloppante de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ est $(U/\mathcal{R}, p')$.

Remarque. Comme $\rho(h)\rho(g) = \rho[h, g] + \rho(g)\rho(h)$, que $\mathcal{H}$ est un idéal et que U est engendré par $\rho(\mathcal{G})$ et l'unité, il est immédiat que $\mathcal{R}$ est identique à l'idéal à gauche engendré par $\rho(\mathcal{H})$ dans U .

3.- Le Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Avant d'énoncer le théorème, il faut introduire quelques notations. Pour simplifier les notations, nous poserons $\rho(x) = \underline{x}$ ($x \in \mathcal{G}$).

Soit U_p l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de U qui peuvent s'écrire comme produits de q éléments $\underline{x}$ avec $q \leq p$. Les U_p déterminent une filtration croissante de U (i.e. $U_p \subset U_{p+1}$, $U_p U_q \subset U_{p+q}$, U est identique à la réunion des U_p). On a en particulier :

$$U_{-1} = \{0\}, \quad U_0 = K, \quad U_1 = U_0 + \mathcal{U}.$$

Remarquons que U est somme directe de l'idéal (à gauche, par exemple) engendré dans U par $\mathcal{U}$ et de U_0 . La classe mod U_0 de x se note $\hat{x}$.

Soit G l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée U : c'est la somme directe des modules G_p où $G_p = U_p/U_{p-1}$ et où le produit $g_p g_q$ est la classe modulo U_{p+q-1} du produit d'un représentant dans U_p de g_p et d'un représentant dans U_q de g_q ($g_i \in G_i$) : $G_p G_q \subset G_{p+q}$. G_0 est isomorphe à K et G_1 s'identifie à $\mathcal{U}$. De plus G est engendré par l'unité et G_1 puisque U_1 engendre U .

G est une algèbre commutative. En vertu de la remarque ci-dessus, il suffit en effet de vérifier que le produit de deux éléments $\hat{x}$ et $\hat{y}$ de G_1 est commutatif. Or $\hat{x}$ (resp. $\hat{y}$) est l'image de x (resp. y) de $\mathcal{U}$, et il suffit donc de vérifier que $x y - y x$ est dans U_1 , ce qui est évident, puisque ce dernier élément n'est autre que $[x, y]$.

L'application $x \mapsto \hat{x}$ de $\mathcal{U}$ dans G se prolonge en un homomorphisme de T sur G , lequel passe au quotient modulo l'idéal I de T engendré par les tenseurs de la forme $x \otimes y - y \otimes x$ comme nous venons de le voir, donc définit un homomorphisme φ de l'algèbre symétrique $S(\mathcal{U})$ de $\mathcal{U}$ sur G .

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\quad} & T & \xrightarrow{\Psi} & U & \xrightarrow{\pi} & G \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & S & & \varphi & & \end{array}$$

On remarquera que K et $\mathcal{U}$ sont plongés dans S comme dans T et que φ respecte les graduations.

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème :

THÉOREME 1 : Si K est un corps de caractéristique 0, φ est un isomorphisme de $S(\mathcal{U})$ sur G .

Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une base de $\mathcal{U}$ que l'on ordonne totalement. Pour toute famille $M = (m_\iota)$ de $N^{(I)}$ (i.e. ensemble des applications de I dans l'ensemble N des entiers ≥ 0 nulles sauf pour un nombre fini d'indices), nous poserons, en désignant par Ψ, π, σ les applications canoniques de T dans U , U dans G , T dans S (cf. diagramme) :

$$|M| = \sum_\iota m_\iota ; \quad x^M = \otimes_\iota x_\iota^{m_\iota} ; \quad \underline{x}^M = \prod_\iota x_\iota^{m_\iota} = \Psi(x^M) ; \quad z^M = \sigma(x^M),$$

en prenant soin de bien respecter l'ordre donné sur la base.

Le théorème 1 va résulter du théorème 1' :

THÉORÈME 1' : Les $\underline{x}^M$ forment une base de U .

Avant de voir comment le théorème 1 résulte de 1', nous démontrerons d'abord 1'. Il est d'abord immédiat que les $\underline{x}^M$ engendrent l'espace vectoriel U . En effet, puisque G est commutatif, tout monôme de degré p en les $\underline{x}_i$ de U_p est congru modulo U_{p-1} à un $\underline{x}^M$ (réordonner les termes) ce qui montre bien, par récurrence sur p , que les $\underline{x}^M$ avec $|M| \leq p$ engendrent U_p .

Cela étant, le théorème 1' va résulter des trois lemmes :

LEMME 1 : Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathcal{G}$. Si le théorème 1' est vrai pour $\mathcal{G}$, il l'est aussi pour $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$.

LEMME 2 : Si l'application $\rho : \mathcal{G} \rightarrow U(\mathcal{G})$ est biunivoque, le théorème 1' est vrai pour $\mathcal{G}$.

LEMME 3 : Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie libre, l'application $\rho : \mathcal{G} \rightarrow U(\mathcal{G})$ est biunivoque. [En effet si $\mathcal{G}$ est libre ρ est biunivoque (lemme 3) donc le théorème 1' est vrai pour $\mathcal{G}$ (lemme 2) mais toute algèbre de Lie est quotient d'une algèbre libre donc le théorème 1' est toujours vrai (lemme 1).]

Nous renvoyons au paragraphe suivant les démonstrations des lemmes, et nous allons tirer tout de suite des conséquences du théorème 1', et tout d'abord la :

Démonstration du théorème 1 .- Les $\underline{x}^M$ avec $|M| \leq p$ formant une base de U_p , les $\pi(\underline{x}^M)$ avec $|M| = p$ forment une base de G_p ; mais comme ces éléments ne sont autres que les $\varphi(z^M)$, et que les z^M forment une base de S_p , φ est bien biunivoque.

COROLLAIRE 1 .- Soient $\mathcal{S}_n \subset T^n$ l'ensemble des tenseurs symétriques de T^n , et $\mathcal{S} = \sum_n \mathcal{S}_n$. La restriction à $\mathcal{S}$ de $\Psi : T \rightarrow U$ est un isomorphisme sur.

En effet, les symétrisés Sx^M des x^M avec $|M| = n$ forment une base de $\mathcal{S}_n$, et $\pi\Psi(Sx^M) = \varphi\sigma(Sx^M) = \varphi\sigma(x^M) = \varphi(z^M)$, ce qui montre que les (Sx^M) forment une base de U_n/U_{n-1} , ce qui comme chacun sait (ou peut voir) entraîne bien l'isomorphisme annoncé.

COROLLAIRE 2 .- ρ est un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}$.

COROLLAIRE 3 .- Si $\mathcal{G}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$, $U(\mathcal{G}')$ se plonge dans $U(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{G}'$ a une sous-algèbre $\mathcal{G}''$ supplémentaire dans $\mathcal{G}$, $U(\mathcal{G})$ s'identifie comme espace vectoriel (mais pas comme algèbre!) à $U(\mathcal{G}') \otimes U(\mathcal{G}'')$.

COROLLAIRE 4 .- Tout élément inversible de $U(\mathcal{Y})$ est un scalaire.

COROLLAIRE 5 .- L'algèbre $U(\mathcal{Y})$ n'a pas de diviseurs de 0.

COROLLAIRE 6 .- L'algèbre $U(\mathcal{Y})$ n'a pas de radical (au sens de Jacobson, i.e. il n'existe pas de $x \neq 0$ dans U annulé pour tout U -module simple).

COROLLAIRE 7 .- Si $\mathcal{Y}$ est de dimension finie, tout idéal à gauche dans $U(\mathcal{Y})$ a une base finie.

4.- Il reste à démontrer les lemmes.

Démonstration du lemme 1 .- Soit (b_ν) une base de $\mathcal{f}$; prolongeons-la grâce aux (a_μ) en une base de $\mathcal{Y}$, et ordonnons le tout de façon que les μ précèdent les ν . Alors $\underline{x}^M = \underline{a}^P \underline{b}^Q$ avec $P = (p_\mu)$, $Q = (q_\nu)$. D'après l'exemple 4 du n°2, $U(\mathcal{Y}/\mathcal{f}) = U(\mathcal{Y})/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est sous-tendu par les $\underline{x}^M \underline{b}_\nu = \underline{a}^P \underline{b}^Q \underline{b}_\nu$; mais $\underline{b}^Q \underline{b}_\nu = \sum_{\nu'} \underline{b}^{Q'}$ puisque les $\underline{b}^Q$ sous-tendent $U(\mathcal{f})$. Bref $\mathcal{R}$ est sous-tendu par les $\underline{a}^P \underline{b}^Q$ avec $Q \neq \emptyset$. Si le théorème 1 est vrai pour $\mathcal{Y}$, les $\underline{x}^M$ sont linéairement indépendants; a fortiori les $\underline{a}^P \underline{b}^Q = \underline{a}^P$ sont linéairement indépendants mod. $\mathcal{R}$. Les a_μ formant une base de $\mathcal{Y}/\mathcal{f}$, les $\underline{a}^P$ engendrent $U(\mathcal{Y}/\mathcal{f}) = U(\mathcal{Y})/\mathcal{R}$ dont ils forment donc une base.

Démonstration du lemme 2 .- Il s'agit de voir que si les $\underline{x}_\nu$ sont linéairement indépendants, il en est de même des $\underline{x}^M$.

Or l'application $x \mapsto \underline{x} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{x}$ est une linéarisation de $\mathcal{Y}$ dans $U \otimes U$, donc définit un homomorphisme H de U dans $U \otimes U$. On a :

$$H(\underline{x}^M) = (\underline{x} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{x})^M = \sum_{p+q=M} \binom{M}{p} \underline{x}^p \otimes \underline{x}^q,$$

car $\underline{x} \otimes 1$ et $1 \otimes \underline{x}$ commutent. En posant :

$$\binom{M}{P} = \prod_{\nu \in I} \binom{m_\nu}{p_\nu}$$

on obtient :

$$(1) : t^M = (\underline{x}^M) - 1 \otimes \underline{x}^M - \underline{x}^M \otimes 1 = \sum \binom{M}{P} \underline{x}^P \otimes \underline{x}^Q \quad (P+Q=M ; P, Q \neq \emptyset).$$

La démonstration procède par récurrence sur $|M|$; par hypothèse, les $\underline{x}^N$ sont linéairement indépendants si $|N| = 1$; supposons-les linéairement indépendants pour $|N| \leq m$, et $|N| \leq m+1$. Alors les $y^{P,Q} = \underline{x}^P \otimes \underline{x}^Q$ intervenant dans l'expression de t^M sont linéairement indépendants dans $U_m \otimes U_m$. Les t^M ne sont pas nuls si $m > 1$ (corps de caractéristique 0 !), et si $M \neq M'$ ($m > 1$) t^M et $t^{M'}$ ne font pas intervenir les mêmes $y^{P,Q}$ car dans $t^{M'}$ interviennent les

$y^{P,Q}$ avec $P + Q = M$ et dans $t^{M'}$ les $y^{P,Q}$ avec $P + Q = M' \neq M$: ils sont donc linéairement indépendants.

Supposons alors qu'il y ait une relation linéaire $\sum a_M \underline{x}^M = 0$ entre les $\underline{x}^M$. On en déduit :

$$\sum a_M t^M = \sum a_M H(\underline{x}^M) - 1 \otimes \sum a_M \underline{x}^M - \sum a_M \underline{x}^M \otimes 1$$

ceci implique donc $a_M = 0$ sauf si $|M| = 1$. Mais alors $\underline{x}^M = x_{\underline{L}}$ et on a supposé les $x_{\underline{L}}$ linéairement indépendants ; donc tous les a_M sont nuls et les $\underline{x}^M$ sont linéairement indépendants.

Démonstration du lemme 3 .- Soient $a_{\underline{L}}$ les générateurs de $\mathcal{G}$, $b_{\underline{L}}$ ceux de $U(\mathcal{G}) = L$ (cf. exemple 2 du paragraphe 2), L' l'ensemble des éléments de L sans terme constant. Soit P l'application linéaire de L' dans $\mathcal{G}$ définie par :

$$P(b_{\underline{L}_1} \dots b_{\underline{L}_n}) = [a_{\underline{L}_1} \dots [a_{\underline{L}_{n-1}}, a_{\underline{L}_n}] \dots]$$

Soit θ l'homomorphisme de l'algèbre associative libre L dans l'algèbre associative des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ définie par : $\theta(1) = 1$; $\theta(b_{\underline{L}}) = \text{ad}(a_{\underline{L}})$.

Il est immédiat que si $u \in L$, $v \in L'$: $P(uv) = \theta(u) P(v)$.

D'autre part $(\theta(P[x, y])) = \theta(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x))$
 $= \theta(\rho(x))\theta(\rho(y)) - \theta(\rho(y))\theta(\rho(x))$ comme

par ailleurs $\text{ad}[x, y] = \text{adx} \text{ady} - \text{ady} \text{adx}$ les x tels que $\theta(\rho(x)) = \text{adx}$ forment une algèbre de Lie qui contient les $a_{\underline{L}}$ donc est égale à $\mathcal{G}$ et $\theta(\rho(x)) = \text{adx}$ ($x \in \mathcal{G}$).

Par suite :

$$\begin{aligned} P(\rho([x, y])) &= P(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)) \\ &= \theta(\rho(x))P(\rho(y)) - \theta(\rho(y))P(\rho(x)). \end{aligned}$$

Soit, en posant $Q = P \circ \rho$,

$$Q([x, y]) = \text{ad } x Q(y) - \text{ad } y Q(x) = [x, Q(y)] + [Q(x), y].$$

Autrement dit Q est une dérivation de $\mathcal{G}$. Comme elle coïncide avec l'identité sur les générateurs de $\mathcal{G}$, Q est la dérivation qui multiplie un élément de $\mathcal{G}$ de degré q (par rapport aux $a_{\underline{L}}$) par q , et comme l'anneau de base est un corps de caractéristique 0, Q est biunivoque. A fortiori ρ aussi.

Remarques.

1) Le théorème de Birkhoff-Witt est valable sous la forme 1' chaque fois que $\mathcal{G}$

possède une base sur l'anneau K . Sous la forme 1, Lazard a démontré qu'il est vrai en tout cas si K est un anneau principal. D'une manière générale les hypothèses à faire concernant la structure additive exclusivement. Chirchoff a montré par contre qu'il est des cas où le théorème est faux.

2) On verra dans un exposé ultérieur comment déduire la formule de Campbell-Hausdorff des lemmes 2 et 3.

3) Il résulte de la démonstration du lemme 2 que $t^M = 0$ implique $|M| = 1$, donc que les $\underline{x} \in \mathcal{U}$ sont caractérisés par $H(\underline{x}) = 1 \otimes \underline{x} + \underline{x} \otimes 1$.
