Séminaire "Sophus Lie"

J. P. Serre

Sur les sous-groupes Abéliens des groupes de Lie compacts

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 24, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A26_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 24

SUR LES SOUS-GROUPES ABÉLIENS DES GROUPES DE LIE COMPACTS

(Exposé de J.P. SERRE, le 7.6.55)

1.- Les groupes de type (MP)

Nous avons étudié dans l'exposé précédent les sous-groupes abéliens connexes d'un groupe de Lie compact G et nous avons démontré qu'un tel sous-groupe est toujours conjugué par un automorphisme intérieur à un sous-groupe d'un tore maximal fixé une fois pour toutes. De plus, si T est un tore maximal de G, il ne peut être contenu dans un sous-groupe abélien connexe ou non, strictement plus grand. Par contre, il peut exister des sous-groupes abéliens d'un groupe de Lie compact qui ne sont pas contenus dans un tore maximal, l'exemple le plus simple étant le sous-groupe des matrices diagonales du groupe orthogonal $SO(3)$, qui ne peut être plongé dans un tore maximal, car un tel tore est l'ensemble des rotations laissant fixe une droite donnée. Nous allons démontrer selon Borel et Serre un résultat partiel, à savoir qu'un sous-groupe abélien d'un groupe de Lie compact peut être plongé dans le normalisateur d'un tore. Pour cela, nous allons être amenés à étudier des groupes d'une espèce un peu plus générale que les abéliens, à savoir les groupes qui vérifient la condition suivante :

(MP) Le groupe topologique A possède une suite de sous-groupes invariants fermés $A_0 = A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} = (e)$, chacun des groupes quotients A_i/A_{i+1} étant isomorphe à un tore à une dimension ou à un groupe cyclique Z_n d'ordre n fini.

Une telle suite de sous-groupes est dite semi-principale. Il est clair qu'un groupe (MP) est un groupe de Lie compact résoluble, et que s'il est connexe, il est abélien car son algèbre de Lie étant réductive est somme d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple donc ne peut être résoluble sans être abélienne ; par contre tout groupe résoluble fini n'est pas nécessairement (MP) (prendre le produit semi-direct de $Z_2 + Z_2$ par Z_3, Z_3 permutant circulairement les éléments $\neq 0$ de $Z_2 + Z_2$, qui

ne possède aucun sous-groupe invariant cyclique)

Proposition 1 : Si G est un groupe (MP) , il en est de même de tout sous-groupe fermé et de tout groupe quotient séparé de G ; si H et G/H sont des groupes (MP) et si H est contenu dans le centre de G , alors G est un groupe (MP)

Remarquons tout d'abord que si un groupe topologique A est isomorphe à un tore à une dimension ou à un groupe Z_n , il en est de même de tout sous-groupe fermé et de tout groupe quotient séparé de A . Soit donc G un groupe (MP) , H un sous-groupe fermé et $\{G_i\}$ une suite semi-principale ; on obtient alors une suite semi-principale de H en posant : $H_i = G_i \cap H$ car H_i/H_{i+1} est isomorphe au sous-groupe fermé $H_i + G_{i+1}/G_{i+1}$ de G_i/G_{i+1} (car H_i est compact) donc isomorphe à un tore de dimension 1 ou un Z_n . Si H est invariant et fermé, posons $K = G/H$ et $K_i = G_i + H/H = G_i/G_i \cap H$ (car G_i est compact) ; les K_i sont des sous-groupes invariants fermés de K et K_i/K_{i+1} est isomorphe $G_i/(G_{i+1} + H) \cap G_i$ donc à un tore de dimension 1 ou un Z_n . Enfin si H est un sous-groupe central de G qui soit de type (MP) on obtient une suite semi-principale de G en complétant une suite semi-principale de H par l'image réciproque dans G d'une suite semi-principale de G/H .

Corollaire : Un groupe de Lie compact nilpotent (en particulier abélien) est un groupe (MP)

Un groupe de Lie compact nilpotent se construit par extensions centrales successives, et nous sommes donc ramenés à démontrer le corollaire lorsque le groupe est abélien, c'est-à-dire produit direct d'un tore et d'un groupe abélien fini. Dans ce dernier cas, d'après le théorème de structure de groupes finis, il est produit direct de tores à une dimension et de groupes cycliques finis, et comme il est abélien, on a affaire à des extensions centrales, ce qui montre que le groupe en question est bien (MP) .

Proposition 2 : Un groupe topologique G qui vérifie la condition (MP) et qui n'est pas réduit à l'élément neutre, contient un sous-groupe invariant cyclique d'ordre premier.

$\{G_i\}_1^n$ étant en effet une suite semi-principale de G , G_n est un tore de dimension 1 ou un groupe cyclique fini. Dans les deux cas, le sous-groupe des éléments d'ordre p premier de G_n est un groupe cyclique d'ordre p

pourvu que dans le second cas p divise l'ordre de G_n, sous-groupe qui est invariant par tout automorphisme de G_n, donc en particulier invariant dans G, et ceci prouve la proposition.

2.- Les automorphismes d'ordre premier d'une algèbre de Lie.

Le résultat que nous allons démontrer maintenant est un résultat préliminaire qui nous servira dans la démonstration du résultat principal de cet exposé.

Soit K un corps de caractéristique 0 et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur K

Proposition 3 : Soit σ un automorphisme de $\mathfrak{g}$ dont l'ordre est un nombre premier p et qui n'a aucun point fixe $\neq 0$; alors $\mathfrak{g}$ est nécessairement nilpotente.

Soit $\bar{K}$ la cloture algébrique du corps K et $\bar{\mathfrak{g}}$ l'algèbre déduite de $\mathfrak{g}$ par extension du corps des scalaires de K à $\bar{K}$; σ étant prolongé par linéarité à $\bar{\mathfrak{g}}$, les points fixes de σ dans $\bar{\mathfrak{g}}$ sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\bar{K}$ des points fixes de σ dans $\mathfrak{g}$, donc si σ n'a pas de point fixe $\neq 0$ dans $\mathfrak{g}$, elle n'en a pas non plus dans $\bar{\mathfrak{g}}$. De plus si $\bar{\mathfrak{g}}$ est nilpotente, il en sera de même a fortiori de $\mathfrak{g}$, donc on voit qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque K est algébriquement clos.

Dans ce cas, nous désignerons par $\mathfrak{g}_i$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ défini par l'équation $\sigma(x) = \xi^i x$, ξ désignant une racine p-ième de l'unité primitive et i un entier. Comme $\xi^p = 1$, $\mathfrak{g}_i$ ne dépend que de la classe de i mod. p et l'on peut considérer que l'on a une décomposition en somme directe de l'espace $\mathfrak{g}$ soit $\mathfrak{g} = \sum_{i \in Z_p} \mathfrak{g}_i$. L'hypothèse que σ n'a pas de point fixe non nul signifie $\mathfrak{g}_0 = (0)$ et comme $\sigma([x,y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$, on a $[\mathfrak{g}_i , \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$

On va tout d'abord montrer que si $x \in \mathfrak{g}_i$, ad x est nilpotent. En effet, on peut supposer que $i \not\equiv 0 \bmod p$ car $\mathfrak{g}_0 = (0)$; par suite $\mathrm{ad}^k x$ applique $\mathfrak{g}_j$ dans $\mathfrak{g}_{j+ki}$ et comme p est premier, on peut trouver un k tel que $j + ki \equiv 0 \bmod p$ donc $\mathrm{ad}^k x . \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_0 = (0)$ ce qui prouve bien que ad x est nilpotent.

Si l'on considère maintenant deux éléments de $\mathfrak{g}$, soit $x \in \mathfrak{g}_i$ et $y \in \mathfrak{g}_j$, l'opérateur $(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)^n$ envoie $\mathfrak{g}_k$ dans $\mathfrak{g}_{k+n(i+j)}$;

si $i + j \not\equiv 0 \bmod p$ on peut trouver un n tel que $k + n(i+j) \equiv 0 \bmod p$ donc tel que $(\text{ad } x \circ \text{ad } y)^n$ soit nul ; sinon, i.e. si $i + j \equiv 0 \bmod p$, c'est que $[x,y] \in \mathfrak{g}_0$ donc est nul (et) par suite ad x et ad y commutent ; comme ils sont séparément nilpotents, leur produit est nilpotent. Dans tous les cas ad x ∘ ad y est nilpotent ce qui prouve que $B(x,y) = \text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y) = 0$ pour $x \in \mathfrak{g}_i$ et $y \in \mathfrak{g}_j$; comme B est bilinéaire, il en résulte qu'elle est identiquement nulle, donc d'après le critère de Cartan que $\mathfrak{g}$ est résoluble.

On va en déduire que $\mathfrak{g}$ est nilpotente. En effet, il résulte du théorème de Lie que si $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie linéaire résoluble, l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$ est un sous-espace : en effet, il existe une suite de sous-espaces $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V$ de l'espace V où agit $\mathfrak{h}$ telle que pour $v \in V_i$ on ait $h.v \equiv \lambda_i(h)v \bmod V_{i-1}$ pour tout les $h \in \mathfrak{h}$ et λ_i étant une forme linéaire bien définie sur $\mathfrak{h}$. Les éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$ sont évidemment caractérisés par les conditions $\lambda_i(h) = 0$ conditions qui sont linéaires. Revenons au cas de $\mathfrak{g}$ et considérons sa représentation adjointe : ad x est nilpotent lorsque x est dans l'un des sous-espaces $\mathfrak{g}_i$, donc pour tout $x \in \mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}$ est somme des $\mathfrak{g}_i$. C.Q.F.D.

3.- Le théorème principal.

C'est le théorème suivant dû à A. Borel et J.P. Serre :

Théorème 1 : Soit G un groupe de Lie compact et A un sous-groupe de G vérifiant la condition (MP) . Il existe alors un tore maximal T de G tel que A soit contenu dans le normalisateur N de T dans G

Dire que A est contenu dans le normalisateur d'un tore T signifie que les automorphismes intérieurs de G définis par les éléments de A conservent T , ou encore que le sous-groupe ad A de ad G conserve une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$. Nous allons donc nous ramener à la situation suivante :

A est un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe compact, et A vérifie la condition (MP) et l'on va montrer que sous ces conditions, il existe une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ invariante par A .

(pour faire cette réduction, on s'appuie sur le fait que le quotient d'un groupe (MP) est un groupe (MP)) .

Nous raisonnerons par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. On sait que $\mathfrak{g}$ est produit direct de son centre $\mathfrak{z}$ et d'une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{g}'$; A conserve $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}'$ qui est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$, donc si $\mathfrak{z} \neq (0)$ dim $\mathfrak{g}' <$ dim $\mathfrak{g}$ et A conserve une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}'$ et en faisant le produit de cette sous-algèbre avec $\mathfrak{z}$, on obtient une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ invariante par A .

On peut donc supposer $\mathfrak{g}$ semi-simple. Ecartant le cas trivial où A est réduit à l'élément neutre, on voit par la proposition 2 que A possède un sous-groupe invariant cyclique d'ordre premier p . Soit σ un générateur de ce sous-groupe. La sous-algèbre $\mathfrak{g}_1$ des éléments invariants par σ est différente de $\mathfrak{g}$ et d'après la proposition 3 elle est différente de (0) car une algèbre semi-simple $\neq (0)$ ne peut être nilpotente. $\mathfrak{g}_1$ est stable par A car si $x \in \mathfrak{g}_1$ et $a \in A$, on a $\sigma(a(x)) = a(a^{-1}\sigma a)(x) = a(x)$ car $a^{-1}\sigma a$ est une puissance de σ donc laisse $x \in \mathfrak{g}_1$ invariant. Or $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre d'une algèbre de Lie compact, donc elle est elle-même l'algèbre de Lie d'un groupe compact et A induit un groupe A' d'automorphisme de $\mathfrak{g}_1$. A' vérifie la condition (MP) d'après la proposition 1 et dim $\mathfrak{g}_1 <$ dim $\mathfrak{g}$; on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}_1$ et A' : il existe donc une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}_1$ stable par A' donc par A . Soit $\mathfrak{h}$ cette sous-algèbre et $\mathfrak{g}_2$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ formée des éléments qui commutent à tous les éléments de $\mathfrak{h}$. $\mathfrak{g}_2$ est différente de $\mathfrak{g}$ car le centre de $\mathfrak{g}$ est (0) , elle contient $\mathfrak{h}$, elle est stable par A puisque $\mathfrak{h}$ l'est et enfin, toute sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}$ est contenue dans $\mathfrak{g}_2$ car elle commute nécessairement à $\mathfrak{h}$ donc $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_2$ ont même rang. A induit dans $\mathfrak{g}_2$ un groupe A" d'automorphismes qui vérifie la condition (MP) et dim $\mathfrak{g}_2 <$ dim $\mathfrak{g}$; par suite $\mathfrak{g}_2$ contient une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}'$ invariante par A" . Comme $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_2$ ont même rang $\mathfrak{h}'$ est aussi une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ et elle est invariante par A . Ceci achève la démonstration du théorème.

4.- Applications du théorème.

Nous allons chercher tout d'abord les tores maximaux T du groupe U(n) des matrices unitaires de degré n . Toute représentation linéaire complexe du groupe abélien compact T est somme directe de représentations de dimension 1 , autrement dit, tout sous-groupe abélien de U(n) est

conjugué à un groupe de matrices diagonales ; le groupe des matrices diagonales est donc un tore maximal T de $U(n)$. Soit N le normalisateur de T dans $U(n)$; si D est une droite invariante par T et si $n \in N$, n transforme D en une droite D' invariante par T car $t.D' = n(n^{-1}tn).D = n.D$ si $t \in T$ (noter $n^{-1}tn \in T$) ; or les seules droites invariantes par T sont les axes de coordonnées et par suite si e_i sont les vecteurs de base, toute $n \in N$ est de la forme $e_i \longrightarrow \lambda_i e_{\sigma(i)}$ (λ_i scalaire de module 1 et σ permutation de l'intervalle $[1,n]$). Les matrices de cette sorte sont appelées monomiales.

Soit G un groupe (MP) et ρ une représentation linéaire de dimension n de G autrement dit un homomorphisme de G dans $U(n)$ (car G est compact et toute représentation de G est équivalente à une représentation unitaire). D'après le théorème 1 $\rho(G)$ se plonge dans un sous-groupe conjugué de N , autrement dit, on peut choisir une base de l'espace de représentation par rapport à laquelle les opérateurs $\rho(g)$ aient des matrices monomiales. Donc :

Théorème 2 (Blichtfeld) : Toute représentation linéaire de dimension finie d'un groupe vérifiant la condition (MP) est équivalente à une représentation par des matrices monomiales.

Ceci s'applique en particulier aux groupes nilpotents finis et aux p-groupes et dans ce cas on obtient un théorème bien connu. Il y a d'ailleurs des groupes qui ne sont pas (MP) et qui vérifient le théorème (exemple le groupe cité en 1) .

Pour terminer, donnons quelques applications au p-rang des groupes de Lie compacts. De manière générale, on appelle p-rang d'un groupe G le plus grand entier m fini ou non tel que G contienne un sous-groupe isomorphe à $(Z_p)^m$, p étant un nombre premier. On désigne le p-rang de G par $\ell_p(G)$. On a pour tout groupe G et tout sous-groupe H invariant les inégalités :

$$\ell_p(H) \leq \ell_p(G) \leq \ell_p(H) + \ell_p(G/H)$$

la première de ces inégalités est évidente, tandis que la seconde résulte de ce que si A est un sous-groupe de G isomorphe à $(Z_p)^{\ell_p(G)}$, $A \cap H$ est de la forme $(Z_p)^m$ avec $m \leq \ell_p(H)$ et $A/A \cap H$ est de la forme $(Z_p)^n$ avec $n \leq \ell_p(G/H)$ et $m + n = \ell_p(G)$.

Si G est un groupe de Lie compact, le théorème 1 montre immédiatement que G et N ont même p-rang et par suite comme N/T est isomorphe au groupe de Weyl, on a

$$\ell_p(T) \leq \ell_p(G) \leq \ell_p(T) + \ell_p(W)$$

$\ell_p(T)$ n'est autre que la dimension de T, i.e. le rang usuel de G et comme W est un groupe de transformations linéaires orthogonales de degré l, on a comme on s'en convainct aisément $\ell_p(W) \leq l/2$ si $p \neq 2$ et $\ell_2(W) \leq l$ donc

$$l \leq \ell_p(G) \leq (3/2)l \qquad \text{si } p \neq 2$$

$$l \leq \ell_p(G) \leq 2l \qquad \text{si } p = 2$$

5.- Remarques finales.

a) Jacobson a démontré récemment que l'hypothèse que K est de caractéristique 0 est inutile pour la validité de la proposition 3 (Proc. Amer. Math. Soc. 1955, n° 2)

b) Nous avons utilisé dans la démonstration du théorème 1 le fait suivant : si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur le corps des réels et s'il existe un groupe de Lie compact ayant $\mathfrak{g}$ ppur algèbre de Lie, toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact. La démonstration de ce fait repose sur le critère suivant :

Pour que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur le corps des réels soit l'algèbre de Lie d'un groupe compact, il faut et il suffit qu'il existe sur $\mathfrak{g}$ une forme quadratique définie positive f invariante, i.e. $f(x,[y,z]) = f([x,y], z)$

C'est nécessaire, car si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du groupe compact G la représentation adjointe du groupe compact G dans $\mathfrak{g}$ laisse invariante une forme quadratique définie positive, et comme l'algèbre de Lie du groupe orthogonal se compose des matrices antisymétriques, il en résulte bien que f est invariante au sens donné ci-dessus à ce mot.

C'est suffisant, car l'existence de f implique évidemment que tout idéal de $\mathfrak{g}$ admet un idéal supplémentaire, à savoir l'orthogonal pour f et par suite que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible. $\mathfrak{g}$ est donc réductive et par suite somme directe d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple. Une algèbre de Lie abélienne est

l'algèbre de Lie d'un tore qui est un groupe compact. Reste donc à examiner le cas où $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Toute dérivation de $\mathfrak{g}$ étant intérieure, le groupe adjoint est la composante connexe du groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$, donc c'est un groupe linéaire fermé, donc compact puisque f est une forme quadratique définie positive invariante par ce sous-groupe. L'algèbre de Lie de ce groupe compact est alors $\mathfrak{g}$, ce qui prouve notre assertion.

c) Le p-rang d'un groupe de Lie compact est fini d'après les inégalités du n° 4 et il est au moint égal au rang usuel. Il y a des cas où le p-rang peut être strictement plus grand que le rang, par exemple si G est le groupe SO(n) des matrices orthogonales unimodulaires de degré n, le rang de G est la partie entière de n/2, tandis que les 2-groupes abéliens maximaux de SO(n) sont conjugués au groupe des matrices diagonales (ayant des ± 1 sur cette diagonale et un nombre pair de - 1 puisque det g = 1) donc le 2-rang de SO(n) vaut n - 1. Borel et Serre ont montré que si $\ell_p(G) > \ell$, le groupe d'homologie de G à coefficients entiers a une composante p-primaire non nulle, le groupe adjoint de SO(6) mettant la réciproque en défaut.