Séminaire "Sophus Lie"

F. Bruhat

Automorphismes des algèbres de Lie semi-simples

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 16, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A19_0>

Exposé n° 16

AUTOMORPHISMES DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

(Exposé de F. BRUHAT, le 22.3.1955)

Le corps de base est le corps des complexes.

Par automorphisme d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il faut entendre un automorphisme A de la structure d'espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $A[x,y] = [Ax,Ay]$ pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$.

Supposons $\mathfrak{g}$ de dimension n ; l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{g}$, que nous noterons $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, est un sous-groupe de $GL(n,C)$, fermé, non nécessairement connexe.

C'est un groupe de Lie pour la structure induite.

L'algèbre de Lie de $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$ (cf. Chevalley, p. 137). A l'idéal $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ des dérivations intérieures correspond un sous-groupe invariant $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ de $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, le groupe des automorphismes intérieurs. Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre d'un groupe G connexe $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \approx G/Z$ (Z est le centre de G). En général $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ n'est pas fermé dans $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, mais si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, toute dérivation est intérieure et $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ est la composante connexe de l'unité dans $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, donc est fermé dans $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

Soient $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a vu (Exposé n° 15) qu'il existe un automorphisme intérieur u de $\mathfrak{g}$ qui applique $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}'$. Soit alors $A \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$; $A\mathfrak{h}$ est une algèbre de Cartan, donc il existe $u \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$, tel que $u^{-1}A\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Donnons-nous une fois pour toutes l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et désignons maintenant par A un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui conserve $\mathfrak{h}$. (Nous venons de voir que toute classe de $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ modulo $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ contient un tel automorphisme).

A conserve la forme de Killing, i.e. $\langle Ax,Ay \rangle = \langle x,y \rangle$, puisque A conserve le crochet.

A permute entre elles les racines. Soit α une racine, et prenons $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$. On a :

$$A[H,E_\alpha] = \alpha(H)AE_\alpha = [AH,AE_\alpha] \text{ et d'autre part :}$$

$$\alpha(H) = \langle H,H'_\alpha \rangle = \langle AH,AH'_\alpha \rangle = \alpha^*(AH) \text{ , d'où :}$$

$$[AH, AE_\alpha] = \alpha^*(AH)\, AE_\alpha$$

et puisque A conserve $\mathfrak{h}$, $\alpha^*(H)$ définit bien une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. Nous dirons que α^* est l'image de α par A ; AE_α est un vecteur de $\mathfrak{g}^{\alpha^*}$ et donc $AE_\alpha = \nu_\alpha E_{\alpha^*}$.

Supposons que les E_α définissent une base de Weyl canonique. Puisque A est un automorphisme, $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H'_\alpha$ entraîne $A[E_\alpha, E_{-\alpha}] = [\nu_\alpha E_{\alpha^*}, \nu_{-\alpha} E_{-\alpha^*}] = -H'_{\alpha^*}$ (évidemment $AH'_\alpha = H'_{A\alpha} = H'_{\alpha^*}$). Comme par ailleurs on avait $[E_{\alpha^*}, E_{-\alpha^*}] = -H'_{\alpha^*}$, on en déduit :

(1) $$\nu_\alpha \nu_{-\alpha} = 1 \quad .$$

Ensuite, de $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$, on tire :

$$[\nu_\alpha E_{\alpha^*}, \nu_\beta E_{\beta^*}] = N_{\alpha,\beta}\, \nu_{\alpha+\beta} E_{\alpha^*+\beta^*}$$

et par conséquent :

(2) $$\nu_\alpha \nu_\beta = \frac{N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha^*,\beta^*}} \nu_{\alpha+\beta} \quad .$$

Mais nous avons vu (Exposé n° 11) que :

$$N^2_{\alpha,\beta} = \tfrac{1}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle q(1-p) \qquad (q \geqslant 0 \ , \ p \leqslant 0) \ ;$$

$q \leqslant k \leqslant p$ entraîne que $\beta + k\alpha$ est une racine, tandis que $\beta + (p-1)\alpha$ et $\beta + (q+1)\alpha$ ne sont pas des racines. Or $(\beta + k\alpha)^* = \beta^* + k\alpha^*$, donc les nombres p et q sont les mêmes pour (α, β) et (α^*, β^*). De plus $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha^*, \alpha^* \rangle$, d'où : $N^2_{\alpha,\beta} = N^2_{\alpha^*,\beta^*}$ ou encore $N_{\alpha,\beta} = \pm N_{\alpha^*,\beta^*}$. Ainsi la formule (2) devient :

(3) $$\nu_\alpha \nu_\beta = \pm \nu_{\alpha+\beta} \quad .$$

Soit alors $\tilde{H} \in \mathfrak{h}$. L'automorphisme $B = e^{ad\tilde{H}} = \sum \frac{1}{n!} ad^n \tilde{H}$ est l'identité sur $\mathfrak{h}$ (qui est abélienne) et, pour chaque racine α

$$B E_\alpha = \sum \frac{1}{n!} \underbrace{[\tilde{H}, [\tilde{H}, \ldots, [\tilde{H}}_{n}, E_\alpha], \ldots,] = \sum \frac{1}{n!} [\alpha(\tilde{H})]^n E_\alpha =$$

$$= e^{\alpha(\tilde{H})} E_\alpha \quad .$$

Le composé AB conserve évidemment $\mathfrak{h}$; on a :

$$AB\, E_\alpha = \nu'_\alpha E_{\alpha^*} \ , \text{ avec } \nu'_\alpha = e^{\alpha(\tilde{H})} \nu_\alpha \quad .$$

Prenons alors un système $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ de racines simples et choisissons $\tilde{H} \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_i(\tilde{H}) = -\log \nu_{\alpha_i}$. Ceci est toujours possible ; $\nu_{\alpha_i} \neq 0$ car A est un automorphisme de $\mathfrak{g}$. Soit une racine $\alpha = \sum_{i=1}^{r} a_i \alpha_i$, où les a_i sont tous des entiers de même signe. On a :

$$\nu'_\alpha = (\prod \nu_{\alpha_i}^{-a_i})\, \nu_\alpha \ .$$

Or en utilisant la formule (3) et le fait que si α n'est pas simple et $\alpha \succ 0$ on a $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \succ 0$, on démontre par récurrence que :

$$\nu_\alpha = \pm \prod \nu_{\alpha_i}^{a_i} \tag{4}$$

d'où l'on déduit que $\nu'_\alpha = \pm 1$. Remarquons que AB appartient à la classe modulo Int $\mathfrak{g}$ de A, puisque $B \in$ Int $\mathfrak{g}$. En conclusion, nous pouvons énoncer :

Dans chaque classe modulo Int $\mathfrak{g}$ de Aut $\mathfrak{g}$, on peut trouver un automorphisme A de $\mathfrak{g}$ qui conserve une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, tel de plus que

$$A\, E_\alpha = \pm E_{\alpha^*} \qquad (\alpha^* = \check{A}\alpha)$$

pour toute racine α.

Remarquons que A conserve la forme compacte $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ (engendrée par les iH'_α, les $(E_\alpha + E_{-\alpha})$ et les $(E_\alpha - E_{-\alpha})$).

Proposition 1.- Pour qu'un automorphisme A de $\mathfrak{g}$ coïncide avec l'identité sur $\mathfrak{h}$, il faut et il suffit qu'il existe $H' \in \mathfrak{h}$ tel que $A = e^{\operatorname{ad} H'}$.

Que la condition soit suffisante est évident. Pour voir qu'elle est nécessaire, partons du fait que $AH = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ implique $\alpha^* = \alpha$ pour toute racine α. De la formule (2), on déduit $\nu_{\alpha+\beta} = \nu_\alpha \nu_\beta$. La formule (4) devient alors $\nu_\alpha = \prod \nu_{\alpha_i}^{a_i}$ et conduit à $\nu'_\alpha = +1$, B étant défini comme il a été dit. Mais alors AB est l'identité sur $\mathfrak{h}$, et pour chaque racine α, $AB\, E_\alpha = E_\alpha$. Autrement dit, AB est l'identité sur $\mathfrak{g}$ tout entier. Ceci prouve que A est l'inverse de B et, par conséquent, démontre la proposition 1, car $A = e^{-\operatorname{ad} \tilde{H}}$ $(\tilde{H} \in \mathfrak{h})$.

Nous noterons Exp ad $\mathfrak{h}$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui induisent l'identité sur $\mathfrak{h}$; c'est un sous-groupe abélien maximal dans Aut $\mathfrak{g}$ (et non pas seulement maximal dans l'ensemble des sous-groupes abéliens connexes de Aut $\mathfrak{g}$).

On désigne par $\mathfrak{C}$ le groupe des transformations orthogonales (i.e. qui

conservent la forme de Killing) de $\mathfrak{h}$ et qui permutent les racines entre elles. $\mathfrak{C}$ est fini car les racines sont en nombre fini et si une transformation linéaire de $\mathfrak{h}$ conserve chaque racine, c'est l'identité sur $\mathfrak{h}$ (les racines sous tendent $\mathfrak{h}$). Tout élément de $\mathfrak{C}$ se prolonge en un automorphisme de $\mathfrak{g}$ d'après le théorème 1 de l'Exposé n° 11.

Nous noterons $\mathfrak{J}$ le sous-groupe de $\mathfrak{C}$ correspondant à Int $\mathfrak{g}$. Il est alors clair que Aut $\mathfrak{g}$ /Int $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{C}/\mathfrak{J}$ est un groupe, non seulement discret, mais aussi fini.

Soit alors λ une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$; P_λ sera l'hyperplan d'équation $\lambda(H) = 0$ dans $\mathfrak{h}$ et P_λ^* l'hyperplan d'équation $\langle \lambda, \mu \rangle = 0$ dans $\mathfrak{h}^*$; S_λ désignera la symétrie par rapport à P_λ dans $\mathfrak{h}$ et aussi la symétrie par rapport à P_λ^* dans $\mathfrak{h}^*$. On a donc

$$S_\lambda(H) = H - 2 \frac{\langle \lambda, H \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} H'_\lambda \qquad H \in \mathfrak{h}$$

$$S_\lambda(\mu) = \mu - 2 \frac{\langle \lambda, \mu \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \lambda \qquad \mu \in \mathfrak{h}^* \ .$$

En particulier, prenons pour λ une racine α et appliquons S_α à une autre racine β : $S_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$.

Or d'une part, $p+q = - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ (Exposé n° 10) $(p < 0 \ , \ q > 0)$, de l'autre, $\beta + k\alpha$ est une racine pour tout k compris entre p et q ; donc $S_\alpha(\beta) = \beta + (p+q)\alpha$ est une racine. On appelle <u>groupe de Weyl</u> de $\mathfrak{g}$ le groupe $\mathfrak{S}$ engendré par les symétries S_α , où α parcourt le système Δ des racines de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$. Nous allons montrer, plus loin, que $\mathfrak{S} = \mathfrak{J}$.

Notons toujours $P_\alpha \ (\alpha \in \Delta)$ l'hyperplan de $\mathfrak{h}$ défini par $\alpha(H) = 0$. Soit $K = \mathfrak{h} - \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$; on appelle <u>Chambre de Weyl</u> dans $\mathfrak{h}$ tout convexe maximal de K . Soient r racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (qui engendrent $\mathfrak{h}$). L'ensemble C_0 des $H \in \mathfrak{h}$ tels que $\langle \alpha_i, H \rangle > 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$ est une chambre de Weyl. On ne peut avoir $\langle \alpha, H \rangle = 0$ pour aucune racine α car $\alpha = \sum k_i \alpha_i$, où les k_i sont des entiers tous de même signe.

Soit alors $\mathfrak{S}'$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}$ engendré par les $S_{\alpha_i} = S_i \quad (1 \leq i \leq r)$. $\mathfrak{S}'$ est transitif sur les chambres de Weyl ; i.e. si C_1 est une chambre de Weyl arbitraire , il existe $s \in \mathfrak{S}'$ tel que $C_0 = s\, C_1$. Il suffit de montrer que, w étant quelconque dans C_1 , il existe $s \in \mathfrak{S}'$ tel que $s\, w \in C_0$ (car alors on aura $s\, \omega' \in C_0$ pour tout $w' \in C_1$). On considère tous les transformés $\sigma\, w$ de w lorsque σ parcourt $\mathfrak{S}'$. Etant donné un point quelconque w_0 de

C_0 , on prend celui des σw le plus proche de w_0 . Il appartient nécessairement à C_0 , sinon il existerait une symétrie S_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ telle que $S_i \sigma w$ soit plus proche de w_0 que σw (se vérifie immédiatement sur un dessin).

$\mathcal{G}'$ est transitif sur les faces des chambres de Weyl, c'est-à-dire sur les plans P_α (car $S \in \mathcal{G}'$ transforme un plan P_α en un autre plan $P_{\alpha'}$). Soit donc une racine α ; α et $-\alpha$ sont les seules racines orthogonales à P_α . Donnons nous une racine simple α_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ quelconque ; il existe $s \in \mathcal{G}'$ telle que $s P_{\alpha_i} = P_\alpha$. En particulier, $s\alpha_i = \pm \alpha$. Si $s\alpha_i = -\alpha$, considérons $s(S_{\alpha_i} \alpha_i) = s(-\alpha_i) = \alpha$. Il existe donc $s \in \mathcal{G}'$ telle que $s\alpha_i = \alpha$ et l'on voit que $S_\alpha = s\, S_i\, s^{-1}$. Comme $s, S_i \in \mathcal{G}'$, ceci signifie que $S_\alpha \in \mathcal{G}'$, donc que $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$. Nous avons donc démontré :

Théorème 1.- Si $\{\alpha_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ est un système de racines simples de $\mathfrak{g}$, les symétries S_{α_i} engendrent le groupe de Weyl $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{g}$. De plus, $\mathcal{G}$ est transitif sur les chambres de Weyl et toute racine α est l'image d'une racine α_i par une transformation $s \in \mathcal{G}$.

Une conséquence de ce théorème est que le système des racines simples détermine celui de toutes les racines, résultat déjà obtenu différemment (Exposé n° 10).

Nous allons maintenant établir que $\mathcal{G}$ n'est pas autre chose que le sous-groupe $\mathcal{J}$ de $\mathcal{G}$ correspondant à Int $\mathfrak{g}$ (cf. p.16-04).

1.- $\mathcal{G} \subset \mathcal{J}$.

Il suffit de montrer que $S_\alpha (\alpha \in \Delta)$ est induite sur $\mathfrak{h}$ par un automorphisme de la forme $U = e^{\operatorname{ad} X}$. Il n'y a qu'à prendre $X = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}\,\langle \alpha, \alpha \rangle} (E_\alpha + E_{-\alpha})$. Comme ad X est nulle sur P_α , U est l'identité sur P_α . Pour $H \in \mathfrak{h}$ quelconque U est la symétrie désirée. On le voit en écrivant :

$$U.H = H + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \operatorname{ad}^{2p+1} X.H + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+2)!} \operatorname{ad}^{2p+2} X.H$$

La somme de la 1ère série est le produit d'un certain facteur par $\sin \pi$, donc est nulle. La deuxième est égale à $\dfrac{\cos \pi - 1}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha(H)\, H'_\alpha$, ce qu'on voulait. Dans le cas particulier où $H = H'_\alpha$, on trouve $U.H = - H'_\alpha$. De même, on verrait que $U.E_\alpha = E_{-\alpha}$ et $U.E_{-\alpha} = E_\alpha$. Dans l'algèbre à trois dimensions engendrée par H'_α , E_α et $E_{-\alpha}$, la matrice de U s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on remarque que $X \in \mathfrak{g}_u$ (forme compacte de $\mathfrak{g}$). Ceci entraîne que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_u$ ont même groupe de Weyl.

2.- $\mathcal{J} = \mathcal{E}$.

Il suffira de montrer que $\mathcal{J}$ est simplement transitif sur les chambres de Weyl. $\mathcal{E}$, qui est un sous-groupe de $\mathcal{J}$ d'après 1., devra être identique à $\mathcal{J}$. En particulier, on aura établi que le groupe de Weyl est simplement transitif sur les chambres de Weyl.

Soit alors $A \in \mathcal{J}$. On a $A\,\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Supposons qu'une chambre de Weyl soit stable pour A ; ou encore supposons que $\check{A}$ conserve le système $\sum$ des racines > 0. Nous allons prouver que $A \in \exp \operatorname{ad} \mathfrak{h}$, ce qui établira que A induit l'identité sur $\mathfrak{h}$.

$\check{A}$ est une permutation du système $\triangle$ de toutes les racines ; soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ les différents cycles de $\triangle$ pour cette permutation. On peut écrire :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{g}^{\sigma_i} \quad ,$$

chacun des $\mathfrak{g}^{\sigma_i}$ étant stable pour A. Une base de $\mathfrak{g}^{\sigma}$ est constituée par E_α, $E_{\check{A}\alpha}, \ldots, E_{\check{A}^{q}\alpha}$, où $\alpha \in \sigma$. Et :

$$A\, E_{\check{A}^{m}\alpha} = \nu_m\, E_{\check{A}^{m+1}\alpha}$$

Dans $\mathfrak{g}^{\sigma}$, la matrice qui représente A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_q \\ \nu_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu_{q-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et, par suite, $\det(A - \lambda I) = 0$ n'est autre que l'équation :

(5) $$\lambda^q - \nu_1\,, \ldots, \nu_q = 0$$

Au lieu de A, considérons maintenant AB, avec $B = e^{\text{ad } H}$, $H \subset \mathfrak{h}$. $AB \in \text{Int } \mathfrak{g}$ évidemment et définit la même permutation des racines que A. Ce que nous venons de dire reste donc valable pour AB ; l'équation (5) est dans ce cas :

$$\lambda^q - (\nu'_1 \quad \dots \quad \nu'_q) = 0 \quad . \tag{6}$$

Mais comme $\nu'_m = e^{\check{A}^m \alpha(H)} \nu_m$, elle peut encore s'écrire

$$\lambda^q - e^{\sum_{m=0}^{q} \check{A}^m \alpha(H)} \nu_1 \dots \nu_q = 0 \quad .$$

Du fait que A conserve le système $\sum$ des racines positives, découle que $\sum_{m=0}^{q} \check{A}^m \alpha(H) \neq 0$, puisque les $\check{A}^m \alpha$ $(0 \leqslant m \leqslant q)$ ont toutes le même signe.

Choisissons alors $H \in \mathfrak{h}$ tel que

$$e^{\sum \check{A}^m \alpha(H)} \nu_1 \dots \nu_q \neq 1 \quad .$$

Dans ces conditions, (6) ne peut admettre la racine 1. Choisissons H (ce qui est manifestement possible) de telle sorte que cette situation se retrouve dans tous les sous-espaces $\mathfrak{g}^\sigma$ à la fois. Alors

$$\mathfrak{g}(AB , 1) \cap (\sum_{i=1}^{p} \mathfrak{g}^{\sigma_i}) = (0)$$

et donc $\mathfrak{g}(AB , 1) \subset \mathfrak{h}$. Rappelons que $\mathfrak{g}(U , \lambda)$ est le sous-espace propre de l'endomorphisme U de $\mathfrak{g}$ correspondant à la valeur propre λ.

Nous allons maintenant utiliser le lemme suivant :

Lemme.- Si $A \in \text{Int } \mathfrak{g}$, alors $\dim \mathfrak{g}(A , 1) \geqslant r$ (r est la dimension de $\mathfrak{h}$).

Le lemme est vrai lorsque A est voisin de l'identité dans $\text{Int } \mathfrak{g}$, car alors $A = e^{\text{ad } X}$, avec $X \in \mathfrak{g}$ et donc $\mathfrak{g}(A , 1) = \mathfrak{g}(X , 0)$. Mais nous avons vu que $\dim \mathfrak{g}(X , 0) \geqslant r$ (Exposé n° 10). Toutefois, puisque $\text{Int } \mathfrak{g}$ est un groupe de Lie connexe, le résultat est encore vrai dans $\text{Int } \mathfrak{g}$ tout entier car on a $\det(A-\lambda 1) = \sum (\lambda-1)^P \varphi_P(A)$ où φ_P est une fonction analytique et $\dim \mathfrak{g}(A , 1) \geqslant r$ signifie $0 = \varphi_0(A) = \dots = \varphi_{r-1}(A)$ donc si cette identité est valable dans un voisinage de l'origine elle est vraie sur tout $\text{Int } \mathfrak{g}$.

Appliquons le lemme en prenant AB au lieu de A. On a donc $\mathfrak{g}(AB, 1) \subset \mathfrak{h}$ et $\dim \mathfrak{g}(AB, 1) \geq r$; cela implique $\mathfrak{g}(AB, 1) = \mathfrak{h}$. Autrement dit, AB induit l'identité sur $\mathfrak{h}$; mais, en vertu de la proposition 1, cela signifie qu'il existe $H' \in \mathfrak{h}$ tel que $AB = e^{\operatorname{ad} H'}$, d'où : $A = e^{\operatorname{ad} H'} B^{-1} = e^{\operatorname{ad}(H'-H)} \in \operatorname{Exp} \operatorname{ad} \mathfrak{h}$.

C.Q.F.D.

Nous pouvons donc énoncer le théorème :

Théorème 2.- Le groupe $\operatorname{Aut} \mathfrak{g} / \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ est fini et isomorphe à $\mathcal{C}/\mathcal{C}$; autrement dit les transformations linéaires de $\mathfrak{h}$ induites par les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ qui conservent $\mathfrak{h}$ constituent exactement le groupe de Weyl. Le groupe de Weyl est simplement transitif sur les chambres de Weyl.