

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

M. BERGER

CARTIER P

Classification des algèbres de Lie simples

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 13, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A16_0>

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 13

CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE SIMPLES

(Exposé de M. BERGER, le 15.2.1955,
repris par P. CARTIER, le 15.3.1955).

Cet exposé a été fait par M. BERGER en suivant la méthode de classification de Van der Waerden (Math. Zeitschrift (37), p. 446-462). Devant la complexité de cette méthode et l'impossibilité de la rédiger proprement, la question a été reprise d'après la méthode de Dynkin dans un exposé de P. CARTIER, le 15.3.1955 : c'est cette dernière méthode que l'on va lire ici.

1.- Introduction.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur le corps K algébriquement clos de caractéristique 0, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Π un système de racines simples et V l'espace $\mathbb{Q}$ -vectoriel engendré par les racines dans le dual de $\mathfrak{h}$. On sait que sur V , la forme de Killing est rationnelle et définie positive et que Π a les propriétés suivantes :

- 1) Π est un système de vecteurs linéairement indépendants.
- 2) Si $\alpha, \beta \in \Pi$ sont distincts, $a_{\alpha\beta} = -2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est un entier positif ou nul.
- 3) Il n'existe pas de partitions $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$, tout élément de Π' étant orthogonal à tout élément de Π'' .

On sait de plus que Π détermine le système Δ des racines $\neq 0$ et que Δ détermine $\mathfrak{g}$ à un isomorphisme près. Le problème de la classification est donc ramené à la recherche des systèmes Π de vecteurs d'un espace euclidien vérifiant les conditions 1) à 3), car de 2) s'ensuit que sur le sous-espace $\mathbb{Q}$ -vectoriel V engendré par Π , le produit scalaire est rationnel. D'autre part, une homothétie ne change rien à la validité des conditions 1) à 3), mais Π détermine bien Δ , et on a dans Δ la relation $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{\gamma} \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \gamma, \beta \rangle$ qui achève de déterminer le coefficient de proportionnalité.

Π sera dit admissible s'il vérifie 1) et 2) et connexe si de plus il vérifie 3).

2.- Recherche des systèmes admissibles connexes.

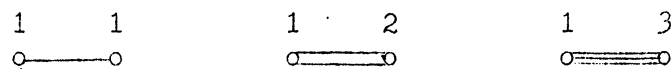
On note $|v|$ la longueur du vecteur v , soit $\langle v, v \rangle = |v|^2$.

Soit Π un système admissible, $\alpha, \beta \in \Pi$ distincts et non orthogonaux et

θ leur angle. On a $0 < a_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha} = 4 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\alpha|^2 |\beta|^2} = 4 \cos^2 \theta < 4$, donc le plus petit des deux nombres entiers positifs $a_{\alpha\beta}$ et $a_{\beta\alpha}$ est égal à 1, i.e. $\sup(|\alpha|^2, |\beta|^2) = -2 \langle \alpha, \beta \rangle$. Supposons par exemple $|\alpha| \geq |\beta|$ donc $a_{\alpha\beta} \leq a_{\beta\alpha}$, alors $|\alpha|^2 / |\beta|^2 = a_{\beta\alpha} / a_{\alpha\beta} = 4 \cos^2 \theta$. Il y a donc 3 cas possibles correspondant à $4 \cos^2 \theta = 1, 2, 3$, $\Pi - \theta = \pi/3, \pi/4, \pi/6$.

On fait alors correspondre à Π un schéma S ainsi obtenu : à chaque $\alpha \in \Pi$ on fait correspondre un point du plan affecté d'un coefficient égal à $\langle \alpha, \alpha \rangle$, deux points distincts étant joints par un nombre de traits égal à $4 \cos^2 \theta$, i.e. au carré du rapport de leurs longueurs. L'ordre du schéma est par définition, le nombre d'éléments du système Π , et les schémas obtenus par ce procédé se nomment admissibles ; deux points étant non liés si et seulement si les vecteurs correspondants sont orthogonaux, le schéma est connexe si et seulement si Π vérifie 3). Si S est un schéma admissible, on obtient un schéma admissible en effaçant certains des points et les liens qui les joignent aux points restants car ceci revient à remplacer Π par un sous-système (peut-être non connexe) et il est clair que les conditions 1) et 2) sont héréditaires.

Avec ces conventions, les schémas d'ordre 2 sont les suivants :



Nous allons pour l'instant étudier l'aspect combinatoire des schémas nous contentant d'écrire les liens, mais non les coefficients.

A) Dans un schéma admissible d'ordre n , il y a au plus $(n-1)$ couples liés.

Posons $x = \sum_{\alpha \in \Pi} \alpha / |\alpha|$. On sait que $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ pour α, β distincts et que si α et β ne sont pas orthogonaux $4 \cos^2 \theta$ est un entier, donc $4 \cos^2 \theta \geq 1$ et $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|} \leq -1$. Or s'il y a plus de $n-1$ couples non orthogonaux dans Π ,

$$|x|^2 = \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2} + 2 \sum_{(\alpha, \beta)} \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|} \leq n - n = 0, \text{ donc } x = 0 \text{ et les éléments de}$$

Π ne sont pas linéairement indépendants contrairement à 1).

On en déduit qu'un schéma admissible ne contient pas de cycle fermé C car

C lui-même serait un schéma admissible et il est clair (cf. fig.1) que C contient au moins autant de $\checkmark$ couples liés que d'éléments. Ensuite si $S' \subset S$ est un sous-schéma connexe et si $\alpha \notin S'$, α est lié à au plus un élément de S' : soit en effet α lié à β et γ éléments de S' ; S' est connexe, donc il existe une suite $\beta_0 = \beta, \beta_1, \dots, \beta_n = \gamma$ d'éléments de S' , β_i étant lié à β_{i+1} , et le sous-schéma de S formé de α et des β_i contient $n+1$ éléments et au moins $n+1$ $\checkmark$ couples liés ce qui est impossible. De plus si $S' \neq S$ et si S est connexe, il existe au moins un vecteur $\alpha \notin S'$ lié à un vecteur de S' , donc il existe un vecteur $\alpha \notin S'$ qui est lié à un vecteur et un seul de S' .

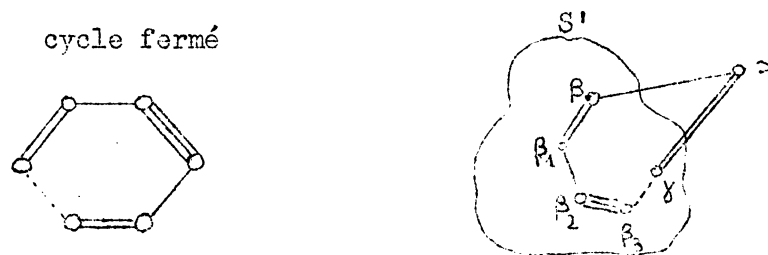


figure 1

B) D'un point d'un schéma admissible partent au plus 3 liens : soit en effet $\alpha \in \Pi$ et β_i les points auxquels il est joint. Comme α est lié à β_i et β_j , il résulte du fait qu'il n'y a pas de cycle fermé dans S , que β_i et β_j ne sont pas liés pour $i \neq j$, donc sont orthogonaux. Soit γ un vecteur orthogonal aux β_i du sous-espace W engendré par α et les β_i ; on a ainsi un repère orthogonal de W et le théorème de Pythagore montre que $\cos^2 \theta_0 + \sum_i \cos^2 \theta_i = 1$ (θ_0 angle de α et γ , θ_i angle de γ et β_i). Comme α est linéairement indépendant des β_i , il n'est pas orthogonal à γ et $\cos \theta_0 \neq 0$. On en déduit que $\sum_i 4 \cos^2 \theta_i < 4$ ce qui démontre l'affirmation.

(cf. Fig.2).

De là résulte qu'un schéma admissible connexe d'ordre ≥ 3 ne contient pas de lien triple.

En effet, si de α part un lien triple, aucun autre lien ne part de α d'après B) ; par suite si α et β sont joints par un lien triple, il ne sont pas liés au reste du schéma, donc en formant une composante connexe, ce qui est impossible si le schéma est connexe et d'ordre ≥ 3 .

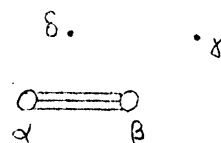
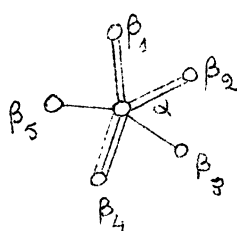


Figure 2

C) Une chaîne C est une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ de points de S dont les seuls liens joignent α_i à α_{i+1} ($1 \leq i \leq n$) ; C est homogène si ses liens sont simples. Si C est une chaîne, elle est connexe donc si $\beta \notin C$, il est lié à un point de C au plus. Formons un nouveau schéma S' en identifiant tous les points de C en un point α qui sera joint p fois à $\beta \notin C$, si et seulement si β a un lien d'ordre p avec un point de C . Si S est admissible, il en est de même de S' ; en effet formons un système de vecteurs Π' ainsi : on garde les vecteurs de Π qui ne sont pas dans C et on y ajoute $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = \alpha$. Π' est admissible car si $\beta \notin C$ est lié à α_i , il est orthogonal aux autres vecteurs de C et donc $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha_i \rangle$; de plus

$$|\alpha|^2 = \sum_{i=1}^n (\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle + 2\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle) + |\alpha_{n+1}|^2 = |\alpha_{n+1}|^2. \text{ Il est donc clair que la}$$

condition 2) est vérifiée par Π' et quant à la vérification de la condition 1) elle est immédiate.

En conséquence, les schémas (a_k) (b_k) (c_k) (cf. Fig.3) ne sont pas admissibles car en leur appliquant le procédé indiqué, on les réduit respectivement à (a_1) (b_1) (c_1) qui ne sont pas admissibles car, dans chacun d'eux, de β partent plus de 3 liens.

Chaîne : $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-3} \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n \alpha_{n+1}$

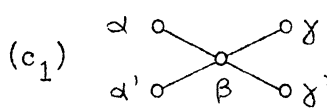
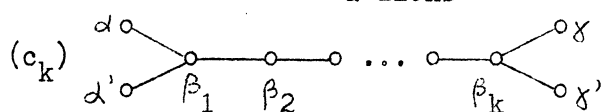
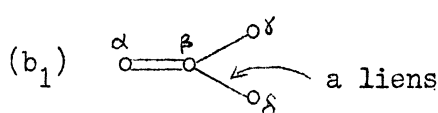
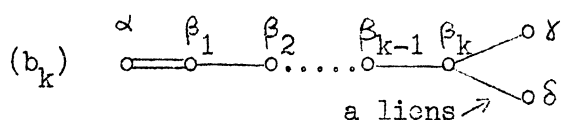
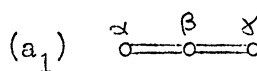
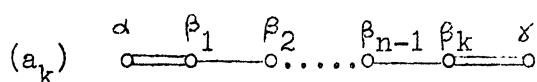


Figure 3

D) Classons maintenant les schémas admissibles connexes. Si S est d'ordre ≥ 3 , il ne contient pas de lien triple. Si S contient une liaison double, i.e. un sous-schéma de type $\text{---}\text{---}$, prolongeons-le en une chaîne maximale C . C contient au plus une liaison double sinon on pourrait en extraire un schéma de type (a_k) qui n'est pas admissible. Si $C \neq S$ il existe d'après A) un vecteur $\beta \notin C$ qui est joint à un point et un seul de C ; ce point est distinct des extrémités de C , sinon C ne serait pas une chaîne maximale, mais alors on peut en extraire un schéma de type (b_k) qui n'est pas admissible, d'où contradiction : S est donc de type $(a'_{p,q})$.

Supposons que toutes les liaisons de S soient simples. Soit d'abord S sans point triple et $C \subset S$ une chaîne maximale; si $C \neq S$, il existe un vecteur qui est joint à un point et un seul de C , mais il ne peut être joint à une extrémité de C sinon C ne serait pas une chaîne maximale, et il ne peut être joint à un autre point de C puisque S n'a pas de point triple. Donc S est de type (b'_n) .

Enfin si S n'a que des liaisons simples et un point triple au moins, S contient un sous-schéma de type $\text{---}\text{---}\text{---}$ pour la même raison qu'en B). Prolongeons ce sous-schéma en une étoile à 3 branches maximale E ; si $E \neq S$, il existe un vecteur joint à un point et un seul de E , mais ce ne peut être à une extrémité, sinon E ne serait pas une étoile maximale et ce ne peut être à un autre point de E , sinon on extrairait de S un sous-schéma de type (c_k) . Finalement S est de type $(c'_{p,q,r})$.

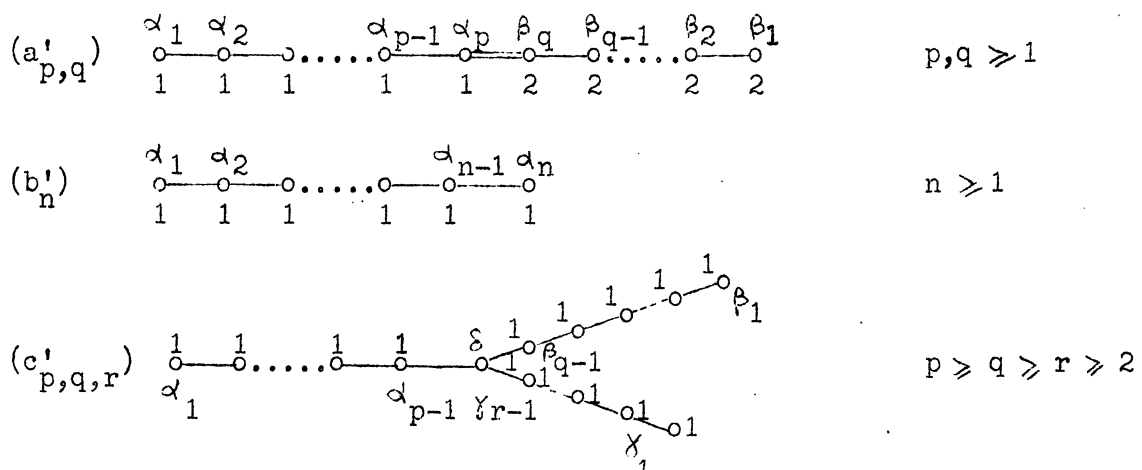


Figure 4

E) Si deux vecteurs sont joints par un lien d'ordre k , on sait que le rapport des carrés de leurs longueurs est égal à k . Avec une unité de longueur convenable, les longueurs sont bien celles qui sont indiquées sur la figure 4.

Soit une chaîne $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ formée de vecteurs de même longueur $|\alpha_i|^2 = a$ et soit $\alpha = \sum_{i=1}^n i \alpha_i$; on a $|\alpha|^2 = \sum_{i=1}^n i^2 |\alpha_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = n^2 a - \sum_{i=1}^{n-1} i a = \frac{1}{2} n(n+1) a$.

Dans le schéma $(a'_{p,q})$ soit $\alpha = \sum_i i \alpha_i$ $\beta = \sum_j j \beta_j$ donc $|\alpha|^2 = \frac{1}{2}(p+1)p$

$|\beta|^2 = q(q+1)$ et $\langle \alpha, \beta \rangle = pq \langle \alpha_p, \beta_q \rangle = -pq$; α et β ne sont pas collinéaires car les vecteurs de Π sont linéairement indépendants donc l'inégalité de Schwarz donne $\langle \alpha, \beta \rangle^2 < |\alpha|^2 |\beta|^2$ soit $p^2 q^2 < \frac{1}{2} pq(p+1)(q+1)$ ou finalement en simplifiant $(p-1)(q-1) < 2$. On a alors soit $p = 1$ et q quelconque, soit $q = 1$ et p quelconque, soit $p = q = 2$, ceci donnant lieu respectivement aux schémas $B_{q+1} C_{p+1} F_4$ (cf. Fig. 5).

Le schéma (b'_n) est identique à A_n .

Enfin dans le schéma $(c'_{p,q,r})$ posons $\alpha = \sum_i i \alpha_i$, $\beta = \sum_j j \beta_j$, $\gamma = \sum_k k \gamma_k$

et évaluons les angles de δ avec ces vecteurs. $|\alpha|^2 = \frac{1}{2} p(p-1)$ $|\delta|^2 = 1$ $\langle \alpha, \delta \rangle = -\frac{1}{2}$ donc $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1-p^{-1})$. Comme en B) on voit que la condition 1) implique que la somme des $\cos^2$ est plus petite que 1 (en effet, il est clair sur leurs définitions que α, β, γ sont orthogonaux deux à deux), c'est-à-dire $\frac{1}{2}(1-p^{-1} + 1-q^{-1} + 1-r^{-1}) < 1$ ou $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} > 1$. Comme $p \geq q \geq r$ on a $p^{-1} \leq q^{-1} \leq r^{-1}$ et donc $3r^{-1} > 1$, i.e. $r = 2$ en vertu de la condition $r \geq 2$. Ensuite $p^{-1} + q^{-1} > \frac{1}{2}$ d'où $2q^{-1} > \frac{1}{2}$ i.e. $q < 4$. Il reste deux possibilités : $q = 2$ d'où les deux seules conditions $p^{-1} > 0$ et $p \geq 2$ i.e. $p \geq 2$ quelconque, ce qui donne le schéma D_{p+2} ; et $q = 3$, d'où $p \geq 3$ et $p^{-1} < 1/6$ c'est-à-dire $3 \leq p < 6$, ce qui donne lieu au schéma E_{p+3} .

En résumé, les seuls schémas admissibles sont à chercher parmi $A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$.

3.- Détermination des systèmes admissibles connexes.

Il reste à montrer qu'il existe effectivement des systèmes admissibles connexes correspondant aux schémas de la figure 5.

Soit R^{n+1} l'espace euclidien à $n+1$ dimensions (e_i) une base orthonormale et $\check{E}^n$ le sous-espace orthogonal au vecteur

$s = \sum_{i=1}^{n+1} e_i$. $\bar{e}_i$ est la projection orthogonale de e_i sur $\check{E}^n$, il en résulte

que si $\bar{x} = \sum a_i \bar{e}_i$ est la projection orthogonale de $x = \sum a_i e_i$, on a

$$|\bar{x}|^2 = |x|^2 - \frac{\langle x, s \rangle^2}{\langle s, s \rangle} = \sum a_i^2 - (\sum a_i)^2 / (n+1).$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } \alpha_i = e_i - e_{i+1} ; \text{ on a } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle &= 2 \quad |i - j| = 0 \quad i, j = 1, \dots, n \\ &= -1 \quad |i - j| = 1 \\ &= 0 \quad |i - j| \geq 2 \end{aligned}$$

donc les α_i forment un système de type A_n .

Dans R^n , considérons le système des vecteurs α_i ($1 \leq i \leq n-1$) et e_n . On a $\langle \alpha_i, e_n \rangle = -1$ si $i = n-1$ et $= 0$ sinon et $|e_n|^2 = 1$, donc on a un système de type B_n . De même α_i ($1 \leq i \leq n-1$), $2e_n$ est un système de type C_n . Enfin $|e_{n-1} + e_n|^2 = 2$, $e_{n-1} + e_n$ est orthogonal à α_i pour $i \neq n-2$ et $\langle e_{n-1} + e_n, \alpha_{n-2} \rangle = -1$, donc α_i ($1 \leq i \leq n-1$), $e_{n-1} + e_n$ est un système de type D_n .

Il reste à examiner le cas des 5 systèmes exceptionnels. Pour G_2 on peut prendre $\alpha_1, \bar{e}_2$ dans R^3 car $|\alpha_1|^2 = 2$, $|\bar{e}_2|^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$\langle \alpha_1, \bar{e}_2 \rangle = \langle \alpha_1, e_2 \rangle = -1$. Pour F_4 , on prend le système B_3 i.e. α_1, α_2, e_3 et le vecteur $\frac{1}{2}(e_4 - e_1 - e_2 - e_3) = \beta$ car β est orthogonal à α_1 et α_2 $|\beta|^2 = 1$ et $\langle e_3, \beta \rangle = -\frac{1}{2}$. Pour E_n on prend A_{n-1} inclus dans R^n auquel on ajoute $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + e_{n-1}(9n^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \beta$; ($\bar{e}_i$ est une projection sur $E^{n-1} \subset R^n$); en effet $|\beta|^2 = 9n^{-1} - 1 + |\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3|^2 = 9n^{-1} - 1 + 3 - 9n^{-1} = 2$ et β est orthogonal aux α_i à l'exclusion de α_3 , $\langle \beta, \alpha_3 \rangle = \langle e_3, \alpha_3 \rangle = -1$.

Théorème : Les systèmes de vecteurs vérifiant les conditions 1) à 3) sont à une similitude près les systèmes $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_4, G_2$ du tableau qui suit.

On montrera dans le prochain exposé comment construire explicitement les algèbres de Lie simples de type A_n, B_n, C_n, D_n, G_2 .

