M. MALRIC

Correction : « Filtrations quotients de la filtration brownienne »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 492

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__492_0>

CORRECTION AU VOLUME XXXV

M. Malric

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
Université Paris VI
4 place Jussieu
75252 PARIS Cedex 05

Je remercie C. Leuridan, qui m'a signalé une imprécision dans la note *Filtrations quotients de la filtration brownienne* (volume XXXV, pages 260–264) : si Γ est un sous-groupe de $\mathbb{O}(d)$, la définition de la filtration quotient $\mathcal{F}/\Gamma$ varie au fil des pages, celle du bas de la page 260 n'étant jamais utilisée, et celle qui sert à établir les propositions 1, 2 et 3 n'étant pas tout à fait la même que celle qui intervient dans la démonstration de la proposition 4.

La définition de $\mathcal{F}/\Gamma$ utilisée dans les propositions 1, 2 et 3 est en fait la suivante :

DÉFINITION 1. — *Une v.a. X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est $\mathcal{F}_t/\Gamma$-mesurable s'il existe une v.a. Y qui soit $\mathcal{F}_t$-mesurable, Γ-invariante (au sens où $Y(\omega) = Y\big(h(\omega)\big)$ pour tout $(\omega, h) \in \Omega \times \Gamma$), et presque partout égale à X.*

Alors que la définition qui fait marcher la démonstration de la proposition 4 est celle indiquée en haut de la page 261 :

DÉFINITION 2. — *Une v.a. X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est $\mathcal{F}_t/\Gamma$-mesurable si X est $\mathcal{F}_t$-mesurable et si, pour chaque $h \in \Gamma$, on a l'égalité presque sûre $X = X \circ h$.*

La seule définition raisonnable, celle qu'il faut utiliser tout au long de la note, est la définition 2. Les propositions 1, 2 et 3 restent vraies avec cette définition, tout simplement parce que les groupes considérés sont fermés dans $\mathbb{O}(d)$, donc compacts, et que, dans ce cas, les deux définitions sont équivalentes. En effet, un groupe compact admet une probabilité invariante μ (mesure de Haar), et il ne reste qu'à appliquer la technique classique de production d'objets invariants par moyennisation sous l'action du groupe : si une v.a. bornée X vérifie les conditions de la définition 2, en posant

$$Y = \int_\Gamma X \circ h \; \mu(dh) ,$$

on a $Y = Y \circ h$ pour tout $h \in \Gamma$ par invariance de la mesure de Haar ; et, puisque $|Y - X| = \left|\int_\Gamma (X \circ h - X)\, \mu(dh)\right| \leqslant \int_\Gamma |X \circ h - X| \; \mu(dh)$, le théorème de Fubini donne $\mathbb{E}\big[|Y - X|\big] = 0$, et la définition 1 est satisfaite également. La réciproque (X vérifie la définition 1 $\Rightarrow$ X vérifie la définition 2) est triviale.

L'équivalence des deux définitions vaut pour tout sous-groupe de $\mathbb{O}(d)$ admettant une mesure de Haar, par exemple tout groupe Γ borélien non négligeable pour la mesure de Haar de son adhérence $\overline{\Gamma}$.