DAVID KURTZ

Représentation nucléaire des martingales d'Azéma

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 457-476
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__457_0>

Représentation nucléaire des martingales d'Azéma

David Kurtz *

RÉSUMÉ

L'utilisation du calcul stochastique non commutatif de Hudson et Parthasarathy nous permet de donner la représentation en noyau de Maassen–Meyer des opérateurs de multiplication par une martingale d'Azéma, *i.e.* une martingale solution de l'équation de structure

$$[X]_t = t + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-})\,\mathrm{d}X_s, \qquad X_0 = 0.$$

Nous en déduisons une formule de Kabanov chaotique ainsi qu'un critère pour qu'une telle martingale possède la propriété de représentation chaotique.

1 Introduction et notations

Après l'étude du cas discret et les rappels théoriques nécessaires, nous montrons comment les nouvelles ressources du calcul stochastique non commutatif, développées par Attal et Lindsay [A-L], permettent de prouver que les opérateurs de multiplication par une martingale d'Azéma satisfont une équation différentielle stochastique linéaire non commutative. Le développement formel en somme d'intégrales stochastiques (non commutatives) itérées de la solution de cette équation différentielle nous conduit à la représentation en noyau de Maassen–Meyer de ces opérateurs.

Nous serons alors en mesure d'en déduire non seulement l'action explicite de ces opérateurs mais aussi une formule de Kabanov donnant le développement chaotique du produit d'un élément du premier et du n-ième chaos d'une martingale d'Azéma. Nous finirons cet exposé en donnant une condition suffisante pour que les martingales solutions de l'équation de structure d'Azéma possèdent la propriété de représentation chaotique. Ce critère nous permettra de retrouver une partie des résultats d'unicité en loi déjà connus (cf. [Éme]).

Dans la suite, tous les processus stochastiques indexés par $\mathbb{R}_+$ considérés sont définis sur un espace probabilisé filtré complet $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$ satisfaisant aux conditions habituelles. Si X est un tel processus, $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$ désigne la filtration naturelle associée à X convenablement complétée et rendue continue à droite. Nous posons aussi $\mathcal{F}_\infty^X = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t^X$. Si X est une semimartingale, nous désignons par $[X]$ sa variation quadratique (crochet droit) et, lorsqu'elle existe, par $\langle X\rangle$ la projection duale prévisible de $[X]$ (crochet oblique). Nous convenons que ces crochets et les intégrales stochastiques usuelles sont pris nuls en 0.

*IRMA, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, <David.Kurtz@math.u-strasbg.fr>

2 Le cas discret

Soit $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ une martingale normale en ce sens que $\mathbb{E}[(\Delta X_n)^2|\mathcal{F}^X_{n-1}] = 1$, où $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. Nous supposerons que $X_0 = 0$. À un tel processus, nous associons un sous-espace Ξ de $L^2(\mathcal{F}^X_N)$ appelé *espace chaotique associé à* X. Il est défini comme l'espace vectoriel engendré par les variables aléatoires

$$Y_A = \prod_{n\in A} \Delta X_n\,,$$

lorsque A parcourt l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties de $\{1,\dots,N\}$. Remarquez que $(Y_A)_{A\in\mathcal{P}}$ est une base orthonormée de Ξ. Lorsque $\Xi = L^2(\mathcal{F}^X_N)$, on dit que la martingale X possède la propriété de représentation chaotique (PRC). Il est bien connu (cf. [Éme]) qu'une martingale normale X possède la PRC si, et seulement si, elle satisfait à une équation de structure discrète de la forme

$$(\Delta X_n)^2 = 1 + \varphi_n \Delta X_n, \qquad X_0 = 0\,,$$

où $(\varphi_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ est un processus prévisible.

L'espace Ξ est isomorphe, en tant qu'espace de Hilbert, à l'espace $\Phi_N = \mathbb{C}^{\mathcal{P}}$ (souvent appelé bébé Fock ou toy Fock space). Notons $(x_A)_{A\in\mathcal{P}}$ la base orthonormée image de $(Y_A)_{A\in\mathcal{P}}$ par cet isomorphisme et précisons quelques notations ensemblistes qui servirons encore plus loin. Si A est un élément de $\mathcal{P}$, on désigne par $|A|$ son cardinal. Si A et B sont deux éléments disjoints de $\mathcal{P}$, on note $A+B$ leur réunion. Une inégalité de la forme $A < B$ signifie $a < b$ pour tout $a \in A$, $b \in B$. On note $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ de cardinal k et l'on pose $\mathcal{P}_{\geqslant l} = \bigcup_{k\geqslant l} \mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{\leqslant l} = \bigcup_{k\leqslant l} \mathcal{P}_k$. Finalement, on désigne par $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des éléments A de $\mathcal{P}$ tels que $A \leqslant n$.

Les opérateurs de création, d'annihilation et de conservation sont définis sur Φ_N par

$$\begin{aligned} a_n^+ x_A &= \mathbb{1}_{\{n\notin A\}} x_{A+\{n\}}\,, \\ a_n^- x_A &= \mathbb{1}_{\{n\in A\}} x_{A-\{n\}}\,, \\ a_n^\circ x_A &= \mathbb{1}_{\{n\in A\}} x_A = a_n^+ a_n^- x_A\,. \end{aligned}$$

Ces opérateurs vérifient

$$\begin{aligned} [a_k^+,a_l^+] &= [a_k^-,a_l^-] = 0, \\ [a_k^+,a_l^-] &= \mathbb{1}_{\{k=l\}}(2a_k^\circ - I), \end{aligned}$$

pour tout $1 \leqslant k,l \leqslant N$, et où $[S,T] = ST - TS$ désigne le commutateur des opérateurs S et T. Nous posons aussi $a_A^\varepsilon = \prod_{n\in A} a_n^\varepsilon$ ($\varepsilon \in \{-,\circ,+\}$). La famille d'opérateurs $(a_A^+ a_B^\circ a_C^-)$ indexée par les triplets disjoints A,B,C d'éléments de $\mathcal{P}$ forme une base de l'espace des opérateurs de Φ_N dans lui-même (voir [Me3, p. 19]). La famille $T(A,B,C)$ des composantes d'un opérateur T dans cette base s'appelle le noyau de Maassen-Meyer de T.

Dans la suite, nous nous intéressons à une martingale normale solution de l'équation de structure d'Azéma, autrement dit telle que

$$(1) \qquad (\Delta X_n)^2 = 1 + (\alpha + \beta X_{n-1})\Delta X_n\,, \qquad X_0 = 0,$$

où α et β sont deux paramètres réels et nous considérons la famille $(\mathbb{X}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ d'opérateurs sur Ξ définis par

$$\mathbb{X}_n f = X_n f, \qquad f \in \Xi.$$

Le but de la fin de cette section est de calculer le noyau de Maassen–Meyer des opérateurs $\mathbb{X}_n$. Nous aurons besoin du résultat suivant (voir [Me1, Pa2]) :

PROPOSITION 2.1. *La famille d'opérateurs $(\mathbb{X}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ satisfait à l'équation aux différences*

$$\Delta\mathbb{X}_n = a_n^+ + a_n^- + (\alpha + \beta\mathbb{X}_{n-1})a_n^\circ, \qquad \mathbb{X}_0 = 0, \tag{2}$$

où $\Delta\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_n - \mathbb{X}_{n-1}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$.

PREUVE. Il suffit d'écrire, en utilisant (1), que

$$\begin{aligned}\Delta\mathbb{X}_n Y_A &= \Delta X_n Y_A \\ &= \mathbb{1}_{\{n\in A\}} Y_{A-\{n\}}(\Delta X_n)^2 + \mathbb{1}_{\{n\notin A\}} Y_{A+\{n\}} \\ &= a_n^+ Y_A + a_n^- Y_A + (\alpha + \beta X_n) a_n^\circ Y_A .\end{aligned}$$

■

À partir de maintenant, nous notons de la même manière l'opérateur $\mathbb{X}_n$ et la variable aléatoire X_n. Nous allons prouver le

THÉORÈME 2.2. *Pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, l'opérateur X_n s'écrit*

$$X_n = \sum K_n(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^- ,$$

la somme étant étendue à tous les triplets A,B,C disjoints et où

$$\begin{aligned}K_n(A,B,C) = \beta^{|B|}\big(\mathbb{1}_{\{|A|=1\,;\,A<B\leqslant n\,;\,C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,C<B\leqslant n\,;\,|C|=1\}}\big) \\ + \alpha\beta^{|B|-1}\mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,B\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)\,;\,C=\varnothing\}} .\end{aligned}$$

PREUVE. Pour tout $A \subset \{1,\dots,N\}$, $|A| \geqslant 1$ posons

$$P_\alpha(A) = a_{\wedge A}^+ a_{A-\{\wedge A\}}^\circ + a_{A-\{\wedge A\}}^\circ a_{\wedge A}^- + \alpha a_A^\circ ,$$

avec les conventions $\wedge A = \min A$, $a_\varnothing^\varepsilon = I$ $(\varepsilon \in \{-,\circ,+\})$ et remarquons que si $A < n$, alors

$$P_\alpha(A) a_n^\circ = P_\alpha(A + \{n\}).$$

La conclusion du théorème est valide pour $n = 1$ puisqu'elle se réduit dans ce cas à $X_1 = P_\alpha(\{1\})$. Supposons cette conclusion vérifiée au rang n et remarquons qu'elle est équivalente à l'égalité

$$X_n = \sum_{A\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)} \beta^{|A|-1} P_\alpha(A).$$

En utilisant alors l'équation (2), nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \beta X_n a^\circ_{n+1} + P_\alpha(\{n+1\}) \\ &= \sum_{A\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)} \beta^{|A|-1} P_\alpha(A) + \sum_{A\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)} \beta^{|A|} P_\alpha(A+\{n+1\}) + P_\alpha(\{n+1\}) \\ &= \sum_{B\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n+1)} \beta^{|B|-1} P_\alpha(B), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de ce théorème. ∎

Le but de la suite de cet exposé est de prouver l'analogue en temps continu de ces résultats. Pour ce faire, nous introduisons dans la prochaine section l'espace de Fock bosonique construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans sa version probabiliste, c'est-à-dire sous la forme de l'espace chaotique associé à une martingale normale en temps continu.

3 Espace chaotique associé à une martingale normale

Martingales normales

Une martingale $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ est dite *normale* si le processus $X_t^2 - t$ est une martingale, autrement dit si $\langle X\rangle_t = t$. Pour une telle martingale, il est possible [Me2] de définir des intégrales stochastiques itérées de la forme

$$\begin{aligned} J_n(f) = \int_{C_n} f(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}X_{t_1}\ldots\mathrm{d}X_{t_n} \\ = \int_0^\infty \mathrm{d}X_{t_n} \int_0^{t_n -} \mathrm{d}X_{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2 -} \mathrm{d}X_{t_1} f(t_1,\ldots,t_n)\,, \end{aligned}$$

où $C_n = \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}_+^n\,;\, t_1 < \cdots < t_n\}$ et f est un élément de $L^2(C_n)$ $(n \geqslant 1)$. Pour $n = 0$, nous posons $C_0 = \{\emptyset\}$, $L^2(C_0) = \mathbb{C}$ et $J_0(c) = c$. Ces intégrales vérifient, en outre, la formule d'isométrie suivante :

$$(3) \qquad <J_n(f),J_n(g)>= \mathbb{E}\big[\overline{J_n(f)}J_n(g)\big] = \int_{C_n} \overline{f}(t_1,\ldots,t_n) g(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n\,.$$

Le sous-espace fermé $\Xi_n = J_n(L^2(C_n))$ de $L^2(\mathcal{F}^X_\infty)$ s'appelle *n-ième chaos* de X. On peut montrer que les chaos d'ordre différents sont orthogonaux. Le sous-espace $\Xi = \bigoplus_{n\geqslant 0} \Xi_n$ de $L^2(\mathcal{F}^X_\infty)$ s'appelle *espace chaotique* associé à la martingale X. Il est constitué des variables aléatoires $\mathcal{F}^X_\infty$-mesurables qui sont de carré intégrable et représentables sous la forme

$$F = \sum_{n\geqslant 0} J_n(f_n) = \mathbb{E}[F] + \sum_{n\geqslant 1} \int_{C_n} f_n(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}X_{t_1}\ldots\mathrm{d}X_{t_n}\,.$$

Lorsque l'espace chaotique est égal à l'espace $L^2(\mathcal{F}^X_\infty)$, on dit que la martingale normale X possède *la propriété de représentation chaotique* (PRC). Le mouvement brownien, le processus de Poisson compensé et certaines martingales d'Azéma sont des exemples de martingales normales ayant cette propriété (voir théorème 8.3).

Notation courte

Nous introduisons maintenant la notation courte de Guichardet [Gui] qui permet d'identifier l'espace chaotique Ξ à un espace L^2 qui n'est autre que l'espace de Fock bosonique construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

L'ensemble $\mathbb{R}_+$ étant totalement ordonné, nous pouvons identifier $\bigcup_{n\geqslant 0} C_n$ avec $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n$ étant l'ensemble des parties de $\mathbb{R}_+$ à n éléments. Chacun des ensembles $\mathcal{P}_n$ hérite ainsi de la structure d'espace mesuré de C_n (C_0 étant l'espace probabilisé à un point) ce qui permet de munir $\mathcal{P}$ d'une tribu notée $\mathcal{B}$ et d'une mesure μ. Pour tout borélien E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des éléments A de $\mathcal{P}$ tels que $A \subset E$. Nous notons simplement $\mathcal{P}(t)$ l'ensemble $\mathcal{P}([0,t])$. Si A est un élément de $\mathcal{P}$, on pose $A_{t]} = A \cap [0,t]$, $A_{t)} = A \cap [0,t)$ et $A_{(t} = A \cap (t,\infty)$. Nous utilisons plus loin les notations ensemblistes introduites dans la section précédente. Rappelons qu'en particulier $\mathcal{P}_{\leqslant n} = \bigcup_{k\leqslant n} \mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{\geqslant n} = \bigcup_{k\geqslant n} \mathcal{P}_k$.

La tribu $\mathcal{B}$ n'est autre que la tribu engendrée par les applications N_E définies par $N_E(A) = |A \cap E|$, E parcourant les boréliens de $\mathbb{R}_+$ et, en notant simplement $\mathrm{d}A$ l'élément de volume $\mu(\mathrm{d}A)$ sur $\mathcal{P}$, nous pouvons écrire que pour toute fonction f $\mathcal{B}$-mesurable et positive sur $\mathcal{P}$

$$\int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}A = f(\varnothing) + \sum_{n\geqslant 1} \int_{C_n} f(\{t_1,\ldots,t_n\})\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n\,.$$

L'espace $\Phi = L^2(\mathcal{P},\mathcal{B},\mu)$ s'appelle *l'espace de Guichardet*: c'est *l'espace de Fock bosonique* construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Dans ce contexte, on pose pour toute fonction f appartenant à $L^2(\mathcal{P})$

$$\int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A = f(\varnothing) + \sum_{n\geqslant 1} \int_{C_n} f(\{t_1,\ldots,t_n\})\,\mathrm{d}X_{t_1}\ldots\mathrm{d}X_{t_n}\,.$$

Remarquez qu'en vertu de la formule d'isométrie (3) nous pouvons écrire que

$$\left\|\int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A\right\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(A)|^2\,\mathrm{d}A,$$

et par conséquent l'application $f \mapsto F = \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A$ est l'isomorphisme annoncé entre l'espace de Guichardet et Ξ. Dans la suite, il nous arrivera d'identifier sans précaution l'élément f de Φ avec l'élément F de Ξ. Dans ce cas, nous écrirons que $f \equiv F$.

REMARQUE. Le bébé Fock est souvent considéré comme l'analogue discret de l'espace de Fock. Formellement, la base orthonormée discrète (x_A) du bébé Fock est maintenant remplacée par la base continue $(\mathrm{d}X_A/\sqrt{\mathrm{d}A})$. Cette analogie peut être précisée en des termes mathématiques précis (voir [At1]).

Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, la classe d'équivalence de la fonction $A \mapsto \prod_{t\in A} u(t)$ appartient à $L^2(\mathcal{P})$ et est notée $\varepsilon(u)$. Le vecteur $\varepsilon(0)$ est appelé *état vide* et est noté $\mathbb{1}$. Le sous-espace

$$\mathcal{E} = \operatorname{vect}\{\varepsilon(u); u \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$$

de Φ s'appelle le *domaine exponentiel*. Nous considérons aussi le domaine $\mathcal{E}_{lb} = \mathrm{vect}\{\varepsilon(u); u \in L^2_{lb}(\mathbb{R}_+)\}$, où $L^2_{lb}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable et localement bornées sur $\mathbb{R}_+$. Le domaine $\mathcal{T}$ des vecteurs-test de Maassen est constitué des éléments f de Φ tels que

(i) $\exists T \geqslant 0 : \mathrm{supp} f \subset \mathcal{P}(T)$,

(ii) $\exists c, M \geqslant 0 : |f(A)| \leqslant c M^{|A|}, \forall A \in \mathcal{P}$.

Les domaines

$$\Phi_p = \{f \in \Phi\,;\, \textstyle\int_{\mathcal{P}} |f(A)|^2 p^{|A|} < \infty\}, \qquad p \geqslant 1,$$

sont les échelles de Fock. Nous notons $\mathcal{K}$ le domaine $\bigcap_{p\geqslant 1} \Phi_p$ et $\mathcal{D}$ le domaine dont les éléments f vérifient les conditions suivantes :

(i) $\exists N \in \mathbb{N}, T > 0 : \mathrm{supp} f \subset \mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$,

(ii) $\exists M \geqslant 0 : |f| \leqslant M$.

Nous rappelons que tous les domaines précédents sont denses dans l'espace de Fock.

4 Éléments de calcul stochastique non commutatif

Calcul stochastique abstrait sur l'espace de Fock

Dans ce paragraphe, nous introduisons des opérateurs sur l'espace de Fock qui seront indispensables pour définir les intégrales stochastiques non commutatives. Les définitions suivantes sont extraites de [At2] et le lecteur pourra s'y reporter pour plus de détails.

Pour tout $f \in \Phi$, on pose

$$(P_t f)(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}(t)}(A) f(A), \qquad t \geqslant 0.$$

L'opérateur P_t est la projection orthogonale sur le sous-espace fermé de $L^2(\mathcal{P})$ des fonctions à support dans $\mathcal{P}(t)$. Dans la suite, on note $\Phi_{t]}$ cet espace. On pose aussi

$$(D_t f)(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}(t)}(A) f(A + \{t\}), \qquad t \geqslant 0.$$

On peut alors montrer que

$$|f(\varnothing)|^2 + \int_0^\infty \|D_t f\|^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|^2,$$

de sorte que $D_t f$ est un élément de l'espace de Guichardet pour presque tout $t \geqslant 0$. Plus généralement, on peut montrer que, pour μ-presque tout B dans $\mathcal{P}$, la classe de $D_B f$ $(= D_{t_1} \cdots D_{t_n} f$, si $B = \{t_1 < \cdots < t_n\})$ est un élément de Φ.

Une famille $(g_t)_{t\geqslant 0}$ d'éléments de Φ est dite *Itô intégrable* si :

(i) $t \mapsto g_t$ est mesurable,

(ii) $g_t \in \Phi_{t]}$ pour tout $t \geqslant 0$,

(iii) $\int_0^\infty \|g_t\|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$.

Pour un tel processus, nous pouvons définir son intégrale d'Itô qui est l'élément $\int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t$ de Φ défini par

$$\left(\int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t\right)(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}_{\geqslant 1}}(A) g_{\vee A}(A-),$$

où $\vee A = \max A$ et $A- = A - \{\vee A\}$. De plus, la formule d'isométrie suivante est vérifiée :

$$\left\| \int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t \right\|^2 = \int_0^\infty \|g_t\|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Liens avec le calcul stochastique usuel

Nous indiquons ici comment les opérateurs définis ci-dessus sont naturellement reliés à la théorie classique du calcul stochastique.

Soient X une martingale normale et $F = \int_{\mathcal{P}} f(A)\, \mathrm{d}X_A$ une variable aléatoire appartenant à l'espace chaotique de X. Si on pose $F_t = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t^X]$, alors on peut montrer que F_t est la variable aléatoire $\int_{\mathcal{P}}(P_t f)(A)\, \mathrm{d}X_A$. De manière analogue, on peut montrer que si $G = (G_t)_{t \geqslant 0}$ est une courbe mesurable à valeurs dans Ξ (dont on a pris soin de choisir une version mesurable en (t,ω)), adaptée à la filtration $\mathcal{F}^X$, avec $G_t = \int_{\mathcal{P}} g_t(A)\, \mathrm{d}X_A$ et vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |G_t|^2 \, \mathrm{d}t\right] < \infty,$$

alors $(g_t)_{t \geqslant 0}$ est Itô intégrable et

$$\int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t \equiv \int_0^\infty {}^p(G_t)\, \mathrm{d}X_t\,,$$

où ${}^pG$ désigne la projection prévisible du processus mesurable G.

Finalement, on peut vérifier que le processus prévisible $H = {}^p\big(\int_{\mathcal{P}}(Df)(A)\, \mathrm{d}X_A\big)$ vérifie la condition

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |H_t|^2 \, \mathrm{d}t\right] < \infty$$

et est tel que

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty H_s \, \mathrm{d}X_s\,.$$

Intégrales stochastiques non commutatives

Nous consacrons le reste de cette section à un rappel succint des principales définitions du calcul stochastique non commutatif de Hudson et Parthasarathy [H-P, Pa1] en adoptant le point de vue d'Attal et Meyer [A-M, A-L].

Ce calcul stochastique permet de définir des intégrales de la forme

$$\int_0^t H_s \, \mathrm{d}a_s^\varepsilon, \qquad \varepsilon \in \{-, \circ\,, +\,, \times\},$$

où H est un processus adapté d'opérateurs sur $L^2(\mathcal{P})$ et a^+, a^-, a° sont les processus de création, d'annihilation et de conservation sur l'espace de Fock, $a^\times$ étant le temps.

Nous commençons par les nécessaires définitions. Un domaine Dom de Φ est dit *adapté* si, pour tout $f \in \mathrm{Dom}$,

$$\begin{cases} P_t f \in \mathrm{Dom}, \text{ pour tout } t \geqslant 0, \\ D_t f \in \mathrm{Dom}, \text{ pour presque tout } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Les domaines $\mathcal{E}, \mathcal{E}_{lb}, \mathcal{T}, \Phi_p, \mathcal{K}$ et $\mathcal{D}$ introduits dans la section précédente sont des domaines adaptés. Un opérateur K de domaine adapté Dom est dit *adapté à l'instant t* si, pour tout $f \in \mathrm{Dom}$, nous avons

$$\begin{cases} P_t K f = K P_t f, \\ D_s K f = K D_s f, \text{ pour presque tout } s \geqslant t. \end{cases}$$

Soit $H = (H_t)_{t \geqslant 0}$ un processus adapté d'opérateurs (H_t est adapté à l'instant t pour tout $t \geqslant 0$) de domaine commun et adapté Dom. Alors, le processus adapté d'opérateurs T est l'intégrale stochastique non commutative $\int_0^\cdot H_s \, \mathrm{d}a_s^\varepsilon$ sur le domaine Dom si, pour tout f dans Dom, l'équation suivante a un sens (du point de vue des domaines et de l'intégrabilité) et est vérifiée

$$T_t f = \int_0^\infty T_{t \wedge s} D_s f \, \mathrm{d}\chi_s + \begin{cases} \int_0^t H_s P_s f \, \mathrm{d}\chi_s, & \text{si } \varepsilon = + \\ \int_0^t H_s D_s f \, \mathrm{d}\chi_s, & \text{si } \varepsilon = \circ \\ \int_0^t H_s D_s f \, \mathrm{d}s, & \text{si } \varepsilon = - \\ \int_0^t H_s P_s f \, \mathrm{d}s, & \text{si } \varepsilon = \times. \end{cases}$$

Ces équations sont connues sous le nom *d'équations Attal–Meyer*. Attal et Lindsay (voir [A-L, théorème 8.4]) ont montré que ces équations admettent une solution partout ou elles ont un sens. Si l'on pose $a^\varepsilon(H)_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}a_s^\varepsilon$, ces solutions sont données par les formules explicites suivantes :

$$\begin{aligned} \big(a^+(H)_t f\big)(A) &= \sum_{s \in A_{t]}} \big(H_s P_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}), \\ \big(a^\circ(H)_t f\big)(A) &= \sum_{s \in A_{t]}} \big(H_s D_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}), \\ \big(a^-(H)_t f\big)(A) &= \int_0^t \big(H_s D_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}) \, \mathrm{d}s, \\ \big(a^\times(H)_t f\big)(A) &= \int_0^t \big(H_s P_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

En considérant le processus adapté $H_t = \mathbb{1}_{[0,t]} I$, on retrouve la définition des opérateurs a_t^+, a_t^- et a_t° :

$$\big(a_t^+ f\big)(A) = \sum_{s \in A_{t]}} f(A - \{s\}), \quad \big(a_t^- f\big)(A) = \int_0^t f(A + \{s\}) \, \mathrm{d}s, \quad \big(a_t^\circ f\big)(A) = |A_{t]}| f(A).$$

Enfin, et pour poursuivre l'analogie avec le cas discret esquissée dans la section précédente, on peut dire que les éléments différentiels $\mathrm{d}a_t^+/\sqrt{\mathrm{d}t}$, $\mathrm{d}a_t^-/\sqrt{\mathrm{d}t}$ et $\mathrm{d}a_t^\circ$ correspondent aux opérateurs a_n^+, a_n^- et a_n° du bébé Fock.

5 Martingales d'Azéma

Préliminaires

Suivant Émery [Éme], nous appelons *martingale d'Azéma* de paramètre $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ toute martingale normale solution de l'équation de structure

$$(4) \qquad [X]_t = t + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-})\,\mathrm{d}X_s\,, \qquad X_0 = 0.$$

Un théorème de Meyer [Me4] nous assure de l'existence de tels processus pour toutes valeurs des paramètres α et β. Dans la suite, nous supposerons que β est un réel différent de 0 et nous posons $q = 1 + \beta$.

Nous admettons le lemme suivant (voir [Éme, preuve du lemme 7, p. 80]). Ici $\Xi_n^T(a)$ désigne l'ensemble des éléments du n-ième chaos de X provenant de l'intégration de fonctions à support inclus dans $C_n(T) = \{(t_1,\dots,t_n)\,;\, t_1 < \dots < t_n < T\}$ et bornées par $a \geqslant 0$.

LEMME 5.1. *Soient X une martingale normale solution de (4), F un élément de $\Xi_n^T(a)$ $(n \geqslant 0)$ et G un élément de $\Xi_1^T(b)$. Alors*

$$GF \in \bigoplus_{k=0}^{n+1} \Xi_k^T(c_n ab),$$

où $c_0 = 1$, $c_n = c(\alpha)(1 - c(\beta))^n/(1 - c(\beta)) + c(\beta)^n$ $(n \geqslant 1)$ avec $c(\alpha) = 1 + T + |\alpha|$ et $c(\beta) = 1 + |\beta|$.

À partir de maintenant, $\Xi(X)(\simeq \Phi)$ est l'espace chaotique associé à une martingale d'Azéma de paramètre (α,β). Rappelons que $\mathcal{D}$ désigne le domaine adapté de Φ des fonctions bornées et à support inclus dans $\mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$ pour un $N \geqslant 1$ et un $T > 0$. Notons provisoirement $\mathbb{X}_t$ l'opérateur de domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathbb{X}_t f \equiv X_t \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A\,.$$

Le lemme suivant nous assure que cet opérateur est bien défini :

LEMME 5.2. *L'opérateur $(\mathbb{X}_t,\mathcal{D})$ laisse invariant le domaine $\mathcal{D}$. De plus, si f est un élément de $\mathcal{D}$ à support dans $\mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$ et borné par $M \geqslant 0$, alors pour tout $0 \leqslant t \leqslant T$*

$$\|\mathbb{X}_t f\| \leqslant C_N M \exp(T/2), \qquad \textit{avec} \qquad C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n\,.$$

PREUVE. Soit $f = \sum_{n=0}^N f_n$ un élément de $\mathcal{D}$ à support dans $\mathcal{P}(T)$ et borné par M. En vertu du lemme précédent, nous pouvons écrire que

$$X_t \int_{\mathcal{P}} f_n(A)\,\mathrm{d}X_A \in \bigoplus_{k=0}^{n+1} \Xi_k^T(c_n M).$$

Nous en déduisons immédiatement la première partie du lemme. Pour la seconde partie, il suffit de constater que la relation précédente implique l'inégalité suivante :

$$\|\mathbb{X}_t f_n\|^2 \leqslant M^2 c_n^2 \sum_{k\geqslant 0} \int_{C_k(T)} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k = M^2 c_n^2 \exp(T).$$

∎

Remarquez que l'opérateur $\mathbb{X}_t$ étant symétrique sur $\mathcal{D}$, il est fermable. Dans la suite, nous notons de la même manière l'opérateur $\mathbb{X}_t$ et la variable aléatoire X_t.

Une équation différentielle stochastique non commutative

Il est bien connu dans la communauté des probabilités non commutatives (voir par exemple [Me3, Pa2, Sch]) que les martingales d'Azéma doivent, au moins formellement et du point de vue algébrique, être solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathbb{Y}_t = a_t^+ + a_t^- + \int_0^t (\alpha + \beta \mathbb{Y}_s)\, \mathrm{d}a_s^\circ .$$

Nous profitons des nouvelles possibilités du calcul stochastique non commutatif, qui permettent en particulier de s'affranchir du domaine exponentiel, pour prouver que le processus des opérateurs de multiplication par une martingale d'Azéma est effectivement l'unique solution de cette équation différentielle.

THÉORÈME 5.3. *Le processus d'opérateurs X est adapté et vérifie sur $\mathcal{D}$ l'équation différentielle stochastique non commutative*

$$X_t = a_t^+ + a_t^- + \int_0^t (\alpha + \beta X_s)\, \mathrm{d}a_s^\circ . \tag{5}$$

PREUVE. Soient f un élément de $\mathcal{D}$ à support inclus dans $\mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$ et borné par $M \geqslant 0$, F la variable aléatoire $\int_{\mathcal{P}} f(A)\, \mathrm{d}X_A$, H la projection prévisible du processus $\int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\, \mathrm{d}X_A$ et F_t une version càd-làg de la martingale $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t^X]$. Nous avons $F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty H_s\, \mathrm{d}X_s$ et d'après la formule d'Itô et l'équation de structure (4) nous pouvons écrire que

$$X_t F = \int_0^\infty X_{(t\wedge s)-} H_s\, \mathrm{d}X_s + \int_0^t F_{s-}\, \mathrm{d}X_s + \int_0^t H_s\, \mathrm{d}s + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-}) H_s\, \mathrm{d}X_s . \tag{6}$$

Considérons la courbe adaptée et à valeurs L^0 définie par $s \mapsto G_s = X_{t\wedge s} H_s$. L'ensemble optionnel $\{H \neq \int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\, \mathrm{d}X_A\}$ étant réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, on peut écrire que $\mathrm{d}t \otimes \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$-presque partout

$$G = X_{t\wedge \cdot} \int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\, \mathrm{d}X_A .$$

Par conséquent, la courbe G est, presque pour tout $t \geqslant 0$, à valeurs dans Ξ. Elle vérifie de plus et d'après le lemme 5.2

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |G_s|^2\, \mathrm{d}s\right] = \int_0^T \|X_{t\wedge s} D_s f\|^2\, \mathrm{d}s \leqslant T C_{N-1}^2 M^2 \exp(T),$$

puisque $D_s f$ est à support inclus dans $\mathcal{P}_{\leqslant N-1}(T)$ et est borné par M presque pour tout $s \geqslant 0$ et que $D_s f = 0$ pour presque tout $s \geqslant T$. La courbe adaptée $s \mapsto g_s = X_{t\wedge s} D_s f$ est donc Itô intégrable et il vient

$$\int_0^\infty g_s \,\mathrm{d}\chi_s = \int_0^\infty X_{t\wedge s} D_s f \,\mathrm{d}\chi_s \equiv \int_0^\infty {}^p(G_s)\,\mathrm{d}X_s = \int_0^\infty X_{(t\wedge s)-} H_s \,\mathrm{d}X_s\,,$$

puisque, d'après les propriétés de la projection prévisible, la prévisibilité de H et le fait que $X_{t\wedge\cdot}$ est une martingale, on a

$${}^pG = H\,{}^pX_{t\wedge\cdot} = HX_{(t\wedge\cdot)-}\,.$$

Des raisonnements analogues nous conduisent aux égalités

$$\int_0^t P_s f \,\mathrm{d}\chi_s \equiv \int_0^t F_{s-}\,\mathrm{d}X_s\,,$$
$$\int_0^t D_s f \,\mathrm{d}s \equiv \int_0^t H_s \,\mathrm{d}s\,.$$

Par suite, nous déduisons de l'égalité (6) que

$$(7)\quad X_t F \equiv X_t f = \int_0^\infty X_{t\wedge s} D_s f \,\mathrm{d}\chi_s + \int_0^t P_s f\,\mathrm{d}\chi_s + \int_0^t D_s f\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\alpha + \beta X_s) D_s f \,\mathrm{d}\chi_s\,.$$

Pour prouver l'adaptation de l'opérateur X_t à l'instant t, nous utilisons la proposition 4.2 de [A-L]. Il s'agit donc de prouver que, pour tout f dans $\mathcal{D}$,

(i) $X_t P_t f = P_t X_t f$,

(ii) $X_t(f - P_t f) = X_t \int_t^\infty D_s f\,\mathrm{d}\chi_s = \int_t^\infty X_t D_s f \,\mathrm{d}\chi_s$.

La première condition est immédiate au vu de la propriété $X_t \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t^X] = \mathbb{E}[X_t F|\mathcal{F}_t^X]$. La seconde est conséquence de (7) si l'on remarque que

$$P_u \int_t^\infty D_s f\,\mathrm{d}\chi_s = D_u \int_t^\infty D_s f\,\mathrm{d}\chi_s = 0, \qquad \text{pour presque tout } u < t$$

et que

$$D_u \int_t^\infty D_s f\,\mathrm{d}\chi_s = D_u f, \qquad \text{pour presque tout } u \geqslant t.$$

Finalement, la deuxième partie du théorème est immédiate car (7) n'est autre que l'équation Attal–Meyer associée à (5) sur $\mathcal{D}$. ■

Nous déduisons de ce théorème le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.4. *L'action de l'opérateur $(X_t,\mathcal{D})$ est uniquement déterminée par les paramètres réels α et β.*

PREUVE. Il suffit de prouver que l'équation (5) admet une unique solution sur $\mathcal{D}$. Considérons donc un processus d'opérateurs adapté Y différence de deux solutions de notre équation sur $\mathcal{D}$. Sur ce domaine, Y vérifie

$$Y_t = \beta \int_0^t Y_s \,\mathrm{d}a_s^\circ\,.$$

Il s'agit de prouver que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$, nous avons $Y_t f = 0$. Au vu des formules explicites d'Attal et Lindsay rappelées dans la section précédente, un tel processus Y doit vérifier la relation μ-presque sûre

$$(Y_t f)(A) = \beta \sum_{s \in A_{t]}} (Y_s D_s D_{A_{(s}} f)(A_{s)}),$$

où $D_B = D_{t_1} \cdots D_{t_n}$ si $B = \{t_1 < \cdots < t_n\}$, $A_{t]} = A \cap [0,t]$, $A_{(s} = A \cap (s,\infty)$ et $A_{s)} = A \cap [0,s)$. Il est alors immédiat que $(Y_t f)(\varnothing) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$. Supposons donc que, pour $n \geqslant 1$, la propriété $(Y_t f)(A) = 0$, pour presque tout $A \in \mathcal{P}_{\leqslant n-1}$, tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$, soit vérifiée. Alors, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$, nous avons

$$(Y_t f)(B) = \beta \sum_{s \in A_{t]}} (Y_s D_s D_{B_{(s}} f)(B_{s)}) = 0,$$

pour presque tout $B \in \mathcal{P}_n$ puisque $D_s D_{B_{(s}} f \in \mathcal{D}$ pour presque tout $B \in \mathcal{P}_n$ et que $|B_{s)}| \leqslant n - 1$. Par suite, $Y_t = 0$ sur $\mathcal{D}$ pour tout $t \geqslant 0$, ce qui achève la preuve de ce corollaire. ■

6 Développement en noyau de Maassen–Meyer

Partant de l'équation différentielle stochastique non commutative

$$X_t = a_t^+ + a_t^- + \int_0^t (\alpha + \beta X_s)\, \mathrm{d}a_s^\circ,$$

nous pouvons développer *formellement* X_t en intégrales stochastiques itérées non commutatives de sorte que

$$\begin{aligned} X_t = &\int_{0<t_1<t} \mathrm{d}a_{t_1}^+ + \beta \int_{0<t_1<t_2<t} \mathrm{d}a_{t_1}^+\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ + \beta^2 \int_{0<t_1<t_2<t_3<t} \mathrm{d}a_{t_1}^+\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_3}^\circ + \cdots \\ &+ \int_{0<t_1<t} \mathrm{d}a_{t_1}^- + \beta \int_{0<t_1<t_2<t} \mathrm{d}a_{t_1}^-\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ + \beta^2 \int_{0<t_1<t_2<t_3<t} \mathrm{d}a_{t_1}^-\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_3}^\circ + \cdots \\ &+ \alpha \int_{0<t_1<t} \mathrm{d}a_{t_1}^\circ + \alpha\beta \int_{0<t_1<t_2<t} \mathrm{d}a_{t_1}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ + \alpha\beta^2 \int_{0<t_1<t_2<t_3<t} \mathrm{d}a_{t_1}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_3}^\circ + \cdots \end{aligned}$$

ou en notation courte et sous la forme normale, c'est-à-dire avec les différentielles dans l'ordre $+, \circ, -$,

$$X_t = \int_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}\times\mathcal{P}} K_t(A,B,C)\, \mathrm{d}a_A^+\, \mathrm{d}a_B^\circ\, \mathrm{d}a_C^- \tag{8}$$

avec

$$\begin{aligned} K_t(A,B,C) = \beta^{|B|}\Big(&\mathbb{1}_{\{A\in\mathcal{P}_1\,;\, A<B\leqslant t\,;\, C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\, C<B\leqslant t\,;\, C\in\mathcal{P}_1\}} \\ &+ \alpha\beta^{-1}\mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\, B\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(t)\,;\, C=\varnothing\}}\Big). \end{aligned}$$

Le lecteur pourra comparer le résultat de ce calcul formel avec le développement en noyau de Maassen–Meyer obtenu dans le cas discret (cf. théorème 2.2).

Nous prouvons maintenant, en utilisant les résultats de la théorie des opérateurs définis par des noyaux, que l'expression du membre de droite de (8) définit bien un opérateur sur un domaine contenant $\mathcal{D}$. Pour ce faire, on considère la famille K'_t définie par

$$\begin{aligned} K'_t(A,B,C) &= \sum_{V\subset B} K_t(A,V,C) \\ &= q^{|B_{(\vee A,t]}|}\mathbb{1}_{\{A\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,C=\varnothing\}} + q^{|B_{(\vee C,t]}|}\mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,C\in\mathcal{P}_1(t)\}} \\ &\qquad\qquad + \alpha\frac{q^{|B_t]|}-1}{q-1}\mathbb{1}_{\{A=C=\varnothing\}}, \end{aligned}$$

où $B_E = B \cap E$ pour tout B dans $\mathcal{P}$ et E borélien de $\mathbb{R}_+$. Si l'on pose (voir [BeL])

$$\|K_t\|^2_{a,b,c} = \int_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}} \sup_B \frac{|K'_t(A,B,C)|^2}{a^{|A|}b^{2|B|}c^{|C|}}\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}C,$$

nous pouvons écrire que, pour tout $a,c > 0$ et $b = 1 \vee |q|$,

$$\|K_t\|^2_{a,b,c} \leqslant \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)t + 4|\alpha\beta^{-1}|^2.$$

L'inégalité précédente entraîne (voir [BeL, prop. 2.2] ou [Me3, p. 100]) que l'expression

$$(9) \qquad (\mathbb{K}_t f)(A) = \int_{\mathcal{P}} \sum_{U+V+W=A} K_t(U,V,M)f(V+W+M)\,\mathrm{d}M$$

définit un opérateur $\mathbb{K}_t$ dont le domaine de définition contient $\Phi_{b^2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et laissant stable le domaine $\mathcal{K}$.

Comme $K_t(A,B,C) = 0$ à moins que $A,B,C \subset [0,t]$, l'opérateur $\mathbb{K}_t$ est t-adapté sur le domaine adapté $\mathcal{K}$. D'autre part, un résultat classique sur les opérateurs définis par des noyaux (cf. [Lin, proposition 3.1]) nous apprend que le noyau K_t est uniquement déterminé par l'action de $\mathbb{K}_t$ sur le domaine $\mathcal{D}$. Finalement et puisque $K_t(A,B,C) = \overline{K_t}(C,B,A)$, l'opérateur $\mathbb{K}_t$ est symétrique sur son domaine de définition, donc il est fermable.

Le résultat suivant est la clé de ce travail.

PROPOSITION 6.1. *Le processus adapté d'opérateurs $\mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle stochastique non commutative (5) sur $\mathcal{D}$.*

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 6.2. *Soient $t \geqslant 0$ et $f \in \mathcal{T}$ tel que* $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{P}(T)$ *et* $|f(A)| \leqslant cM^{|A|}$ *pour tout* $A \in \mathcal{P}$. *Alors, il existe deux constantes $\tilde{c}$ et $\tilde{M}$ telles que pour tout $s \in [0,t]$*

(i) $(\mathbb{K}_s f)(A) = 0$, *dès que A n'est pas inclus dans* $[0,T \vee t]$,

(ii) $|(\mathbb{K}_s f)(A)| \leqslant \tilde{c}\tilde{M}^{|A|}, \forall A \in \mathcal{P}$.

PREUVE. Soit donc $f \in \mathcal{T}$ comme dans l'énoncé et remarquons que pour tout $s \in [0,t]$ nous avons

(j) $K_s(A,B,C) = 0$, dès que l'un des A,B ou C n'est pas inclus dans $[0,t]$,

(jj) $|K_s(A,B,C)| \leqslant (2 + |\alpha\beta^{-1}|)(|\beta| \vee 1)^{|A|+|B|+|C|}, \forall A,B,C \in \mathcal{P}$.

Il est clair d'après (j) et (9) que (i) est vérifié. Pour prouver (ii), nous posons $c_1 = c \vee (2 + |\alpha\beta^{-1}|), M_1 = M \vee (|\beta| \vee 1)$ et nous écrivons que

$$|(\mathbb{K}_s f)(H)| \leqslant \int_{\mathcal{P}(T)} \sum_{A+B+C=H} c_1 M_1^{|A|+|B|+|U|} c_1 M_1^{|B|+|C|+|U|}\, \mathrm{d}U$$
$$\leqslant c_1^2 \exp(TM_1^2)(3M_1^2)^{|H|}.$$

La condition (ii) est alors vérifiée avec $\tilde{c} = c_1^2 \exp(TM_1^2)$ et $\tilde{M} = 3M_1^2$. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 6.1. Nous allons prouver un résultat un peu plus général, à savoir que le processus d'opérateurs $\mathbb{K}$ satisfait à (5) sur le domaine adapté $\mathcal{T}$ des vecteurs-test de Maassen.

Nous commençons par prouver que les équations d'Attal–Meyer associées à notre équation différentielle stochastique sont définies pour tout vecteur-test. Soit donc $f \in \mathcal{T}$ tel que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{P}(T)$ et $|f(A)| \leqslant cM^{|A|}$ pour tout $A \in \mathcal{P}$. Il s'agit de prouver que la courbe mesurable $(\mathbb{K}_{t\wedge s} D_s f)_{s\geqslant 0}$ est Itô intégrable. Le processus d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant adapté sur $\mathcal{T}$, il est clair que $\mathbb{K}_{t\wedge s} D_s f \in \Phi_{s]}$ pour tout $s \geqslant 0$. D'autre part et pour presque tout $s \geqslant 0$, $D_s f$ est un vecteur-test à support dans $\mathcal{P}(T)$ et tel que $|D_s f(A)| \leqslant cMM^{|A|}$. Par conséquent et en vertu du lemme précédent, il existe deux constantes $\tilde{c}$ et $\tilde{M}$ telles que

$$\int_0^\infty \|\mathbb{K}_{s\wedge t} D_s f\|^2\, \mathrm{d}s = \int_0^T \|\mathbb{K}_{s\wedge t} D_s f\|^2\, \mathrm{d}s \leqslant T\tilde{c}^2 \exp((t \vee T)\tilde{M}^2),$$

ce qui prouve notre assertion.

Par suite, en vertu d'un théorème d'extension dû à Attal et Meyer (cf. [A-M, théorème 2]) et de la symétrie de l'opérateur $\mathbb{K}_t$, il suffit de prouver le résultat sur le domaine $\mathcal{E}_{lb}$. Or, sur ce domaine, l'opérateur $\int_0^t \mathbb{K}_s\, \mathrm{d}a_s^\circ$ admet la représentation nucléaire (cf. [Me3, p. 145]) dont le noyau est donné par la formule suivante :

$$L_t(A,B,C) = \mathbb{1}_{\{B\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(t)\}} K_{\vee B}(A, B-, C).$$

Il suffit donc, pour conclure, de remarquer que la relation

$$K_t(A,B,C) = \mathbb{1}_{\{A\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,B=C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{C\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,A=B=\varnothing\}}$$
$$+ \alpha \mathbb{1}_{\{B\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,A=C=\varnothing\}} + \beta L_t(A,B,C),$$

valable pour tout $A,B,C \in \mathcal{P}$, est équivalente à (5) sur $\mathcal{E}_{lb}$. ■

Au vu du théorème 5.3 et du corollaire 5.4, nous venons de démontrer que l'opérateur de multiplication par la variable aléatoire X_t admet une représentation nucléaire. Plus précisément, nous avons le

THÉORÈME 6.3. *L'opérateur X_t de multiplication par une martingale d'Azéma admet la représentation en noyau de Maassen–Meyer donnée par le noyau K_t.*

Comme conséquence de ce résultat, nous obtenons l'action explicite des opérateurs X_t sur $\mathcal{D}$, résultat déjà connu pour $\beta \in [-2,0]$ (cf. [Pa2, p. 556]).

PROPOSITION 6.4. *Pour tout f dans $\mathcal{D}$, nous avons*

$$(X_t f)(A) = \sum_{s\in A_{t]}} q^{|A_{(s,t]}|} f(A - \{s\}) + \int_0^t q^{|A_{(s,t]}|} f(A + \{s\})\, \mathrm{d}s$$
$$+ \alpha \frac{q^{|A_{t]}|} - 1}{q - 1} f(A).$$

Lorsque $\beta = -1$ et $\alpha = 0$, la martingale solution de l'équation de structure correspondante s'appelle *première martingale d'Azéma* (voir [Yor, p. 79]) et, dans ce cas, la formule précédente prend la forme particulière suivante :

$$(X_t f)(A) = f(A - \vee(A_{t]})) + \int_{\vee(A_{t]})}^{t} f(A + \{s\})\, \mathrm{d}s.$$

PREUVE. Pour tout $f \in \mathcal{D}$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}(X_t f)(A) &= \int_{\mathcal{P}} \sum_{U+V+W=A} K_t(U,V,M) f(V + W + M)\, \mathrm{d}M \\ &= \sum_{s \in A_{t]}} \Big(\sum_{V \subset A} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{s<V\leqslant t\}} \Big) f(A - \{s\}) \\ &\quad + \int_0^t \Big(\sum_{V \subset A} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{s<V\leqslant t\}} \Big) f(A + \{s\})\, \mathrm{d}s + \alpha\beta^{-1} \sum_{V \subset A : |V| \geqslant 1} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{V \leqslant t\}} f(A),\end{aligned}$$

d'où le résultat en remarquant que

$$\sum_{V \subset A} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{s<V\leqslant t\}} = q^{|A_{(s,t]}|}.$$

■

7 Une formule de Kabanov chaotique

Comme application de ce qui précède, nous obtenons une formule de Kabanov donnant le développement chaotique du produit d'un élément du premier chaos avec un élément du n-ième chaos d'une martingale d'Azéma de paramètre (α,β). Sur ce sujet, le lecteur pourra consulter [RuV, théorème 3.1, p.57] et [PSV, théorème III.1] qui proposent des formules analogues (bien que différentes dans la forme).

Dans la suite φ désigne une fonction bornée et à support compact dans $\mathbb{R}_+$. Nous notons $\mathbb{J}(\varphi)$ l'opérateur de domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathbb{J}(\varphi) f \equiv J_1(\varphi) \int_{\mathcal{P}} f(A)\, \mathrm{d}X_A = \int_0^\infty \varphi(t)\, \mathrm{d}X_t \int_{\mathcal{P}} f(A)\, \mathrm{d}X_A.$$

D'après le lemme 5.1, cet opérateur est bien défini et laisse stable le domaine $\mathcal{D}$.

PROPOSITION 7.1. *L'opérateur $\mathbb{J}(\varphi)$ admet sur $\mathcal{D}$ la représentation en intégrale stochastique suivante :*

$$\mathbb{J}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t) I\, \mathrm{d}a_t^+ + \int_0^\infty \varphi(t) I\, \mathrm{d}a_t^- + \int_0^\infty \varphi(t)(\alpha + \beta X_t)\, \mathrm{d}a_t^\circ.$$

PREUVE. Elle est quasiment identique à celle du théorème 5.3. ■

Formellement, l'opérateur $\mathbb{J}(\varphi)$ admet donc une représentation nucléaire dont le noyau J_φ est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned}J_\varphi(A,B,C) = \varphi(A) \mathbb{1}_{\{|A|=1\,;\, B=C=\varnothing\}} + \varphi(C) \mathbb{1}_{\{A=B=\varnothing\,;\, |C|=1\}} \\ + \alpha\varphi(B) \mathbb{1}_{\{A=C=\varnothing\,;\, |B|=1\}} + \beta \mathbb{1}_{\{|B|\geqslant 1\}} \varphi(\vee B) K_{\vee B}(A, B -, C),\end{aligned}$$

où $\vee B = \max B$, $B- = B - \{\vee B\}$ et où $\varphi(A) = \varphi(t)$ si $|A| = 1$, $A = \{t\}$. En développant l'égalité précédente, il vient

$$J_\varphi(A,B,C) = \varphi(A)\mathbb{1}_{\{|A|=1\,;\,B=C=\varnothing\}} + \varphi(C)\mathbb{1}_{\{A=B=\varnothing\,;\,|C|=1\}} + \alpha\varphi(B)\mathbb{1}_{\{A=C=\varnothing\,;\,|B|=1\}}$$
$$+ \mathbb{1}_{\{|B|\geqslant 1\}}\beta^{|B|}\varphi(\vee B)\big(\mathbb{1}_{\{|A|=1\,;\,A<B\,;\,C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,C<B\,;\,|C|=1\}} + \alpha\beta^{-1}\mathbb{1}_{\{|B|\geqslant 2\,;\,A=C=\varnothing\}}\big).$$

Soit $T > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,T]$. Alors

(i) $J_\varphi(A,B,C) = 0$, dès que l'un des A,B ou C n'est pas inclus dans $[0,T]$,

(ii) $|J_\varphi(A,B,C)| \leqslant 2(2 + |\alpha| + |\alpha\beta^{-1}|)\|\varphi\|_\infty(|\beta| \vee 1)^{|A|+|B|+|C|}, \forall A,B,C \in \mathcal{P}$,

et donc, d'après un théorème de Maassen (voir [Maa] ou [Me3, p. 96]), le noyau J_φ définit via la formule (9) un opérateur dont le domaine contient (au moins) le domaine $\mathcal{T}$. Cet opérateur coïncide avec $\mathbb{J}(\varphi)$ sur $\mathcal{D}$. On peut calculer l'action de l'opérateur de multiplication par $J_1(\varphi)$ et l'on obtient que, pour tout f dans $\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}(\mathbb{J}(\varphi)f)(A) = \sum_{t\in A}\varphi(t)f(A-\{t\}) &+ \int_0^\infty \varphi(t)f(A+\{t\})\,\mathrm{d}t + \alpha\sum_{t\in A}\varphi(t)f(A)\\
&+ \sum_{V\subset A\,:\,|V|\geqslant 1}\varphi(\vee V)\beta^{|V|}\sum_{t\in A\,:\,t<\wedge V} f(A-\{t\})\\
&+ \sum_{V\subset A\,:\,|V|\geqslant 1}\varphi(\vee V)\beta^{|V|}\int_0^{\wedge V} f(A+\{t\})\,\mathrm{d}t\\
&\qquad + \alpha\beta^{-1}\sum_{V\subset A\,:\,|V|\geqslant 2}\varphi(\vee V)\beta^{|V|}f(A).\end{aligned}$$

Nous déduisons de la formule précédente le

THÉORÈME 7.2. *Soit f une fonction sur C_n bornée et à support compact. Pour tout $(t_1,\dots,t_{n+1})$ dans C_{n+1}, nous désignons par A_n^- l'ensemble $\{t_1,\dots,t_{n-1}\}$, A_n° l'ensemble $\{t_1,\dots,t_n\}$ et A_n^+ l'ensemble $\{t_1,\dots,t_{n+1}\}$. Alors*

$$J_1(\varphi)J_n(f) = J_{n-1}(h^-) + J_n(h^\circ) + J_{n+1}(h^+),$$

avec

$$\begin{aligned}h^-(t_1,\dots,t_{n-1}) = \int_0^\infty \varphi(t)f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t&\\
+ \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n-1}(q^{l-k+1}-1)\varphi(t_l)\int_0^{t_k} f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t&,\end{aligned}$$

$$h^\circ(t_1,\dots,t_n) = \alpha f(A_n^\circ)\Big(\sum_{k=1}^n \varphi(t_k) + \sum_{k=2}^n \frac{q^k - 1 - k(q-1)}{q-1}\varphi(t_k)\Big),$$

$$\begin{aligned}h^+(t_1,\dots,t_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1}\varphi(t_k)f(A_n^+ - \{t_k\})&\\
+ \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n+1}(q^{l-k+1}-1)\varphi(t_l)\sum_{m=1}^{k-1} f(A_n^+ - \{t_m\})&.\end{aligned}$$

PREUVE. Étendons f en une fonction $\tilde{f}$ sur $\mathcal{P}$ à support dans $\mathcal{P}_n$. Nous avons

$$\begin{aligned} h^-(t_1,\ldots,t_{n-1}) &= \big(\mathbb{J}(\varphi)\tilde{f}\big)(A_n^-) \\ &= \int_0^\infty \varphi(t) f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n-1} \varphi(t_l)\int_0^{t_k} f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t \sum_{V:\,\wedge V=t_k,\,\vee V=t_l} \beta^{|V|}, \end{aligned}$$

d'où le résultat en remarquant que

$$\sum_{V:\,\wedge V=t_k,\,\vee V=t_l} \beta^{|V|} = q^{l-k+1} - 1.$$

Les deux autres égalités se démontrent de la même manière en remarquant que

$$\begin{aligned} h^\circ(t_1,\ldots,t_n) &= \big(\mathbb{J}(\varphi)\tilde{f}\big)(A_n^\circ), \\ h^+(t_1,\ldots,t_{n+1}) &= \big(\mathbb{J}(\varphi)\tilde{f}\big)(A_n^+). \end{aligned}$$

■

8 Une condition suffisante pour la PRC

Dans cette section, nous prouvons que l'auto-adjonction essentielle des opérateurs $(X_t,\mathcal{D})$ introduits à la section 5 entraîne l'unicité en loi des martingales solutions de l'équation de structure

$$(10) \qquad [X]_t = t + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-})\,\mathrm{d}X_s, \qquad X_0 = 0,$$

ainsi que la PRC pour cette loi. Ce résultat nous permettra de retrouver les caractérisations de Lévy et Watanabe du mouvement brownien (cas où $\alpha = \beta = 0$) et du processus de Poisson compensé (cas où $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$) ainsi que le fait que ces martingales possèdent la PRC. Nous retrouverons aussi les résultats analogues pour les martingales d'Azéma lorsque β appartient à l'intervalle $[-2,0[$.

THÉORÈME 8.1. *Soit X une martingale solution de l'équation de structure (10) et $(X_t,\mathcal{D})$ l'opérateur de multiplication correspondant. Supposons que, pour tout $t \geqslant 0$, la fermeture (dans l'espace de Fock) de l'opérateur X_t soit auto-adjoint. Alors, la loi de la martingale correspondante est uniquement déterminée par les paramètres réels α et β et elle possède la propriété de représentation chaotique.*

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 8.2. *Soient $\mathcal{C}_n$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞ à support compact et ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. Alors, si*

$$\hat{f}(t_1,\ldots,t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(\lambda_1 t_1+\cdots+\lambda_n t_n)} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,\mathrm{d}\lambda_1\ldots\mathrm{d}\lambda_n$$

désigne la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f, l'image $\hat{\mathcal{C}}_n$ de $\mathcal{C}_n$ par cette application est dense dans $L^2(\nu)$.

PREUVE. La régularité de la mesure ν nous assure que l'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\nu)$. Par convolution et puisque la mesure ν est une mesure finie, le même résultat est vrai pour $\mathcal{C}_n$. Remarquons alors que l'adhérence de $\hat{\mathcal{C}}_n$ dans la topologie de la convergence uniforme contient $\mathcal{C}_n$. En effet, si f est un élément de $\mathcal{C}_n$, il existe g dans l'espace de Schwartz tel que $\hat{g} = f$ et une suite (g_n) dans $\mathcal{C}_n$ tels que $g_n \to g$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent tels que $\|\hat{g}_n - f\|_\infty \leqslant \|g_n - g\|_1 \to 0$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que l'adhérence de $\hat{\mathcal{C}}_n$ dans $L^2(\nu)$ contient elle aussi $\mathcal{C}_n$. ■

PREUVE DU THÉORÈME 8.1. Supposons donc que l'opérateur $\overline{X_t|\mathcal{D}}$ soit auto-adjoint pour tout $t \geqslant 0$ et notons $(U(\lambda,t))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ le groupe unitaire associé.

Nous commençons par remarquer que $U(\lambda,t)$ est l'opérateur de multiplication par la variable aléatoire $\mathrm{e}^{i\lambda X_t}$. En effet, d'après le théorème de Nelson sur les vecteurs analytiques, nous avons

$$U(\lambda,t)f \equiv \sum_{k\geqslant 0} \frac{i^k\lambda^k X_t^k}{k!} F,$$

pour tout $F = \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A$ appartenant à une partie dense $\mathcal{L}$ de Ξ. La convergence du membre de droite étant presque sûre à extraction d'une sous-suite près, nous pouvons écrire que

$$U(\lambda,t)f \equiv \mathrm{e}^{i\lambda X_t}F, \qquad F \in \mathcal{L}.$$

Il est alors facile de se convaincre que le même résultat est vrai pour tout $F \in \Xi$. Nous en déduisons que les fonctions caractéristiques

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{i(\lambda_1 X_{t_1}+\cdots+\lambda_n X_{t_n})}\big] = <\mathbb{1}, U(\lambda_1,t_1)\cdots U(\lambda_n,t_n)\mathbb{1}>$$

sont uniquement déterminées par l'action des opérateurs X_t sur $\mathcal{D}$, donc par les paramètres α et β et la loi de la martingale X est uniquement déterminée par l'équation de structure (10).

Pour la PRC, remarquons que notre hypothèse entraîne que la multiplication par les v.a. $\mathrm{e}^{i\lambda X_t}$ laisse stable l'espace chaotique de X. Par conséquent, elles appartiennent elles-mêmes à cet espace et donc aussi les variables aléatoires de la forme

$$\begin{aligned}\hat{f}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(\lambda_1 X_{t_1}+\cdots+\lambda_n X_{t_n})} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,\mathrm{d}\lambda_1\ldots\mathrm{d}\lambda_n \\ &= \lim_{k\to+\infty} 2^{-nk} \sum_{\lambda\in D_{n,k}} \mathrm{e}^{i(\lambda_1 X_{t_1}+\cdots+\lambda_n X_{t_n})} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\end{aligned}$$

où $D_{n,k} = \{(k_1 2^{-k},\ldots,k_n 2^{-k})\,;\,(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ et f est une fonction continue et à support compact. Nous déduisons alors du lemme précédent que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, l'espace $L^2(\sigma(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}))$ est inclus dans Ξ. Mais, ceci entraîne que $L^2(\mathcal{F}_\infty^X)$ est inclus dans Ξ, autrement dit que la martingale X possède la propriété de représentation chaotique. ■

REMARQUE. Nous pensons que ce théorème pourrait permettre de démontrer que toutes les martingales d'Azéma possèdent la PRC. Il faudrait démontrer que les opérateurs $(X_t,\mathcal{D})$ sont essentiellement auto-adjoints, autrement dit il faudrait prouver que l'image de $\mathcal{D}$ par l'opérateur $X_t + iI$ est dense dans Φ pour tout $t \geqslant 0$. Il est possible que les formules explicites de la proposition 6.4 soit un bon point de départ pour une telle étude.

Nous terminons ce travail en démontrant le théorème suivant qui est une application du précédent dans les "bons" cas. Les résultats énoncés ne sont guère nouveaux puisqu'ils figurent déjà tous dans [Éme]; mais la preuve que nous en proposons est, à notre connaissance, inédite.

THÉORÈME 8.3. *Soit X une martingale normale solution de l'équation de structure*

$$[X]_t = t, \qquad X_0 = 0.$$

Alors, la loi de X est celle d'un mouvement brownien standard et cette loi possède la PRC.

Soit Y une martingale normale solution de l'équation de structure

$$[Y]_t = t + \alpha Y_t, \qquad Y_0 = 0.$$

Alors, il existe un processus de Poisson standard N tel que $Y_t = \alpha(N_{t/\alpha^2} - t/\alpha^2)$. De plus, la loi d'un tel processus possède la PRC.

Soit X une martingale solution de l'équation de structure (10) avec β appartenant à l'intervalle $[-2,0[$. Alors, la loi de la martingale X est uniquement déterminée par les paramètres réels α et β et possède la PRC.

PREUVE. Soit donc X une martingale solution de l'équation de structure $[X]_t = t$. D'après le théorème 5.3, l'opérateur X_t correspondant est égal à $Q_t = a_t^+ + a_t^-$. Cet opérateur est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}$. Pour le voir, remarquons que si $f \in \mathcal{D}$ est tel que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$, $|f| \leqslant M$ alors
 (i) $\operatorname{supp} Q_t f \subset \mathcal{P}_{\leqslant N+1}(T)$,
 (ii) $|Q_t f| \leqslant (N+1+t)M$.
Nous en déduisons que $Q_t\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ et que pour tout $n \geqslant 1$

$$\|Q_t^n f\| \leqslant M \exp(T/2) \prod_{k=1}^{n} (N+k+t).$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n \|Q_t^n f\|/n!$ est donc au moins égal à 1 et, en vertu du théorème de Nelson sur les vecteurs analytiques, ceci nous assure de l'auto-adjonction essentielle de l'opérateur X_t sur $\mathcal{D}$. L'unicité en loi et la PRC de la martingale X sont alors des conséquences du théorème précédent. Il suffit maintenant pour conclure de se rappeler que la loi dans l'état vide du processus d'opérateurs Q est celle d'un mouvement brownien.

Soit Y une martingale solution de $[Y]_t = t + \alpha Y_t$. L'opérateur Y_t correspondant est égal à $Q_t + \alpha a_t^\circ$. Un raisonnement analogue à celui ci-dessus nous montre qu'il est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}$. Pour conclure, nous remarquons que sa loi dans l'état vide est celle d'un processus de Poisson compensé d'intensité $1/\alpha^2$ et de saut d'amplitude α (voir [Me3, p. 74]).

Finalement, soit X une solution de l'équation de structure (10) et X_t l'opérateur de multiplication correspondant. L'opérateur $\mathbb{K}_t$ défini dans la section 6 est une extension de X_t dont le domaine contient le domaine $\mathcal{E}_{lb}$. Or, on peut montrer que $\mathbb{K}_t$ est un opérateur borné sur ce domaine (voir [Pa2, théorèmes 4.3 et 4.9]). Par conséquent, l'opérateur X_t est symétrique et borné donc essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}$ et le théorème 8.1 nous permet encore une fois de conclure. ∎

Références

[At1] Attal (S.). Approximating the Fock space with the toy Fock space. *Prépublication de l'institut Fourier*, **495** (2000).

[At2] Attal (S.). Extensions of quantum stochastic calculus. *Quantum Prob. Communications XI*, World Scientific. À paraître.

[A-M] Attal (S.) & Meyer (P.-A.). Interprétation probabiliste et extension des intégrales stochastiques non commutatives. *Séminaire de probabilités XXVII*, LNM 1557, 312-327, Springer (1993).

[A-L] Attal (S.) & Lindsay (J.M.). Quantum stochastic calculus with maximal operator domain. *The Annals of Probability.* À paraître.

[BeL] Belavkin (V.P.) & Lindsay (J.M.). The Kernel of a Fock Space Operator II. *QP VIII*, 87-94 (1993).

[Éme] Émery (M.). On the Azéma Martingales. *Séminaire de probabilités XXIII*, LNM 1372, 66-87, Springer (1989).

[Gui] Guichardet (A.). *Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics.* LNM 261, Springer (1970).

[H-P] Hudson (R.L.) & Parthasarathy (K.R.). Quantum Ito's Formula and Stochastic Evolutions. *Comm. Math. Phys.*, **93**, 301-303 (1984).

[Lin] Lindsay (J.M.). The Kernel of a Fock Space Operator I. *QP VIII*, 271-280 (1993)

[Maa] Maassen (H.). Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels. *QP II*, 361-374 (1985).

[Me1] Meyer (P.-A.). Équations de structure des martingales et probabilités quantiques. *Séminaire de probabilités XXIII*, LNM 1372, 139-141, Springer (1989).

[Me2] Meyer (P.-A.). Notions sur les intégrales multiples. *Séminaire de probabilités X*, LNM 511, 321-331, Springer (1976).

[Me3] Meyer (P.-A.). *Quantum Probability for Probabilists - 2nd ed.* LNM 1538, Springer (1995).

[Me4] Meyer (P.-A.). Construction de solutions d'équations de structure. *Séminaire de probabilités XXIII*, LNM 1372, 142-145 (1989).

[Pa1] Parthasarathy (K.R.). *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus.* Birkhäuser (1992).

[Pa2] Parthasarathy (K.R.). Azéma Martingales and Quantum Stochastic Calculus. *Proceedings of the R.C. Bose Symposium on Probability, Statistics and design of Experiments*, 551-569, Wiley Eastern (1990).

[PSV] Privault (N.), Solé (J.L.) & Vives (J.). Chaotic Kabanov formula for the Azéma martingales. Bernouilli 6, 4, 633-651 (2000).

[RuV] Russo (F.) & Vallois (P.). Product of two multiple stochastic integrals with respect to a normal martingale. Stochastic Processes and their Applications 73, 47-68 (1998).

[Sch] Schürmann (M.). The Azéma Martingales as Components of Quantum Independent Increment Processes. *Séminaire de probabilités XXV*, LNM 1485, 24-30, Springer (1991).

[Yor] Yor (M.). *Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some Recents Martingales Problems.* Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser (1997).