

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE LEURIDAN

Théorème de Ray-Knight dans un arbre : une approche algébrique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 270-301

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__270_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__270_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE RAY-KNIGHT DANS UN ARBRE : UNE APPROCHE ALGÈBRIQUE

Christophe LEURIDAN

Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-Université de Grenoble I,
BP 74, F-38402 St Martin d'Hères Cedex

Abstract

Dans cet article, nous donnons des formules pour les transformées de Laplace fini-dimensionnelles des temps locaux d'un processus de Markov à son instant de mort. Lorsque l'espace d'états a une structure d'arbre, nous montrons que les temps locaux obéissent à une propriété de Markov spatiale. Nous appliquons ces résultats pour décrire la loi des temps locaux d'un mouvement brownien tué selon une fonctionnelle additive. Enfin, dans le cas d'un processus symétrique, nous donnons une démonstration plus simple du théorème d'isomorphisme de Dynkin et nous obtenons une identité en loi classique - quantique.

Introduction

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace localement compact à base dénombrable muni de sa tribu borélienne. On considère un processus markovien de Feller $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, issu de a sous P_a , de durée de vie ζ . Comme d'habitude, on ajoute à l'espace d'état $(E, \mathcal{E})$ un point cimetière Δ , et on pose $X_t = \Delta$ sur l'événement $[t \geq \zeta]$. On prolonge les applications de E dans $\mathbf{R}$, en attribuant la valeur 0 au point Δ . On peut supposer que le processus est le processus canonique sur l'espace des trajectoires continues à droite ayant une limite à gauche en tout point. On note $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration complète continue à droite engendrée par le processus X .

On suppose que tout point $x \in E$ est transient et régulier, c'est-à-dire qu'on a P_x -presque sûrement $\sup\{t > 0 : X_t = x\} < +\infty$ et $\inf\{t > 0 : X_t = x\} = 0$. On peut donc définir en chaque point x de E un temps local L^x (le lecteur pourra trouver une construction du temps local en un point régulier dans [1]). Rappelons qu'un temps local au point a est une fonctionnelle additive continue croissante A du processus X telle que

$$P_x[(\forall t \in \mathbf{R}_+^*) A_t > 0] = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Une telle fonctionnelle additive est unique à constante multiplicative près, la constante dépendant du point considéré. Le but de l'article est d'obtenir un

théorème de Ray-Knight au temps ζ , c'est-à-dire de décrire la loi du processus $(L_\zeta^x)_{x \in E}$.

Dans la première partie, nous obtenons une formule matricielle (proposition 1.6) exprimant les transformées de Laplace fini-dimensionnelles à l'aide de la fonction de Green définie par $g(x, y) = \mathbf{E}_x[L_\zeta^y]$ pour $(x, y) \in E^2$. Cette formule est équivalente à la formule de Marcus et Rosen [14] donnant l'espérance d'un produit fini de temps locaux, mais plus générale que les formules pour la transformée de Fourier d'un temps local ou d'une différence de deux temps locaux qu'on trouve dans [16], [3] (page 223) ou dans [15]. Nous verrons par ailleurs (dans les troisième et sixième parties) que l'écriture sous forme matricielle est efficace pour les calculs.

Dans les parties suivantes, nous faisons quatre hypothèses supplémentaires :

- * le processus X visite les points : pour tous $x, y \in E$, $P_x[T_y < \zeta] > 0$;
- * la distance définie par $d(x, y) = -\frac{1}{2} \ln (P_x[T_y < \zeta] P_y[T_x < \zeta])$ donne la topologie de E .
- * la durée de vie ζ est presque sûrement finie ;
- * la position finale $X_{\zeta-}$ est presque sûrement différente de Δ .

Ces hypothèses permettent de rendre les démonstrations de l'article élémentaires et "autocontenues", en évitant le recours à la théorie du potentiel et à la frontière de Martin.

Dans la seconde partie, nous étudions l'effet d'un conditionnement par la position finale : conservation de la propriété de Markov, effet sur la fonction de Green et nouvelles formules pour les transformées de Laplace fini-dimensionnelles des temps locaux.

Les temps locaux du processus issu de a conditionné à finir en un point b vérifient-ils une propriété de Markov spatiale, comme Ray [18] et Knight [12] l'ont montré dans le cas du mouvement brownien, Walsh [21] et Sheppard [20] dans le cas de diffusions sur $\mathbf{R}$? Le contre-exemple du mouvement brownien sur le cercle donné par N. Eisenbaum et H. Kaspi [8] montre qu'il est vain d'espérer une telle propriété sans hypothèse sur l'espace d'états. L'argument de N. Eisenbaum et H. Kaspi peut d'ailleurs être simplifié de la façon suivante : tuons un mouvement brownien sur le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (identifié à $[0 ; 1[$) issu de 0 lorsque son temps local en $1/2$ atteint une variable aléatoire exponentielle indépendante. Alors à cet instant, les temps locaux aux points $1/4$ et $3/4$ ne sont pas indépendants conditionnellement aux temps locaux en 0 et $1/2$, puisqu'ils ne peuvent s'annuler simultanément, alors que chacun peut s'annuler : pour aller du point 0 au point $1/2$, le mouvement brownien est obligé de passer en $1/4$ ou en $3/4$, mais il peut éviter complètement un de ces deux points.

Cet exemple montre que le fait d'avoir deux chemins différents pour aller d'un point à un autre est une obstruction à ce que les temps locaux vérifient une propriété de Markov spatiale. N. Eisenbaum et H. Kaspi ont d'ailleurs montré dans [9] que lorsque le processus X est à valeurs dans un graphe connexe plan,

les temps locaux vérifient une propriété de Markov spatiale si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- * le processus X est à trajectoires continues ;
- * le graphe est un arbre (continu) ;
- * les positions initiale et finale sont déterministes.

Dans la troisième partie, nous définissons la notion de passage obligé et d'espace arborescent pour le processus X . Cette notion traduit le fait que le processus X satisfait à une propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un chemin minimal possible pour aller d'un point à un autre. Cette condition est plus faible que les deux premières conditions de N. Eisenbaum et H. Kaspi puisque l'espace E n'a pas besoin d'être connexe : par exemple, une marche aléatoire à temps continu sur $\mathbf{Z}$ faisant des pas de -1 , 0 ou 1 vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Sous cette condition plus générale, nous montrons que les temps locaux vérifient une propriété de Markov spatiale et nous décrivons complètement leur loi dans le théorème 3.8. Un fait remarquable est que les temps locaux convenablement normalisés possèdent toujours les mêmes probabilités de transition. Les deux semi-groupes qui interviennent sont ceux qui apparaissent dans la formulation de Biane et Yor du théorème de Ray donnant la loi des temps locaux du mouvement brownien à un temps exponentiel indépendant [2].

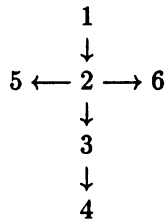
La méthode utilisée pour montrer ces résultats est différente des méthodes employées jusqu'alors puisque nous établissons la propriété de Markov spatiale en regardant seulement les transformées de Laplace fini-dimensionnelles, sans utiliser la théorie des excursions comme dans [21], [8] et [9] ni le théorème d'isomorphisme de Dynkin comme dans [20], [7] et [5] ... ni les théorèmes de Ray-Knight classiques comme dans [9].

Dans la quatrième partie, nous appliquons ces résultats pour donner la loi des temps locaux du mouvement brownien dans $\mathbf{R}$ tué à l'instant où une certaine fonctionnelle additive dépasse une variable aléatoire exponentielle indépendante. Jeulin a donné à la fin de [11] une description de cette loi en conditionnant par rapport au triplet (B_0, B_ζ, I_ζ) où B_0 et B_ζ sont les positions de départ et d'arrivée du mouvement brownien et I_ζ la plus petite valeur atteinte sur l'intervalle de temps $[0 ; \zeta]$. Mais la formulation que nous donnons est plus simple : en normalisant convenablement les temps locaux et en effectuant un changement de variable d'espace, nous obtenons une description très proche de la formulation du théorème de Ray donnée par Biane et Yor dans [2].

Dans les deux dernières parties, nous nous intéressons à des identités en loi dans le cas où la fonction de Green est symétrique. Nous montrons dans la cinquième partie que les formules matricielles de la deuxième partie pour les transformées de Laplace mènent naturellement à une identité en loi entre variables classiques (n temps locaux) et variables quantiques (n matrices symétriques réelles de taille n). Dans la sixième (et dernière) partie, nous redémontrons le théorème d'isomorphisme de Dynkin [4] qui est une identité

en loi reliant les temps locaux du processus X à un processus gaussien centré indépendant dont la fonction de covariance est la fonction de Green du processus X . La démonstration que nous donnons, utilisant les formules matricielles pour les transformées de Laplace (proposition 2.4) est beaucoup plus simple que la preuve d'origine. Elle présente des similitudes (tout en étant différente) avec la démonstration donnée par Rogers et Williams dans le cas particulier où l'espace d'états est fini. Nous redémontrons la "version sans conditionnement" du théorème d'isomorphisme de Dynkin, due à N. Eisenbaum [6].

Nous avons choisi de placer la démonstration du théorème d'isomorphisme de Dynkin à la fin de l'article pour insister sur le fait qu'on ne s'en sert pas comme outil de démonstration dans les autres parties. Voici en effet le graphe de dépendance entre les différentes parties :



1 Résultats préliminaires

Voyons d'abord comment le processus X permet de définir une pseudo-distance sur E . Pour $y \in E$, on note $T_y = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ : X_t = y\}$ le premier instant d'atteinte du point y .

Définition 1.1 On appelle distance d'aller-retour associée au processus X l'application de E^2 dans $[0 ; +\infty]$ définie par

$$d(x, y) = -\frac{1}{2} \ln (P_x[T_y < \zeta] P_y[T_x < \zeta]),$$

avec la convention $\ln 0 = -\infty$.

Lemme 1.2 La distance d'aller-retour est une pseudo-distance sur E . C'est une distance si le processus X est irréductible (au sens où $P_x[T_y < \zeta] > 0$ pour tous $x, y \in E$).

Démonstration. La symétrie est évidente. L'axiome de séparation découle de la finitude de ζ et du fait que si $d(x, y) = 0$, le processus effectue une infinité d'aller-retours entre x et y . L'inégalité triangulaire vient de ce que d'après la propriété forte de Markov,

$$P_x[T_z < \zeta] \geq P_x[T_y < T_z < \zeta] = P_x[T_y < \zeta] P_y[T_z < \zeta].$$

□

Nous allons maintenant voir quelques résultats élémentaires montrant comment certaines quantités s'expriment à l'aide de la fonction de Green. Le premier résultat concerne la loi de la variable L_ζ^x sous P_x .

Lemme 1.3 *Sous P_x , la variable L_ζ^x suit une loi exponentielle et possède donc des moments de tous ordres. En particulier, $g(x, x) = \mathbf{E}_x[L_\zeta^x] \in \mathbf{R}_+^*$.*

Démonstration. Considérons les instants "inverses" du temps local au point x :

$$\tau_r^x = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ : L_t^x > r\}.$$

Par continuité à droite de X , on a $X_{\tau_r^x} = x$ sur l'événement $[\tau_r^x < \zeta]$. En utilisant l'additivité du temps local au point x et la propriété de Markov, au temps d'arrêt τ_r^x , on montre que pour tous $r, s \in \mathbf{R}_+$,

$$P_x[L_\zeta^x > r + s] = P_x[\tau_{r+s}^x < \zeta] = P_x[\tau_r^x < \zeta] P_x[\tau_s^x < t],$$

ce qui entraîne que la variable L_ζ^x suit une loi exponentielle. $\square$

Lemme 1.4 *Quels que soient $x, y \in E$, on a*

$$g(x, y) = P_x[T_y < \zeta] \quad g(y, y) \leq g(y, y) < +\infty$$

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{g(x, x)g(y, y)}{g(x, y)g(y, x)} \right)$$

Démonstration. En appliquant la propriété de Markov au temps d'arrêt T_y , on obtient

$$g(x, y) = \mathbf{E}_x[\mathbf{I}_{[T_y < \zeta]} L_\zeta^y] = P_x[T_y < \zeta] \mathbf{E}_y[L_\zeta^y] = P_x[T_y < \zeta] g(y, y),$$

ce qui montre la première affirmation. La seconde égalité est une conséquence immédiate. $\square$

Voyons maintenant comment la transformée de Laplace d'un n -uplet de temps locaux s'exprime à l'aide de la fonction de Green.

Soient $n + 1$ points $x_0, \dots, x_n$ non nécessairement distincts, et n complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de partie réelle négative. Soit A est la fonctionnelle additive définie par $A_t = \alpha_1 L_t^{x_1} + \dots + \alpha_n L_t^{x_n}$. Comme le processus A est continu et à variation bornée, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_0}[\exp(A_\zeta)] - 1 &= \mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^\zeta \exp(A_\zeta - A_t) dA_t \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^\zeta \exp(A_\zeta - A_t) dL_t^{x_k} \right]. \end{aligned}$$

Pour $x \in E$ et $r \geq 0$, notons $\tau_r^x = \inf\{t > 0 : L_t^x > r\}$. Par continuité du processus croissant L^x ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^\zeta \exp(A_\zeta - A_t) dL_t^x \right] &= \mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^{L_\zeta^x} \exp(A_\zeta - A_{\tau_r^x}) dr \right] \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}_{x_0} [\mathbf{I}_{[L_\zeta^x > r]} \exp(A_\zeta - A_{\tau_r^x})] dr. \end{aligned}$$

Comme l'événement $[L_\zeta^x > r] = [\zeta > \tau_r^x]$ est antérieur au temps d'arrêt τ_r^x , on a d'après la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^\zeta \exp(A_\zeta - A_t) dL_t^x \right] &= \int_0^\infty P_{x_0}[L_\zeta^x > r] \mathbf{E}_x [\exp(A_\zeta)] dr \\ &= \mathbf{E}_{x_0}[L_\zeta^x] \mathbf{E}_x [\exp(A_\zeta)]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(*) \quad \mathbf{E}_{x_0}[\exp(A_\zeta)] - 1 = \sum_{k=1}^n g(x_0, x_k) \alpha_k \mathbf{E}_{x_k}[\exp(A_\zeta)].$$

Une démonstration analogue (ou un développement en série de la formule $(*)$) fournit une formule donnant les moments de $A_\zeta = \alpha_1 L_\zeta^{x_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{x_n}$, pour tous complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\frac{\mathbf{E}_{x_0}[(A_\zeta)^m]}{m!} = \sum g(x_0, x_{k(1)}) \alpha_{k(1)} g(x_{k(1)}, x_{k(2)}) \alpha_{k(2)} \cdots g(x_{k(m-1)}, x_{k(m)}) \alpha_{k(m)},$$

la somme portant sur toutes les applications k de $[1 \cdots m]$ dans $[1 \cdots n]$. Le cas particulier où $m = n$ permet de retrouver par polarisation la formule de Marcus et Rosen [14] :

Proposition 1.5 *Que's que soient les points $x_0, \dots, x_n \in E$, on a*

$$\mathbf{E}_{x_0}[L_\zeta^{x_1} \cdots L_\zeta^{x_n}] = \sum g(x_0, x_{s(1)}) g(x_{s(1)}, x_{s(2)}) \cdots g(x_{s(n-1)}, x_{s(n)}),$$

où la somme porte sur toutes les permutations s de $[1 \cdots n]$.

Revenons à la formule $(*)$ qu'il est intéressant d'écrire sous forme matricielle. En remplaçant successivement x_0 par $x_1, \dots, x_n$, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.6 *Soient $x_1, \dots, x_n$ des points non nécessairement distincts, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes de partie réelle négative. Soit C la matrice $(g(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors*

$$(I - CD) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{x_1} [\exp(\alpha_1 L_\zeta^{x_1} + \cdots + \alpha_n L_\zeta^{x_n})] \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{x_n} [\exp(\alpha_1 L_\zeta^{x_1} + \cdots + \alpha_n L_\zeta^{x_n})] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut montrer que la matrice $I - CD$ est inversible. La preuve de la proposition 2.4 le montre lorsque les coefficients de C sont tous strictement positifs. Si ce n'est pas le cas, on définit une relation d'équivalence et une relation de préordre entre les indices par

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow P_{x_i}[T_{x_j} < \zeta] > 0 \text{ et } P_{x_j}[T_{x_i} < \zeta] > 0 \Leftrightarrow c_{i,j} > 0 \text{ et } c_{j,i} > 0.$$

$$i << j \Leftrightarrow P_{x_i}[T_{x_j} < \zeta] > 0 \text{ et } P_{x_j}[T_{x_i} < \zeta] = 0 \Leftrightarrow c_{i,j} > 0 \text{ et } c_{j,i} = 0.$$

En réordonnant les lignes et les colonnes de $I - CD$, on obtient alors une matrice triangulaire supérieure par blocs dont les blocs diagonaux sont inversibles d'après le cas précédent. La matrice $I - CD$ est donc inversible. En utilisant les formules de Cramer, le résultat de la proposition 1.6 s'écrit :

$$\mathbf{E}_{x_1}[\exp(\alpha_1 L_{\zeta}^{x_1} + \dots + \alpha_n L_{\zeta}^{x_n})] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -c_{1,2}\alpha_2 & \dots & -c_{1,n}\alpha_n \\ 1 & 1 - c_{2,2}\alpha_2 & \dots & -c_{2,n}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 - c_{n,2}\alpha_2 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - c_{1,1}\alpha_1 & -c_{1,2}\alpha_2 & \dots & -c_{1,n}\alpha_n \\ -c_{2,1}\alpha_1 & 1 - c_{2,2}\alpha_2 & \dots & -c_{2,n}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n,1}\alpha_1 & 1 - c_{n,2}\alpha_2 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n \end{vmatrix}}.$$

Autre démonstration de la proposition 1.6 Dans la démonstration "probabiliste" ci-dessous, nous nous restreignons au cas où les points $x_1, \dots, x_n$ sont distincts deux-à-deux et montrons au passage que la matrice C de coefficients $g(x_i, x_j)$ est alors inversible. Mais on se convainc facilement (en renumérotant les points) que le résultat de la proposition 1.6 est encore vrai même si les points $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas distincts.

Démonstration. Soient $x_1, \dots, x_n$ des points de E distincts deux-à-deux et $F = \{\Delta; x_1; \dots; x_n\}$. Posons $\eta = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F \setminus \{X_0\}\}$ et introduisons les matrices B et P de coefficients

$$b_{i,j} = \mathbf{E}_{x_i}[L_{\eta}^{x_j}] \text{ et } p_{i,j} = P_{x_i}[X_{\eta} = x_j] \text{ pour } i, j \in [1 \dots n]$$

et posons $p_{i,0} = P_{x_i}[X_{\eta} = \Delta]$. Par définition de l'instant η , on a $\eta \leq \zeta$, et $b_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ (tandis que $b_{i,j} > 0$ si $i = j$). Autrement dit la matrice B est diagonale et inversible. D'après la propriété de Markov, on a pour tous $i, j \in [1 \dots n]$

$$c_{i,j} = \mathbf{E}_{x_i}[L_{\zeta}^{x_j}] = \mathbf{E}_{x_i}[L_{\eta}^{x_j}] + \mathbf{E}_{x_i}[\mathbf{E}_{X_{\eta}}[L_{\zeta}^{x_j}]] = b_{i,j} + \sum_{k=1}^n p_{i,k} b_{k,j}.$$

Autrement dit, $C = B + PC$, soit $(I - P)C = B$. Donc les matrices $I - P$ et C sont inversibles, et $I - P = BC^{-1}$. En regardant les coefficient diagonaux, on trouve que $1 = b_{k,k}[C^{-1}]_{k,k}$ pour tout $k \in [1 \dots n]$.

Par ailleurs, en appliquant la propriété forte de Markov à l'instant $\tau_r^{x_i} = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ : L_t^{x_i} > r\}$, on voit que pour tout $r > 0$,

$$P_{x_i}[L_\eta^{x_i} > r ; X_\eta = x_j] = P_{x_i}[\tau_r^{x_i} < \eta ; X_\eta = x_j] = P_{x_i}[\tau_r^{x_i} < \eta] P_{x_i}[X_\eta = x_j].$$

Donc sous la loi P_{x_i} , les variables $L_\eta^{x_i}$ et X_η sont indépendantes, et on montre que la variable $L_\eta^{x_i}$ suit une loi exponentielle par un raisonnement identique à celui du lemme 1.3.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes de partie réelle négative et A la fonctionnelle additive définie par $A_t = \alpha_1 L_t^{x_1} + \dots + \alpha_n L_t^{x_n}$. En appliquant la propriété de Markov au temps d'arrêt η , on voit que pour tout $i \in [1 \dots n]$,

$$\mathbf{E}_{x_i}[e^{A_\zeta}] = \mathbf{E}_{x_i}[e^{\alpha_i L_\eta^{x_i}}] \mathbf{E}_{x_i}[\mathbf{E}_{X_\eta}[e^{A_\zeta}]] = \frac{1}{1 - \alpha_i b_{i,i}} \left(p_{i,0} + \sum_{j=1}^n p_{i,j} \mathbf{E}_{x_j}[e^{A_\zeta}] \right),$$

soit

$$(1 - \alpha_i b_{i,i}) \mathbf{E}_{x_i}[e^{A_\zeta}] - \sum_{j=1}^n p_{i,j} \mathbf{E}_{x_j}[e^{A_\zeta}] = p_{i,0} = 1 - \sum_{j=1}^n p_{i,j}.$$

En notant D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on peut réécrire ces égalités sous forme matricielle :

$$(I - BD - P) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{x_1}[e^{A_\zeta}] \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{x_n}[e^{A_\zeta}] \end{pmatrix} = (I - P) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient l'égalité voulue en multipliant les deux membres par $(I - P)^{-1} = CB^{-1}$. $\square$

A partir des formules permettant de calculer les moments conjoints des temps locaux, on obtient l'estimation suivante :

Corollaire 1.7 Notons $\Lambda_x = L_\zeta^x / g(x, x)$ pour $x \in E$. Alors quels que soient $a, x, y \in E$, on a $\mathbf{E}_a[(\Lambda_y - \Lambda_x)^2] \leq 4 - 4 \exp(-2d(x, y)) \leq 8d(x, y)$.

Démonstration. D'après la formule de Marcus et Rosen (proposition 1.5), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{E}_a[(\Lambda_y - \Lambda_x)^2] &= \frac{g(a, x)g(x, x)}{g(x, x)g(x, x)} + \frac{g(a, y)g(y, y)}{g(y, y)g(y, y)} - \frac{g(a, x)g(x, y)}{g(x, x)g(y, y)} - \frac{g(a, y)g(y, x)}{g(y, y)g(x, x)} \\ &= \frac{g(a, x)}{g(x, x)} \left(1 - \frac{g(x, y)}{g(y, y)} \right) + \frac{g(a, y)}{g(y, y)} \left(1 - \frac{g(y, x)}{g(x, x)} \right) \\ &\leq \left(1 - \frac{g(x, y)}{g(y, y)} \right) + \left(1 - \frac{g(y, x)}{g(x, x)} \right) \\ &\leq 2 - 2 \exp(-2d(x, y)) \end{aligned}$$

$\square$

2 Conditionnement par rapport à la position d'arrivée

Dans cette partie (et les suivantes), nous faisons les quatre hypothèses suivantes :

- * le processus X visite les points : pour tous $x, y \in E$, $P_x[T_y < \zeta] > 0$;
- * la distance d'aller-retour associée à X donne la topologie de E .
- * la durée de vie ζ est presque sûrement finie ;
- * la position finale $X_{\zeta-}$ est presque sûrement différente de Δ .

De plus, nous normalisons les temps locaux de telle sorte que l'application $x \mapsto g(x, x) = \mathbb{E}_x[L_\zeta^x]$ soit continue. Le corollaire 1.7 montre alors que pour tout $a \in E$, le processus $(L_\zeta^x)_{x \in E}$ est continu dans $L^2(P_a)$, ce qui entraîne que l'application $x \mapsto g(a, x) = \mathbb{E}_a[L_\zeta^x]$ est continue (et donc $\mathcal{E}$ -mesurable).

Pour conditionner le processus X par rapport à sa position $X_{\zeta-}$ à son instant de mort, nous allons d'abord étudier l'influence du point de départ sur la loi de $X_{\zeta-}$. La dépendance de la loi de $X_{\zeta-}$ par rapport au point de départ est résumée par le résultat suivant.

Lemme 2.1 *Pour tout $x \in E$, la loi de $X_{\zeta-}$ sous P_x est de la forme $P_x[X_{\zeta-} \in dy] = g(x, y)\nu(dy)$, où ν est une mesure sur E ne dépendant pas de x .*

Démonstration. Il s'agit de montrer que la mesure ν_x sur E définie pour chaque $x \in E$ par $\nu_x(dy) = g(x, y)^{-1}P_x[X_{\zeta-} \in dy]$ ne dépend pas de x . Pour cela, on commence par remarquer que pour tous points $x, y \in E$ et tout borélien $B \in \mathcal{E}$,

$$P_x[X_{\zeta-} \in B] \geq P_x[T_y < \zeta ; X_{\zeta-} \in B] = \frac{g(x, y)}{g(y, y)}P_y[X_{\zeta-} \in B],$$

d'où

$$\frac{P_y[X_{\zeta-} \in B]}{g(y, y)} \leq \frac{P_x[X_{\zeta-} \in B]}{g(x, y)}.$$

Soit $r > 0$. Soient $B \in \mathcal{E}$ une partie de E de diamètre $< r$ et $y \in B$. Alors en appliquant la propriété de Markov au temps $T = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ : d(X_t, y) < r\}$, il vient, pour tout $x \in E$,

$$P_x[X_{\zeta-} \in B] = P_x[T < \zeta ; X_{\zeta-} \in B] = \mathbb{E}_x[\mathbf{I}_{[T < \zeta]} P_{X_T}[X_{\zeta-} \in B]].$$

Mais sur l'événement $[T < \zeta]$, on a $d(X_T, y) < r$, d'où

$$P_{X_T}[X_{\zeta-} \in B] \leq \frac{g(X_T, X_T)}{g(y, X_T)}P_y[X_{\zeta-} \in B] \leq e^{2r}P_y[X_{\zeta-} \in B].$$

En reportant dans l'égalité précédente, on obtient donc

$$P_x[X_{\zeta-} \in B] \leq e^{2r} P_x[T < \zeta] P_y[X_{\zeta-} \in B] \leq e^{4r} P_x[T_y < \zeta] P_y[X_{\zeta-} \in B],$$

puisque

$$\begin{aligned} P_x[T_y < \zeta] &= P_x[T \leq T_y < \zeta] = \mathbb{E}_x[P_{X_T}[T_y < \zeta]] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\frac{g(X_T, y)}{g(y, y)}\right] \geq e^{-2r} P_x[T < \zeta]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{P_y[X_{\zeta-} \in B]}{g(y, y)} \leq \frac{P_x[X_{\zeta-} \in B]}{g(x, y)} \leq e^{4r} \frac{P_y[X_{\zeta-} \in B]}{g(y, y)}.$$

Par conséquent, pour tous $x, x' \in E$,

$$\frac{P_x[X_{\zeta-} \in B]}{g(x, y)} \leq e^{4r} \frac{P_{x'}[X_{\zeta-} \in B]}{g(x', y)}.$$

Cette dernière inégalité est valable pour toute partie $B \in \mathcal{E}$ de diamètre $< r$ et pour tout $y \in B$. Comme l'espace métrique (E, d) est séparable, on peut décomposer tout borélien de $(E, \mathcal{E})$ en réunion dénombrable disjointe de telles parties. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{E}$

$$\nu_x(A) = \int_A \frac{P_x[X_{\zeta-} \in dy]}{g(x, y)} \leq e^{4r} \int_A \frac{P_{x'}[X_{\zeta-} \in dy]}{g(x', y)} = e^{4r} \nu_{x'}(A),$$

d'où $\nu_x(A) \leq \nu_{x'}(A)$, en faisant tendre r vers 0 et $\nu_x(A) = \nu_{x'}(A)$ par symétrie. $\square$

Lemme 2.2 Soit $a \in E$. Alors une version régulière de la loi conditionnelle de P_a sachant $X_{\zeta-}$ est la famille de probabilités $(P_{a,b})_{b \in E}$ définie par

$$P_{a,b}(A \cap [\tau < \zeta]) = \int_A \frac{g(X_\tau, b)}{g(a, b)} dP_a$$

pour tout temps d'arrêt τ , et tout événement $A \in \mathcal{F}_\tau$.

Démonstration. Soit τ un temps d'arrêt. Alors pour tout $a \in \mathcal{F}_\tau$ et pour tout $B \in E$,

$$\begin{aligned} P_a[A ; \tau < \zeta ; X_{\zeta-} \in B] &= \mathbb{E}_a[\mathbf{I}_A P_{X_\tau}[X_{\zeta-} \in B]] \\ &= \mathbb{E}_a[\mathbf{I}_A \int_B g(X_\tau, b) \nu(db)] \\ &= \int_B \left(\int_A g(X_\tau, b) dP_a \right) \nu(db) \\ &= \int_B \left(\int_A \frac{g(X_\tau, b)}{g(a, b)} dP_a \right) P_a[X_{\zeta-} \in db] \end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.3 Pour $a, b \in E$, la probabilité $P_{a,b}$ s'appelle loi du processus X issu de a conditionné par finir en b .

On écrit de façon abrégée

$$P_{a,b} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{g(X_t, b)}{g(a, b)} P_a \Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

Fixons $b \in E$. En notant $(P_t)_{t \geq 0}$ le noyau de transition du processus X sous les probabilités $(P_x)_{x \in E}$, on vérifie facilement que le processus X est encore markovien sous les probabilités $(P_{x,b})_{x \in E}$, avec un noyau de transition $(P_t^b)_{t \geq 0}$ donné par $P_t^b(x, dy) = g(y, b)/g(x, b) P_t(x, dy)$.

La fonction de Green du processus X "conditionné par finir en b " est donnée par la formule

$$g_b(x, y) = g(x, y) \frac{g(y, b)}{g(x, b)}.$$

En effet, en notant $\tau_r^y = \inf\{t > 0 : X_t = y\}$ pour $r \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} g_b(x, y) = \mathbb{E}_{x,b}[L_\zeta^y] &= \int_0^\infty P_{x,b}[L_\zeta^y > r] dr \\ &= \int_0^\infty P_{x,b}[\tau_r^y < \zeta] dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{[\tau_r^y < \zeta]} \frac{g(X_r, b)}{g(x, b)} dP_x \right) dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{[\tau_r^y < \zeta]} \frac{g(y, b)}{g(x, b)} dP_x \right) dr \\ &= \frac{g(y, b)}{g(x, b)} \int_0^\infty P_x[\tau_r^y < \zeta] dr \\ &= g(x, y) \frac{g(y, b)}{g(x, b)}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant n points $x_1, \dots, x_n$ non nécessairement distincts et n complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de partie réelle négative. Notons $A_t = \alpha_1 L_t^{x_1} + \dots + \alpha_n L_t^{x_n}$. Pour calculer $\mathbb{E}_{x_i, x_f}[\exp(A_\zeta)]$, il suffit de remplacer dans la formule donnant $\mathbb{E}_{x_i}[\exp(A_\zeta)]$ (proposition 1.6) la matrice C par la matrice

$$C' = \left(g(x_i, x_j) \frac{g(x_j, x_f)}{g(x_i, x_f)} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(c_{i,j} \frac{c_{j,f}}{c_{i,f}} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Or on a $C' = B_f^{-1} C B_f$, où B_f est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $c_{1,f}, \dots, c_{n,f}$. Comme les matrices B_f et D commutent, on a

$$(I - C' D) = I - B_f^{-1} C D B_f = B_f^{-1} (I - C D) B_f.$$

En multipliant à gauche par B_f l'égalité

$$(I - C' D) \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{x_1, x_f}[\exp(A_\zeta)] \\ \vdots \\ \mathbb{E}_{x_n, x_f}[\exp(A_\zeta)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient donc :

$$(I - CD) \begin{pmatrix} c_{1,f} \mathbf{E}_{x_1, x_f} [\exp(A_\zeta)] \\ \vdots \\ c_{n,f} \mathbf{E}_{x_n, x_f} [\exp(A_\zeta)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1, x_f) \\ \vdots \\ g(x_n, x_f) \end{pmatrix}.$$

Les deux membres de cette égalité sont la f -ième colonne des matrices $(I - CD)M$ et C , où M est la matrice $(c_{i,j} \mathbf{E}_{x_i, x_j} [\exp(A_\zeta)])_{1 \leq i, j \leq n}$. Donc $(I - CD)M = C$ et $(I - CD)(I + MD) = I$, ce qui montre que la matrice $I - CD$ est inversible.

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 2.4 *Soient $x_1, \dots, x_n$ des points non nécessairement distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes de partie réelle négative. Soit C la matrice $(g(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors pour tous $i, f \in [1 \dots n]$,*

$$\mathbf{E}_{x_i, x_f} [\exp(\alpha_1 L_\zeta^{x_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{x_n})] = \frac{1}{c_{i,f}} [(I - CD)^{-1} C]_{(i,f)}.$$

3 Le cas d'un espace arborescent

En plus des hypothèses de la section précédente, nous supposons dans cette partie que l'espace d'états est arborescent en un sens que nous allons maintenant préciser. Pour cela, nous avons besoin d'introduire quelques définitions concernant la structure de l'espace d'états relativement au processus X :

Définition 3.1 *Pour $x, y, z \in E$, on appelle :*

- * **passage obligé de x vers y** tout point $z \in E$ tel que $P_x[T_z \leq T_y] = 1$;
- * **passage obligé entre x et y** tout point $z \in E$ tel que $P_x[T_z \leq T_y] = P_y[T_z \leq T_x] = 1$;
- * **itinéraire de x vers y** l'ensemble des points de passage obligé de x vers y , noté $[x \rightarrow y]$;
- * **segment $[x ; y]$** l'ensemble des points de passage obligé entre x et y , noté $[x ; y]$;

Les itinéraires ont les propriétés naturelles suivantes :

Lemme 3.2 *Si le point z appartient à l'itinéraire $[x \rightarrow y]$, alors*

- * $P_x[T_y < \zeta] = P_x[T_z < \zeta] P_z[T_y < \zeta]$;
- * $g(x, z)g(z, y) = g(x, y)g(z, z)$;
- * $[x \rightarrow z] \cup [z \rightarrow y] = [x \rightarrow y]$;

$$* [x \rightarrow z] \cap [z \rightarrow y] = \{z\}.$$

Démonstration. Soit $z \in [x \rightarrow y]$. Les deux premiers points se montrent en appliquant la propriété de Markov à l'instant T_z :

$$P_x[T_y < \zeta] = P_x[T_z \leq T_y < \zeta] = P_x[T_z < \zeta] P_z[T_y < \zeta].$$

D'après le lemme 1.4, cette égalité s'écrit :

$$\frac{g(x, y)}{g(y, y)} = \frac{g(x, z)}{g(z, z)} \frac{g(z, y)}{g(y, y)},$$

ce qui entraîne que $g(x, y)g(z, z) = g(x, z)g(z, y)$.

Pour montrer que $[x \rightarrow y] \subset [x \rightarrow z] \cup [z \rightarrow y]$ (la seule inclusion non évidente), on remarque que si w n'appartient ni à $[x \rightarrow z]$ ni à $[z \rightarrow y]$, alors d'après la propriété de Markov,

$$P_x[T_y < T_w] = P_x[T_z \leq T_y < T_w] = P_x[T_z < T_w] P_z[T_y < T_w] > 0,$$

ce qui entraîne que w n'appartient pas à $[x \rightarrow y]$.

Pour montrer que l'intersection $[x \rightarrow z] \cap [z \rightarrow y]$ est réduite à $\{z\}$, on remarque que si w est un élément de $[x \rightarrow z] \cap [z \rightarrow y]$, alors w appartient à $[x \rightarrow y]$, d'où d'après le premier point,

$$\begin{aligned} P_x[T_w < \zeta] P_w[T_y < \zeta] &= P_x[T_y < \zeta] \\ &= P_x[T_z < \zeta] P_z[T_y < \zeta] \\ &= P_x[T_w < \zeta] P_w[T_z < \zeta] P_z[T_w < \zeta] P_w[T_y < \zeta]. \end{aligned}$$

Mais comme $P_x[T_w < \zeta] P_w[T_y < \zeta] > 0$ puisque le processus X visite les points, on a donc $P_w[T_z < \zeta] P_z[T_w < \zeta] = 1$, c'est-à-dire $d(w, z) = 0$, soit $w = z$. $\square$

Définition 3.3 On dit que l'espace d'états E est arborescent (pour le processus de Markov X) si quels que soient $x, y, z \in E$, les segments $[x ; y]$, $[x ; z]$ et $[y ; z]$ ont au moins un point en commun.

Cette définition inclut évidemment les arbres usuels (pour des marches aléatoires à temps continu), mais aussi des espaces continus comme les gerbes de demi-droites issues d'un même point, pour des mouvements browniens de Walsh. On peut "panacher" les comportements en considérant par exemple un processus à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{-1\}$ évoluant de la façon suivante : le processus est un mouvement brownien réfléchi en 0 jusqu'à ce que son temps local dépasse une variable exponentielle indépendante ; il saute alors en -1 et y reste un temps exponentiel avant de revenir en 0... On peut même imaginer des exemples plus compliqués. Mais il est remarquable que les temps locaux convenablement normalisés obéissent toujours aux mêmes lois.

Dans toute la suite, on suppose que l'espace d'états E est arborescent. Voyons quelques conséquences immédiates de cette hypothèse :

Lemme 3.4 *Quels que soient les points $x, y \in E$, on a $[x \rightarrow y] = [x ; y]$.*

Démonstration. La seule inclusion non évidente est $[x \rightarrow y] \subset [x ; y]$. Pour la montrer, on remarque que pour tout point $z \in [x \rightarrow y]$, les segments $[x ; y]$, $[x ; z]$ et $[y ; z]$ ont au moins un point en commun. Mais le seul point commun aux segments $[x ; z]$ et $[y ; z]$ est z , d'après le lemme 3.2. Donc $z \in [x ; y]$. $\square$

Corollaire 3.5 *Quels que soient $x, y, z \in E$, les segments $[x ; y]$, $[x ; z]$ et $[y ; z]$ ont un et un seul point en commun.*

Démonstration. Soient $x, y, z \in E$. Supposons que les segments $[x ; y]$, $[x ; z]$ et $[y ; z]$ ont deux points en commun w et w' . D'après les lemmes 3.2 et 3.4, on a $[x ; y] = [w ; x] \cup [w ; y]$. Donc le point w' appartient à $[w ; x]$ ou à $[w ; y]$, par exemple à $[w ; x]$. Mais le point w' appartient aussi à $[y ; z] = [w ; y] \cup [w ; z]$, donc par exemple à $[w ; y]$. Comme le seul point commun aux segments $[w ; x]$ et $[w ; y]$ est w , on a donc $w' = w$. $\square$

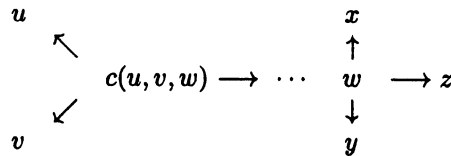
Définition 3.6 *On appelle carrefour entre x, y, z l'unique point commun aux segments $[x ; y]$, $[x ; z]$ et $[y ; z]$, noté $c(x, y, z)$.*

On vérifie facilement que l'opérateur ternaire "carrefour" possède la propriété suivante :

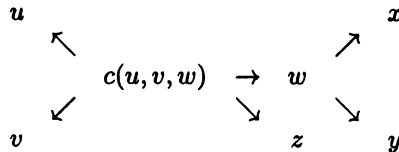
Lemme 3.7 *Pour tous $u, v, x, y, z \in E$, le point $c(u, v, c(x, y, z))$ est égal à au moins un des points $c(u, v, x)$, $c(u, v, y)$, $c(u, v, z)$.*

Démonstration. Si les points x, y, z sont alignés alors $c(x, y, z)$ est l'un d'eux et il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $w = c(x, y, z)$. Il y a plusieurs cas à considérer, suivant la position du point $c(u, v, w)$.

Si le point $c(u, v, w)$ n'appartient à aucun des segments $[w ; x]$, $[w ; y]$ et $[w ; z]$, alors on montre facilement que $c(u, v, w) = c(u, v, x) = c(u, v, y) = c(u, v, z)$:



Si le point $c(u, v, w)$ appartient à un seul des segments $[w ; x]$, $[w ; y]$ et $[w ; z]$, disons $[w ; z]$, alors on montre facilement que $c(u, v, w) = c(u, v, x) = c(u, v, y)$:



Si le point $c(u, v, w)$ appartient à au moins deux des segments $[w ; x]$, $[w ; y]$ et $[w ; z]$, il est égal à w . Comme les points x, y et z appartiennent à trois

composantes irréductibles distinctes pour le processus X tué en w , l'une des trois au moins, disons celle de z , ne contient ni u ni v et alors $c(u, v, w) = c(u, v, z)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & x & & \\ & & \uparrow & & \\ u & \leftarrow & w & \rightarrow & z \\ & & \downarrow & & \\ v & \leftarrow & \cdot & \rightarrow & y \end{array}$$

□

Le lemme 3.7 entraîne que toute partie finie F de l'espace d'états est incluse dans une partie finie stable pour l'opérateur c : il suffit de considérer $c(F^3) = \{c(x, y, z) ; (x, y, z) \in F^3\}$. Pour décrire la loi de la famille des temps locaux $(L_\zeta^x)_{x \in E}$ sous $P_{a,b}$, il suffit de donner la loi de toute sous-famille $(L_\zeta^x)_{x \in F}$, où F est une partie finie de E contenant a stable pour l'opérateur c .

Soit donc F une telle partie de E . On munit F d'une structure d'arbre orienté en mettant une arête entre d'un point x vers un point y si et seulement si $x \in [a ; y]$ et si l'intersection $F \cap [x ; y]$ est réduite à la paire $\{x ; y\}$. Notons A_{int} l'ensemble des arêtes contenues dans le segment $[a ; b]$, A_{ext} l'ensemble des arêtes en dehors du segment $[a ; b]$ et $A = A_{int} \cup A_{ext}$.

Pour $\delta \geq 0$ et $t > 0$, notons M_t^δ le noyau de transition sur $\mathbf{R}_+$ défini par

$$M_t^\delta(u, \cdot) = \exp\left(\frac{-u}{e^{2t}-1}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{e^{2t}-1}\right)^n \Gamma\left(n + \frac{\delta}{2}, \frac{1}{1-e^{-2t}}\right),$$

où $\Gamma(\alpha, \lambda)$ désigne la loi Gamma de paramètres α et λ : si $\alpha > 0$, cette loi admet comme densité sur $\mathbf{R}_+^*$ l'application $x \mapsto \Gamma(\alpha)^{-1} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$; si $\alpha = 0$, alors $\Gamma(\alpha, \lambda) = \delta_0$.

Nous pouvons alors expliciter la loi de la famille $(L_\zeta^x)_{x \in F}$:

Théorème 3.8 *Notons $\Lambda_x = L_\zeta^x / g(x, x)$ pour $x \in E$. Alors avec les notations précédentes,*

$$\begin{aligned} P[(\forall x \in F) \Lambda_x \in du_x] \\ = e^{-u_a} du_a \prod_{(x,y) \in A_{int}} M_{d(x,y)}^2(u_x, du_y) \prod_{(x,y) \in A_{ext}} M_{d(x,y)}^0(u_x, du_y). \end{aligned}$$

De ce théorème découle immédiatement (par récurrence sur le nombre de parties considérées) le résultat suivant :

Corollaire 3.9 *La famille de variables aléatoires $(\Lambda_x)_{x \in E}$ vérifie la propriété de Markov spatiale suivante : si $E_1, \dots, E_n$ sont des parties de E si $c \in E$ est un point de passage obligé entre n'importe quel couple de points appartenant à deux parties E_i et E_j d'indices i, j différents, alors les famille $(\Lambda_x)_{x \in E_1}, \dots, (\Lambda_x)_{x \in E_n}$ sont indépendantes conditionnellement à Λ_c .*

Avant de passer à la démonstration théorème 3.8, signalons les principales propriétés des noyaux de transition M_t^δ .

Lemme 3.10 Pour tous $\delta, t, u \in \mathbf{R}_+$, la transformée de Laplace de la probabilité $M_t^\delta(u, \cdot)$ est donnée par

$$\int_{\mathbf{R}_+} \exp(\lambda v) M_t^\delta(u, dv) = \left(\frac{e^{2t}}{e^{2t} - (e^{2t} - 1)\lambda} \right)^{\delta/2} \exp \left(\frac{\lambda u}{e^{2t} - (e^{2t} - 1)\lambda} \right).$$

De plus, pour tout $\delta \in \mathbf{R}_+$, les noyaux $(M_t^\delta)_{t \geq 0}$ forment un semi-groupe de transition sur $\mathbf{R}_+$, dont le générateur est $2u \frac{d^2}{du^2} + (\delta - 2u) \frac{d}{du}$ pour les applications $f \in C^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telles que $f(u)$, $uf'(u)$ et $uf''(u)$ tendent vers 0 quand u tend vers $+\infty$.

Démonstration. Le calcul de la transformée de Laplace est immédiat. Pour montrer la propriété de semi-groupe, on vérifie que pour tous réels $s, t, u \geq 0$ et $\lambda \leq 0$,

$$\int_{\mathbf{R}_+} M_t^\delta(u, dv) \left(\int_{\mathbf{R}_+} \exp(\lambda w) M_s^\delta(v, dw) \right) = \int_{\mathbf{R}_+} M_{t+s}^\delta(u, dw) \exp(\lambda w).$$

Pour le calcul du générateur, on montre la formule pour les combinaisons linéaires d'exponentielles décroissantes et on étend le résultat par densité. $\square$

Remarque. La loi d'une diffusion de générateur $2u \frac{d^2}{du^2} + (\delta + 2\beta u) \frac{d}{du}$ issue de x est parfois notée ${}^\beta Q_x^\delta$. Les semi-groupes de transition $(M_t^\delta)_{t \geq 0}$ sont alors ceux des lois ${}^{-1}Q_x^\delta$. Les lois ${}^\beta Q_x^\delta$ généralisent les lois Q_x^δ des carrés de Bessel (obtenues en prenant $\beta = 0$) et partagent la même propriété d'additivité à β fixé. On trouvera des propriétés et des formules concernant ces lois dans l'article [17] de J. Pitman et M. Yor. En particulier, la formule (6c) donne les densités de transition sur $\mathbf{R}_+$ pour un processus de loi ${}^\beta Q_x^\delta$. Cette formule comporte une erreur de signe et doit être rectifiée comme suit :

$${}^\beta q(t, x, y) = \frac{\beta(y/x)^{\nu/2}}{2\text{sh}(\beta t)} \exp \left(\left((1 - \nu)t - \frac{xe^{\beta t} + ye^{-\beta t}}{2\text{sh}(\beta t)} \right) \right) I_\nu \left(\frac{\beta \sqrt{xy}}{\text{sh}(\beta t)} \right),$$

avec $\nu = \delta/2 - 1$. Signalons que lorsque $\delta = 0$, les probabilités de transitions comportent un atome en 0.

Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 3.8. Elle se fait en deux étapes, la première consistant à démontrer le résultat lorsque F est une partie finie du segment $[a; b]$ contenant a . On procède par récurrence sur le nombre de points, grâce au lemme suivant :

Lemme 3.11 Soient x_1 et x_2 deux points de E . Pour $n \geq 3$, considérons des points $x_3, \dots, x_{n+1}$ appartenant au segment $[x_1; x_2]$ ordonnés de x_1 vers x_2 , avec $x_3 = x_1$. Notons $d_n = c_{n,n}c_{n+1,n+1} - c_{n,n+1}c_{n+1,n}$ et $c_{i,j} = g(x_i, x_j)$ pour $i, j \in [3 \cdots n+1]$. Alors pour tout complexe α de partie réelle négative, on a

$$\mathbf{E}_{x_1, x_2} [\exp(\alpha L_\zeta^{x_{n+1}}) \mid \sigma(L_\zeta^{x_1}, \dots, L_\zeta^{x_n})] = \frac{c_{n,n}}{c_{n,n} - d_n \alpha} \exp \left(\frac{c_{n,n+1}c_{n+1,n} \alpha}{c_{n,n}(c_{n,n} - d_n \alpha)} L_\zeta^{x_n} \right).$$

Démonstration. Soient $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ et α des complexes de partie réelle négative. D'après la proposition et les formules de Cramer, on a

$$\mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=3}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \right] = \frac{1}{c_{1,2}} \frac{\begin{vmatrix} c_{1,2} & 0 & -c_{1,3}\alpha_3 & \dots & -c_{1,n}\alpha_n \\ c_{2,2} & 1 & -c_{2,3}\alpha_3 & \dots & -c_{2,n}\alpha_n \\ c_{3,2} & 0 & 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,2} & 0 & -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -c_{1,3}\alpha_3 & \dots & -c_{1,n}\alpha_n \\ 0 & 1 & -c_{2,3}\alpha_3 & \dots & -c_{2,n}\alpha_n \\ 0 & 0 & 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n \end{vmatrix}}.$$

Dans le déterminant du numérateur, ajoutons $\frac{c_{1,j}}{c_{1,2}}\alpha_j$ fois la première colonne à la j -ième pour tout $j \in [3 \cdots n]$. Comme $\frac{c_{1,j}}{c_{1,2}}c_{i,2} - c_{i,j}$ est nul pour $3 \leq i \leq j \leq n$, on trouve que ce déterminant vaut $c_{1,2}$. Donc

$$\mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=3}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \right] = \frac{1}{D_n} \text{ avec } D_n = \begin{vmatrix} 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n}\alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

De même,

$$\mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=3}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \exp (\alpha L_{\zeta}^{x_{n+1}}) \right] = \frac{1}{D_{n+1}},$$

avec

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n}\alpha_n & -c_{3,n+1}\alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n & -c_{n,n+1}\alpha \\ -c_{n+1,3}\alpha_3 & \dots & -c_{n+1,n}\alpha_n & 1 - c_{n+1,n+1}\alpha \end{vmatrix}.$$

Dans l'expression de D_{n+1} , multiplions la dernière ligne par $c_{n,n}$ et retranchons-lui l'avant-dernière multipliée par $c_{n+1,n}$. En développant le déterminant obtenu suivant la dernière ligne et en utilisant l'égalité $c_{n+1,n}c_{n,j} = c_{n,n}c_{n+1,j}$ pour $j \in [3 \cdots n]$, on trouve

$$\begin{aligned}
c_{n,n} D_{n+1} &= \begin{vmatrix} 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n}\alpha_n & -c_{3,n+1}\alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n & -c_{n,n+1}\alpha \\ 0 & \dots & 0 & c_{n,n} - d_n\alpha \end{vmatrix} \\
&= \frac{c_{n,n+1}c_{n+1,n}}{c_{n,n}} \begin{vmatrix} 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{3,n}\alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n-1,3}\alpha_3 & \dots & -c_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{n-1,n}\alpha \\ -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & -c_{n,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{n,n}\alpha \end{vmatrix} \\
&\quad + (c_{n,n} - d_n\alpha) \begin{vmatrix} 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{3,n}\alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n-1,3}\alpha_3 & \dots & -c_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{n-1,n}\alpha_n \\ -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & -c_{n,n-1}\alpha_{n-1} & 1 - c_{n,n}\alpha_n \end{vmatrix} \\
&= (c_{n,n} - d_n\alpha) \begin{vmatrix} 1 - c_{3,3}\alpha_3 & \dots & -c_{3,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{3,n}(\alpha_n + \beta) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n-1,3}\alpha_3 & \dots & 1 - c_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{n-1,n}(\alpha_n + \beta) \\ -c_{n,3}\alpha_3 & \dots & -c_{n,n-1}\alpha_{n-1} & 1 - c_{n,n}(\alpha_n + \beta) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

où

$$\beta = \frac{c_{n,n+1}c_{n+1,n}\alpha}{c_{n,n}(c_{n,n} - d_n\alpha)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=3}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \exp (\alpha L_{\zeta}^{x_{n+1}}) \right] \\
= \frac{c_{n,n}}{c_{n,n} - d_n\alpha} \mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=3}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \exp (\beta L_{\zeta}^{x_n}) \right].
\end{aligned}$$

Comme cette égalité a lieu quels que soient les complexes de partie réelle négative $\alpha_3, \dots, \alpha_n$, on obtient le résultat annoncé. $\square$

Les lemmes 3.10 et 3.11 permettent de montrer le résultat du théorème 3.8 lorsque la partie F est incluse dans le segment $[a; b]$: on procède par récurrence sur le nombre de points. La seconde étape de la démonstration du théorème consiste à étendre le résultat à une partie quelconque vérifiant les hypothèses du théorème, en raisonnant par récurrence sur le nombre de points en dehors du segment $[a; b]$. La récurrence repose sur lemme suivant :

Lemme 3.12 Soit F une partie finie de E contenant strictement le segment $[a; b]$, stable pour l'opérateur c . Soit v une feuille de l'arbre (F, A) n'appartenant pas au segment $[a; b]$, et soit u le prédécesseur de v . Alors pour tout complexe α de partie réelle négative, on a

$$\mathbf{E}_{a,b}[\exp(\alpha_v L_\zeta^v) \mid \sigma((L^x)_{x \in F \setminus \{v\}})] = \exp\left(\frac{g(u,v)g(v,u)\alpha}{g(u,u)(g(u,u) - d_{u,v}\alpha)} L_\zeta^v\right),$$

avec $d_{u,v} = g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)$.

Démonstration. Notons $x_1, \dots, x_{n+1}$ les points de F , avec $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = u$, $x_{n+1} = v$, certains de ces points pouvant être confondus. Soient $c_{i,j} = g(x_i, x_j)$ pour $i, j \in [1 \cdots n+1]$ et $d_n = c_{n,n}c_{n+1,n+1} - c_{n,n+1}c_{n+1,n} = d_{u,v}$. Alors pour tous complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et α de partie réelle négative, on a

$$c_{1,2} \mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k L_\zeta^{x_k} \right) \right] = \frac{A}{B},$$

avec

$$A = \begin{vmatrix} c_{1,2} & -c_{1,2}\alpha_2 & \dots & -c_{1,n}\alpha_n & -c_{1,n+1}\alpha \\ c_{2,2} & 1 - c_{2,2}\alpha_2 & \dots & -c_{2,n}\alpha_n & -c_{2,n+1}\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n,2} & -c_{n,2}\alpha_2 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n & -c_{n,n+1}\alpha \\ c_{n+1,2} & -c_{n+1,2}\alpha_2 & \dots & -c_{n+1,n}\alpha_n & 1 - c_{n+1,n+1}\alpha \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 - c_{1,1}\alpha_1 & \dots & -c_{1,n}\alpha_n & -c_{1,n+1}\alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n,1}\alpha_1 & \dots & 1 - c_{n,n}\alpha_n & -c_{n,n+1}\alpha \\ -c_{n+1,1}\alpha_1 & \dots & -c_{n+1,n}\alpha_n & 1 - c_{n+1,n+1}\alpha \end{vmatrix}.$$

Dans chacun des déterminants A et B , effectuons les mêmes opérations que celles effectuées dans la démonstration du lemme 3.11 sur le déterminant D_{n+1} . On obtient de la même façon :

$$c_{n,n}A = (c_{n,n} - d_n\alpha)A' \quad \text{et} \quad c_{n,n}B = (c_{n,n} - d_n\alpha)B',$$

avec

$$A' = \begin{vmatrix} c_{1,2} & 1 - c_{1,2}\alpha_2 & \dots & -c_{1,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{1,n}(\alpha_n + \beta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,2} & -c_{n-1,2}\alpha_2 & \dots & 1 - c_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{n-1,n}(\alpha_n + \beta) \\ c_{n,2} & -c_{n,2}\alpha_2 & \dots & -c_{n,n-1}\alpha_{n-1} & 1 - c_{n,n}(\alpha_n + \beta) \end{vmatrix},$$

$$B' = \begin{vmatrix} 1 - c_{1,1}\alpha_1 & \dots & -c_{1,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{1,n}(\alpha_n + \beta) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n-1,1}\alpha_1 & \dots & -c_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} & -c_{n-1,n}(\alpha_n + \beta) \\ -c_{n,1}\alpha_1 & \dots & -c_{n,n-1}\alpha_{n-1} & 1 - c_{n,n}(\alpha_n + \beta) \end{vmatrix},$$

où

$$\beta = \frac{c_{n,n+1}c_{n+1,n}\alpha}{c_{n,n}(c_{n,n} - d_n\alpha)}.$$

Par conséquent

$$\mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \exp (\alpha L_{\zeta}^{x_{n+1}}) \right] = \mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \exp (\beta L_{\zeta}^{x_n}) \right].$$

Comme cette égalité a lieu quels que soient les complexes de partie réelle négative $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on a bien

$$\mathbf{E}_{x_1, x_2} [\exp (\alpha L_{\zeta}^{x_{n+1}}) \mid \sigma(L_{\zeta}^{x_1}, \dots, L_{\zeta}^{x_n})] = \exp \left(\frac{c_{n,n+1}c_{n+1,n}\alpha}{c_{n,n}(c_{n,n} - d_n\alpha)} L^{x_n} \right),$$

ce qui est le résultat annoncé. $\square$

Remarque. L'hypothèse que l'espace E est arborescent pour le processus X entraîne qu'on peut rendre la fonction de Green symétrique en normalisant convenablement les temps locaux. En effet, soit f l'application de E dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = g(x, a)/g(a, x)$, où a est un point fixé de E . Alors pour tous points $x, y \in E$, on a en notant z le carrefour de a, x, y

$$\begin{aligned} f(y)g(x, y) &= g(x, y) \times g(y, a)/g(a, y) \\ &= \frac{g(x, z)g(z, y)}{g(z, z)} \times \frac{g(y, z)g(z, a)}{g(z, z)} \times \frac{g(z, z)}{g(a, z)g(z, y)} \\ &= \frac{g(x, z)g(y, z)g(z, a)}{g(z, z)g(a, z)}, \end{aligned}$$

d'où $f(y)g(x, y) = f(x)g(y, x)$. Pour rendre la fonction de Green symétrique, il suffit donc de renormaliser les temps locaux en multipliant par $f(x)$ le temps local en x .

4 Application au mouvement brownien

Dans cette partie, on considère un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ et une variable R indépendante de B , de loi exponentielle de paramètre $\theta^2/2$. On note $(L^x)_{x \in \mathbf{R}}$ une version continue des temps locaux de B . Soient μ une mesure positive non nulle, localement finie sur $\mathbf{R}$ et L^μ la fonctionnelle additive définie par $L_t^\mu = \int_{\mathbf{R}} L_t^x \mu(dx)$. Pour $b \in \mathbf{R}$ et $r > 0$, considérons les instants $\tau_b^r = \inf\{t \geq 0 : L_t^b > r\}$ et $\tau_r^\mu = \inf\{t \geq 0 : L_t^\mu > r\}$. Nous allons décrire la loi des temps locaux du mouvement brownien B à l'instant τ_R^μ . Pour cela, nous appliquons les résultats de la troisième partie au processus de Markov X obtenu en tuant le mouvement brownien à cet instant. Nous utilisons également l'identité en loi suivante, qui nous a déjà servi dans [13] à obtenir un théorème de Ray-Knight à temps fixe.

Lemme 4.1 *Pour tout instant aléatoire T , notons P_a^T la loi du mouvement brownien issu de a tué à l'instant T . Alors*

$$\int_0^\infty P_a^{\tau_r^\mu} dr = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty P_a^{\tau_r^b} dr \right) \mu(db).$$

Démonstration. Pour tout instant aléatoire T , notons B^T le mouvement brownien tué à l'instant T (autrement dit $B_t^T = B_t$ sur $[t < T]$ et $B_t^T = \Delta$ sur $[t \geq T]$). Alors pour toute fonctionnelle mesurable positive F ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{E}_a[F(B^{\tau_r^\mu})] dr &= \mathbf{E}_a \left[\int_0^\infty F(B^t) dL_t^\mu \right] \\ &= \mathbf{E}_a \left[\int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty F(B^t) dL_t^b \right) \mu(db) \right] \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}_a \left[\int_0^\infty F(B^{\tau_r^b}) dr \right] \mu(db) \end{aligned}$$

□

Le lemme ci-dessus permet de décrire la loi de $X_{\zeta-} = B_{\tau_R^\mu}$ à l'aide de la fonction de Green :

Lemme 4.2 *La loi de la position $B_{\tau_R^\mu}$ pour un mouvement brownien issu de a est donnée par $P_a[B_{\tau_R^\mu} \in db] = (\theta^2/2)g(a, b) \mu(db)$.*

Démonstration. Pour toute application borélienne bornée $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, on a d'après le lemme 4.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a[f(B_{\tau_R^\mu})] &= \mathbf{E}_a \left[\int_0^\infty f(B_{\tau_r^\mu}) \exp(-\theta^2 r/2) \frac{\theta^2}{2} dr \right] \\ &= \frac{\theta^2}{2} \int_0^\infty \mathbf{E}_a \left[f(B_{\tau_r^\mu}) \exp(-\theta^2 L_{\tau_r^\mu}^\mu/2) \right] dr \\ &= \frac{\theta^2}{2} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty \mathbf{E}_a \left[f(B_{\tau_l^b}) \exp(-\theta^2 L_{\tau_l^b}^\mu/2) \right] dl \right) \mu(db) \\ &= \frac{\theta^2}{2} \int_{\mathbf{R}} f(b) \left(\int_0^\infty \mathbf{E}_a \left[\exp(-\theta^2 L_{\tau_l^b}^\mu/2) \right] dl \right) \mu(db) \end{aligned}$$

Or pour tout $l \in \mathbf{R}_+$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a \left[\exp \left(-\frac{\theta^2}{2} L_{\tau_l^b}^\mu \right) \right] &= \int_0^\infty P[r > L_{\tau_l^b}^\mu] \exp \left(-\frac{\theta^2 r}{2} \right) \frac{\theta^2 dr}{2} = P[R > L_{\tau_l^b}^\mu] \\ &= P[\tau_R^\mu > \tau_l^b] = P[L_{\tau_R^\mu}^b > l]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}_a[f(B_{\tau_R^\mu})] = \frac{\theta^2}{2} \int_{\mathbf{R}} f(b) \mathbf{E}_a[L_{\tau_R^\mu}^b] \mu(db) = \frac{\theta^2}{2} \int_{\mathbf{R}} f(b) g(a, b) \mu(db).$$

□

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de la fonction de Green vis-à-vis de la seconde variable.

Lemme 4.3 Si $x, y \in \mathbf{R}$ et $z \in [x; y]$, alors $0 \leq g(x, z) - g(x, y) \leq 2|z - y|$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $y \mapsto g(x, y)$ est continue sur $\mathbf{R}$, croissante sur $] -\infty; x]$ et décroissante sur $[x; +\infty[$.

Démonstration. D'après la formule de Tanaka, on a pour tout instant $t \geq 0$

$$\mathbf{E}_x [L_{t \wedge \tau_R^\mu}^z - L_{t \wedge \tau_R^\mu}^y] = \mathbf{E}_x [|B_{t \wedge \tau_R^\mu} - z| - |B_{t \wedge \tau_R^\mu} - y|] - |x - z| + |x - y|,$$

Comme $|x - y| - |x - z| = |y - z|$, on a donc

$$0 \leq \mathbf{E}_x [L_{t \wedge \tau_R^\mu}^z - L_{t \wedge \tau_R^\mu}^y] \leq 2|z - y|,$$

d'après l'inégalité triangulaire. En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient le résultat annoncé par convergence dominée. $\square$

Nous allons maintenant établir quelques formules concernant la fonction de Green et la distance d définie au lemme 2.1 :

Lemme 4.4 Il existe deux applications continues U et V de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, strictement positives, respectivement croissante et décroissante, vérifiant $U'' = \theta^2 U \mu$ et $V'' = \theta^2 V \mu$ au sens des distributions telles que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} U(x)V(y) & \text{si } x \leq y \\ U(y)V(x) & \text{si } y \leq x \end{cases}$$

De plus la distance d définie au lemme 2.1 est donnée par la formule $d(x, y) = |s(y) - s(x)|$, où l'application s est définie par $s(x) = (\ln U(x) - \ln V(x))/2$. L'application s est une primitive de l'application $x \mapsto 1/g(x, x)$ et est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}$. Notons f_x l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_x(y) = g(x, y)$, et montrons que $f_x'' = \theta^2 f_x \mu - 2\delta_x$ au sens des distributions. Pour cela, considérons une fonction test ϕ . Alors

$$\int_{\mathbf{R}} f_x \phi'' = \mathbf{E}_x \left[\int_{\mathbf{R}} \phi''(y) L_{\tau_R^\mu}^y dy \right].$$

Or d'après la formule de Tanaka,

$$\phi(B_{\tau_R^\mu}) = \phi(B_0) + \int_0^{\tau_R^\mu} \phi'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \phi''(y) L_{\tau_R^\mu}^y dy.$$

Comme d'après le lemme 4.3, on a

$$\mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_R^\mu} \phi'(B_s)^2 ds \right] = \mathbf{E}_x \left[\int_{\mathbf{R}} \phi'^2(y) L_{\tau_R^\mu}^y dy \right] = \int_{\mathbf{R}} \phi'^2(y) g(x, y) dy < +\infty,$$

on en déduit que

$$\int_{\mathbf{R}} f_x \phi'' = 2\mathbf{E}_x [\phi(B_{\tau_R^\mu}) - \phi(B_0)] = \theta^2 \int_{\mathbf{R}} \phi(y) f_x(y) \mu(dy) - 2\phi(x),$$

grâce au lemme 4.2.

L'application f_x est donc solution de l'équation différentielle $f'' = \theta^2 f \mu$ sur chacun des intervalles $] -\infty ; x]$ et $[x ; +\infty[$. D'après le lemme 4.3, l'application f_x est strictement positive et continue sur $\mathbf{R}$, croissante sur $] -\infty ; x]$ et décroissante sur $[x ; +\infty[$. Or on montre facilement que le wronskien de deux solutions de l'équation différentielle $f'' = \theta^2 f \mu$ est constant, ce qui entraîne que deux solutions positives croissantes (ou décroissantes) sont proportionnelles. Donc l'application f_x est proportionnelle à U sur $] -\infty ; x]$ et à V sur $[x ; +\infty[$, où U et V deux applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ indépendantes de x , continues, strictement positives, respectivement croissante et décroissante, solutions de l'équation différentielle $f'' = \theta^2 f \mu$. Comme l'application f_x est continue au point x , il existe donc une constante $C(x) \in \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} C(x)U(x)V(y) & \text{si } x \leq y \\ C(x)U(y)V(x) & \text{si } y \leq x \end{cases}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\theta^2} &= \mathbf{E}_x[R] = \mathbf{E}_x \left[\int_{\mathbf{R}} L_{\tau_R}^y \mu(dy) \right] \\ &= \int_{\mathbf{R}} g(x, y) \mu(dy) \\ &= C(x)V(x) \int_{]-\infty ; x]} U(y) \mu(dy) + C(x)U(x) \int_{[x ; +\infty[} V(y) \mu(dy) \\ &= \frac{C(x)}{\theta^2} (U'(x+)V(x) - U(x)V'(x+)). \end{aligned}$$

Comme le wronskien des applications U et V est constant, on en déduit que la constante $C(x)$ ne dépend pas du réel x : plus précisément, $C(x) = c$, où c est le réel tel que le wronskien $U'V - UV'$ soit constant égal à $2/c$. On peut s'arranger à obtenir $c = 1$ en choisissant convenablement les applications U et V .

Considérons maintenant l'application $s : x \mapsto 1/2(\ln U(x) - \ln V(x))$. Alors pour $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x \leq y$,

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{g(x, x)g(y, y)}{g(x, y)g(y, x)} = \frac{1}{2} \ln \frac{V(x)U(y)}{U(x)V(y)} = s(y) - s(x).$$

D'autre part, par continuité des applications U et V ,

$$s'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{U'(x)}{U(x)} - \frac{V'(x)}{V(x)} \right) = \frac{(U'V - UV')(x)}{2U(x)V(x)} = \frac{1}{g(x, x)}.$$

Pour montrer que l'application s est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, il reste à vérifier que l'intégrale de $1/g(x, x)$ diverge en l'infini. Cela vient du fait que $0 < g(x, x) \leq g(x, 0) + 2|x| \leq g(0, 0) + 2|x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, d'après le lemme 4.3. $\square$

Soit σ la bijection réciproque de s . Alors d'après le théorème 3.8, le corollaire 3.9 et le lemme 3.10, la loi des temps locaux $(L_{\tau_R^\mu}^x)_{x \in \mathbb{R}}$ conditionnellement à $B_{\tau_R^\mu}$ se décrit de la façon suivante :

Théorème 4.5 *Quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, le processus $(L_{\tau_R^\mu}^x)_{x \in \mathbb{R}}$ est markovien inhomogène sous $P_{a,b}$. Si $a \leq b$, alors*

- * *Le processus $(\frac{1}{\sigma'(-y)} L_{\tau_R^\mu}^{\sigma(-y)})_{y \geq -s(a)}$ a pour générateur $2u \frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d}{du}$;*
- * *Le processus $(\frac{1}{\sigma'(y)} L_{\tau_R^\mu}^{\sigma(y)})_{s(a) \leq y \leq s(b)}$ a pour générateur $2u \frac{d^2}{du^2} + (2-2u) \frac{d}{du}$;*
- * *Le processus $(\frac{1}{\sigma'(y)} L_{\tau_R^\mu}^{\sigma(y)})_{y \geq s(b)}$ a pour générateur $2u \frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d}{du}$.*

Si $a \geq b$, on a des formules symétriques.

5 Une identité en loi entre variables classiques et variables quantiques

Dans cette partie, on garde les hypothèses et les notations de la section 2 et on suppose que la fonction de Green est symétrique, c'est-à-dire que $g(x, y) = g(y, x)$ pour tous points $x, y \in E$. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ des points non nécessairement distincts. Nous nous intéressons ici à la loi d'une combinaison linéaire de temps locaux $\alpha_1 L_\zeta^{x_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{x_n}$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels quelconques.

Introduisons les matrices $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (g(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ et D diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors la matrice symétrique réelle $C = (g(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est positive. En effet, pour tout réel négatif α , la matrice $I - \alpha C$ est inversible d'après la proposition 2.4 appliquée à $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$. Donc les valeurs propres réelles de la matrice C sont toutes positives.

Posons $S = C^{1/2}$. Alors on a pour tout réel t et pour tous $i, j \in [1 \cdots n]$,

$$c_{i,j} \mathbf{E}_{x_i, x_j} \left[\exp \left(it \sum_{k=1}^n \alpha_k L_\zeta^{x_k} \right) \right] = [(I - itCD)^{-1} C]_{(i,j)} = [S(I - itSDS)^{-1} S]_{(i,j)}.$$

La matrice SDS étant symétrique réelle, elle admet une décomposition spectrale

$$SDS = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda E_\lambda,$$

où Λ est le spectre de SDS et E_λ la matrice de projection orthogonale sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ . En écrivant

$$(I - itSDS)^{-1} = \sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - it\lambda)^{-1} E_\lambda,$$

on obtient

$$c_{i,j} \mathbf{E}_{x_i, x_j} \left[\exp \left(it \sum_{k=1}^n \alpha_k L_\zeta^{x_k} \right) \right] = \sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - it\lambda)^{-1} [S E_\lambda S]_{(i,j)}.$$

Pour tout réel λ , notons ϵ_λ la mesure image de la loi exponentielle de paramètre 1 par l'application $x \mapsto \lambda x$. La loi ϵ_0 est la masse de Dirac en 0, tandis que pour $\lambda > 0$, la loi ϵ_λ est la loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$ et la loi $\epsilon_{-\lambda}$ la symétrique par rapport à 0 de ϵ_λ . Dans ce qui suit, nous qualifierons toutes ces lois de lois exponentielles, la loi ϵ_λ étant la loi exponentielle d'espérance λ .

Par injectivité de la transformation de Fourier, on voit donc que sous P_{x_i, x_j} , la loi de la variable $\alpha_1 L_\zeta^{x_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{x_n}$ est

$$\frac{1}{c_{i,j}} \sum_{\lambda \in \Lambda} [SE_\lambda S]_{(i,j)} \epsilon_\lambda.$$

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 5.1 *Supposons que la fonction de Green soit symétrique et partout strictement positive. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors quels que soient les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, les points $x_1, \dots, x_n \in E$ et les indices $i, j \in [1, \dots, n]$, la loi de $\alpha_1 L_\zeta^{x_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{x_n}$ sous P_{x_i, x_j} peut s'écrire comme barycentre de n lois exponentielles.*

Remarque. Certains coefficients du barycentre peuvent être négatifs, bien que le résultat soit toujours une probabilité. Par exemple pour la variable $A = L_\zeta^{x_1}/c_{1,1} + L_\zeta^{x_2}/c_{2,2}$, on a

$$\mathbf{E}_{x_1, x_2}[\exp(itA)] = \frac{1}{c_{1,2}} \frac{\begin{vmatrix} c_{1,2} & -ic_{1,2}t/c_{2,2} \\ c_{2,2} & 1-it \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-it & -c_{1,2}it/c_{2,2} \\ -ic_{2,1}t/c_{1,1} & 1-it \end{vmatrix}},$$

d'où, en posant $\rho = \exp(-d(x_1, x_2)) = \left(\frac{c_{1,2}c_{2,1}}{c_{1,1}c_{2,2}}\right)^{1/2}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_1, x_2}[\exp(itA)] &= \frac{1}{1 - 2it - (1 - \rho^2)t^2} \\ &= \frac{1}{2\rho} \left(\frac{1 + \rho}{1 - i(1 + \rho)t} - \frac{1 - \rho}{1 - (1 - i\rho)t} \right), \end{aligned}$$

si bien que la loi de la variable A sous P_{x_1, x_2} est

$$\frac{1 + \rho}{2\rho} \epsilon_{1+\rho} - \frac{1 - \rho}{2\rho} \epsilon_{1-\rho}.$$

La dépendance des coefficients barycentriques et des espérances des exponentielles par rapport aux réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est complexe, puisqu'elle se fait par l'intermédiaire de la décomposition spectrale de la matrice SDS . On peut cependant remarquer que lorsque les points $x_1, \dots, x_n$ sont distincts deux-à-deux, les matrices C et $S = C^{1/2}$ sont inversibles, d'après la démonstration probabiliste de la proposition 1.6 ; les matrices D et SDS sont alors congruentes et ont donc autant de valeurs propres de chaque signe.

Dans le cas où l'on conditionne le processus de Markov X à finir à son point de départ, cette dépendance s'exprime de façon simple en terme de variables quantiques. Rappelons que toute matrice symétrique réelle A peut être vue comme une variable aléatoire quantique. Un état pur ξ est alors un vecteur colonne unitaire. La loi de la variable A dans l'état ξ est par définition $\sum \|E_\lambda \xi\|^2 \delta_\lambda$, où $A = \sum \lambda E_\lambda$ est la décomposition spectrale de A . Si f est une fonction borélienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie en tout point du spectre de A , l'espérance de la variable $f(A)$ dans l'état ξ est donc

$$\mathbf{E}_\xi[f(A)] = \sum \|E_\lambda \xi\|^2 f(\lambda) = \sum f(\lambda) \langle E_\lambda \xi, \xi \rangle = \langle f(A) \xi, \xi \rangle.$$

Notons $(s_{i,j})$ les coefficients de la matrice S , et considérons les vecteurs unitaires suivants :

$$\xi_j = c_{j,j}^{-1/2} \begin{pmatrix} s_{1,j} \\ \vdots \\ s_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur ξ_j est donc la j -ième colonne de S normalisée. Soit $SDS = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda E_\lambda$ la décomposition spectrale de SDS . On a vu que la loi de $\alpha_1 L_\zeta^{X_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{X_n}$ sous P_{x_j, x_j} est

$$\frac{1}{c_{j,j}} \sum_{\lambda \in \Lambda} [SE_\lambda S]_{(j,j)} \epsilon_\lambda,$$

tandis que la loi de la variable SDS dans l'état ξ_j est

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \|E_\lambda \xi_j\|^2 \delta_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{c_{j,j}} [SE_\lambda S]_{(j,j)} \delta_\lambda.$$

Introduisons maintenant la matrice diagonale D_k , dont le k -ième coefficient diagonal vaut 1 et les autres sont nuls, et

$$A_k = SD_k S = (s_{i,k} s_{k,j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Alors $SDS = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$. Nous pouvons énoncer l'identité en loi suivante.

Proposition 5.2 *Supposons que la fonction de Green soit symétrique et partout strictement positive. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in E$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. Considérons les matrices*

$$\begin{aligned} C &= (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = (g(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}, \\ S &= (s_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = C^{1/2}, \\ A_k &= (s_{i,k} s_{k,j})_{1 \leq i, j \leq n}. \end{aligned}$$

Alors la loi de la variable $\alpha_1 L_\zeta^{X_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{X_n}$ sous P_{x_1, x_1} est le produit de convolution multiplicative de la loi de la variable $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$ dans l'état ξ_1 par la loi exponentielle de paramètre 1. Autrement dit, pour toute application mesurable positive de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{E}_{x_1, x_1} [f(\alpha_1 L_\zeta^{X_1} + \dots + \alpha_n L_\zeta^{X_n})] = \int_0^\infty \mathbf{E}_{\xi_1} [f(t(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n))] e^{-t} dt.$$

6 Une preuve rapide du théorème d'isomorphisme de Dynkin

Comme dans la partie précédente, on suppose que la fonction de Green est symétrique. On sait alors (voir le début de la partie précédente) que pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, la matrice symétrique $C = (g(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive. En remplaçant l'espace canonique sur lequel est défini le processus X par un espace probabilisé plus gros, on peut donc construire un processus gaussien $(G_x)_{x \in E}$ qui sous chaque probabilité P_a est indépendant de X , centré et a pour fonction de covariance g . Le théorème d'isomorphisme de Dynkin [4] est alors une identité en loi liant les processus $(G_x)_{x \in E}$ et $(L_\zeta^x)_{x \in E}$ qu'on peut formuler comme suit :

Théorème 6.1 *Pour tous points $a, b \in E$ et pour toute fonctionnelle bornée F de $\mathbf{R}^E$ dans $\mathbf{R}$ mesurable pour la tribu produit, on a*

$$\mathbf{E}_{a,b} \left[F \left(L_\zeta + \frac{G_\zeta^2}{2} \right) \right] = \mathbf{E}_{a,b} \left[\frac{G_a G_b}{g(a,b)} F \left(\frac{G_\zeta^2}{2} \right) \right].$$

Autrement dit, la loi du processus $L_\zeta + \frac{G_\zeta^2}{2}$ sous la probabilité $P_{a,b}$ est égale à la "loi" du processus $\frac{G_\zeta^2}{2}$ sous la mesure signée $\frac{G_a G_b}{g(a,b)} P_{a,b}$.

Remarques.

- * La mesure signée $(G_a G_b / g(a,b)) P_{a,b}$ a pour masse totale 1, mais n'est une probabilité, sauf si $a = b$. Cependant, sa mesure image par l'application $\omega \mapsto G_\zeta^2(\omega)/2$ est bien une probabilité.
- * Comme sous toute probabilité P_x , le processus gaussien G est indépendant du processus de Markov X et de loi indépendante de x , l'espérance d'une fonctionnelle de G est la même sous n'importe quelle probabilité $P_{x,y}$. On peut alors omettre les indices x, y .

Voyons maintenant comment les calculs de la section 2 permettent de démontrer rapidement le théorème d'isomorphisme de Dynkin.

Démonstration. On vérifie l'identité en loi en comparant les transformées de Laplace fini-dimensionnelles. Soient $x_1, \dots, x_n$ des points de E tels que $x_1 = a$, $x_2 = b$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels négatifs. Par indépendance des processus G et L_ζ , il s'agit de vérifier l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k L_\zeta^{x_k} \right) \right] &= \mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{G_{x_k}^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{g(x_1, x_2)} \mathbf{E} \left[G_{x_1} G_{x_2} \exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{G_{x_k}^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour cela, introduisons les matrices $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (g(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$, $S = C^{1/2}$ et D diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors on a

$$\begin{pmatrix} G_{x_1} \\ \vdots \\ G_{x_n} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix},$$

où $U_1, \dots, U_n$ sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k G_{x_k}^2 = (G_{x_1} \cdots G_{x_n}) D \begin{pmatrix} G_{x_1} \\ \vdots \\ G_{x_n} \end{pmatrix} = (U_1 \cdots U_n) S D S \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

La matrice SDS étant symétrique réelle, on peut trouver une matrice orthogonale Q telle que la matrice $Q^{-1}SDSQ$ soit diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux et considérons les variables aléatoires $V_1, \dots, V_n$ définies par

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice Q est orthogonale, les variables $V_1, \dots, V_n$ sont encore indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Et comme

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k G_{x_k}^2 = (U_1 \cdots U_n) Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \lambda_k V_k^2,$$

on a

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{G_{x_k}^2}{2} \right) \right] = \prod_{k=1}^n \mathbf{E} \left[\exp \left(\lambda_k \frac{V_k^2}{2} \right) \right] = \prod_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^{-1/2}.$$

Par ailleurs,

$$G_{x_1} G_{x_2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (SQ)_{(1,i)} (SQ)_{(2,j)} V_i V_j.$$

En utilisant le fait que les variables $V_1, \dots, V_n$ sont indépendantes et de loi symétrique par rapport à 0, on a donc

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[G_{x_1} G_{x_2} \exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{G_{x_k}^2}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} (SQ)_{(2,k)} \mathbf{E} \left[V_k^2 \exp \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \frac{V_l^2}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} (SQ)_{(2,k)} \frac{2}{\partial \lambda_k} \left(\mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \frac{V_l^2}{2} \right) \right] \right) \\
&= \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} (SQ)_{(2,k)} \frac{1}{1 - \lambda_k} \prod_{l=1}^n (1 - \lambda_l)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{E} \left[G_{x_1} G_{x_2} \exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{G_{x_k}^2}{2} \right) \right]}{\mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{G_{x_k}^2}{2} \right) \right]} &= \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} (SQ)_{(2,k)} \frac{1}{1 - \lambda_k} \\
&= \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} \frac{1}{1 - \lambda_k} (Q^{-1}S)_{(k,2)} \\
&= \left[(SQ)(I - Q^{-1}SDSQ)^{-1}(Q^{-1}S) \right]_{(1,2)} \\
&= \left[S(I - SDS)^{-1}S \right]_{(1,2)} \\
&= \left[(I - CD)^{-1}C \right]_{(1,2)} \\
&= g(x_1, x_2) \mathbf{E}_{x_1, x_2} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \right],
\end{aligned}$$

d'après la proposition 2.4, ce qui achève la démonstration. $\square$

La même méthode permet de montrer la "version sans conditionnement" du théorème d'isomorphisme de Dynkin, due à N. Eisenbaum [6] :

Théorème 6.2 *Pour tout point $a \in E$, pour tout réel non nul m et pour toute fonctionnelle bornée F de $\mathbf{R}^E$ dans $\mathbf{R}$ mesurable pour la tribu produit, on a*

$$\mathbf{E}_a \left[F \left(L_{\zeta} + \frac{(G. + m)^2}{2} \right) \right] = \mathbf{E} \left[\frac{G_a + m}{m} F \left(\frac{(G. + m)^2}{2} \right) \right].$$

Autrement dit, la loi du processus $L_{\zeta} + \frac{(G. + m)^2}{2}$ sous la probabilité $P_{a,b}$ est égale à la "loi" du processus $\frac{(G. + m)^2}{2}$ sous la mesure signée $\frac{G_a + m}{m} P_{a,b}$.

Démonstration. Comme pour la version "avec conditionnement", on vérifie l'identité en loi en comparant les transformées de Laplace fini-dimensionnelles.

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points de E tels que $x_1 = a$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels négatifs. Par indépendance des processus G et L_ζ , il s'agit de vérifier l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x_1} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k L_\zeta^{x_k} \right) \right] \mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{(G_{x_k} + m)^2}{2} \right) \right] \\ = \mathbf{E} \left[\frac{G_{x_1} + m}{m} \exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{(G_{x_k} + m)^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Avec les notations de la démonstration précédente, considérons les réels $r_1, \dots, r_n$ définis par

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (SQ)^{-1} \begin{pmatrix} m \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\begin{pmatrix} G_{x_1} + m \\ \vdots \\ G_{x_n} + m \end{pmatrix} = SQ \begin{pmatrix} V_1 + r_1 \\ \vdots \\ V_n + r_n \end{pmatrix},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (G_{x_k} + m)^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k (V_k + r_k)^2,$$

puisque la matrice $(SQ)^T D(SQ)$ est diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Comme les variables $V_1, \dots, V_n$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a donc

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{(G_{x_k} + m)^2}{2} \right) \right] = \prod_{k=1}^n \mathbf{E} \left[\exp \left(\lambda_k \frac{(V_k + r_k)^2}{2} \right) \right]$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[(G_{x_1} + m) \exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{(G_{x_k} + m)^2}{2} \right) \right] \\ = \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} \mathbf{E} \left[(V_k + r_k) \exp \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \frac{(V_l + r_l)^2}{2} \right) \right] \\ = \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} \mathbf{E} \left[(V_k + r_k) \exp \left(\frac{(V_k + r_k)^2}{2} \right) \right] \prod_{l=1}^n \mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{(V_l + r_l)^2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Or quels que soient la variable V de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, le réel r et le réel négatif λ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\exp \left(\lambda \frac{(V + r)^2}{2} \right) \right] &= (1 - \lambda)^{-1/2} \exp \left(\frac{\lambda r^2}{2(1 - \lambda)} \right), \\ \mathbf{E} \left[(V + r) \exp \left(\lambda \frac{(V + r)^2}{2} \right) \right] &= \frac{r}{1 - \lambda} (1 - \lambda)^{-1/2} \exp \left(\frac{\lambda r^2}{2(1 - \lambda)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathbf{E} \left[(G_{x_1} + m) \exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{(G_{x_k} + m)^2}{2} \right) \right]}{\mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{(G_{x_k} + m)^2}{2} \right) \right]} \\
 &= \sum_{k=1}^n (SQ)_{(1,k)} \frac{r_k}{1 - \lambda_k} \\
 &= \left[(SQ)(I - Q^{-1}SDSQ)^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \right]_1 \\
 &= \left[(I - S^2D)^{-1}(SQ) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \right]_1 \\
 &= \left[(I - CD)^{-1} \begin{pmatrix} m \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \right]_1 \\
 &= m \mathbf{E}_{x_1} \left[\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k L_{\zeta}^{x_k} \right) \right],
 \end{aligned}$$

d'après la proposition 1.6, ce qui achève la démonstration. $\square$

References

- [1] Bertoin J. *Lévy processes*. Cambridge tracts in mathematics 121 (1996).
- [2] Biane P., Yor M. *Sur la loi des temps locaux browniens pris en temps exponentiel*. Séminaire de Probabilité XXII Lecture Notes in Mathematics 1321 (1988), 454-466.
- [3] Blumenthal R.M., Gettoor R.K. *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New York (1968).
- [4] Dynkin E.B. *Local times and quantum fields*. Seminar on Stochastic Processes, Birkhauser 26-4 (1983), 69-89.
- [5] Eisenbaum N. *Dynkin's isomorphism theorem and Ray-Knight theorems*. Probability Theory and Related Fields 99 (1994), 321-335.
- [6] Eisenbaum N. *Une version sans conditionnement du théorème d'isomorphisme de Dynkin*. Séminaire de Probabilité XXIX Lecture Notes in Mathematics 1613 (1995), 266-289.

- [7] Eisenbaum N., Kaspi H. *A necessary and sufficient condition for the Markov property of the local time process*. Annals of Probability 21-3 (1993), 1591-1598.
- [8] Eisenbaum N., Kaspi H. *A counterexample for the Markov property of local time for diffusions on graphs*. Séminaire de Probabilité XXIX Lecture Notes in Mathematics 1613 (1995), 260-265.
- [9] Eisenbaum N., Kaspi H. *On the Markov property of local time for Markov processes on graphs*. Stochastic Processes and their Applications 64 (1996), 153-172.
- [10] Fitzsimmons, Pitman J. *Kac's moment formula and the Feynman-Kac formula for additive functionals of a Markov process*. Stochastic Processes and their Applications 79 (1999), 117-134.
- [11] Jeulin T. *Ray-Knight's theorem on Brownian local times and Tanaka's formula*. Seminar on Stochastic Processes, Birkhauser (1983) 131-142.
- [12] Knight F.B. *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion*. Transactions of American Mathematical Society 109 (1963) 56-86.
- [13] Leuridan C. *Le théorème de Ray-Knight à temps fixe*. Séminaire de Probabilité XXXII Lecture Notes in Mathematics 1686 (1998), 376-396.
- [14] Marcus M.B., Rosen J. *Sample path properties of local times of strongly symmetric Markov processes via Gaussian processes*. Annals of probability 20-4 (1992), 1603-1684.
- [15] Marcus M.B., Rosen J. *Moment generating functions for local times of strongly symmetric Markov processes and random walks*. Proceedings of the conference "Probability in Banach Spaces" Birkhauser 8 (1992).
- [16] Meyer P.A. *Sur les lois de certaines fonctionnelles additives : application aux temps locaux* Publications de l'Institut de Statistiques des Universités de Paris, 15 (1966), 295-310.
- [17] Pitman J., Yor M. *A decomposition of Bessel bridges*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 59 (1982) 425-457.
- [18] Ray D. *Sojourn times of diffusion processes*. Illinois Journal of Mathematics 7 (1963) 615-630.
- [19] Rogers L.C.G., Williams D. *Diffusions, Markov processes, and Martingales* Volume 1 : Foundations, second edition, John Wiley and Sons (1994).
- [20] Sheppard P. *On the Ray-Knight property of local times*. Journal of London Mathematical Society 31 (1985), 377-384.
- [21] Walsh J.B. *Excursions and local time*. Temps Locaux, Astérisque 52-53 (1978), 159-192.