SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ABDELLATIF BENTALEB

Sur les fonctions extrémales des inégalités de Sobolev des opérateurs de diffusion

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 230-250

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__230_0>

Sur les fonctions extrémales des inégalités de Sobolev des opérateurs de diffusion

Abdellatif Bentaleb
Département de Mathématiques et Informatique
Université Moulay Ismail, Faculté des Sciences
B.P. 4010, Béni M'hamed, Méknès, Maroc
E-mail : bentaleb@fsmek.ac.ma

À la mémoire de Mohamed Jamal

RÉSUMÉ- Nous utilisons un critère de courbure-dimension mis en évidence par D. Bakry et M. Émery [B-É1] pour étudier les fonctions extrémales liées aux inégalités de type Sobolev pour une famille d'opérateurs de diffusions recouvrant, en particulier, le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck, le Laplacien sphérique, ainsi que l'opérateur de Gegenbauer multidimensionnel.

ABSTRACT- We use a dimension-curvature criterion introduced by D. Bakry and M. Émery [B-É1] to study the extremal functions related to Sobolev-type inequalities for families of diffusion operatorscovering in particular, the Ornstein-Uhlenbeck generator, the spherical Laplacian, as well as the multidimensional Gegenbauer operators.

1 Introduction

Les inégalités de Sobolev, répondant à l'origine à des questions d'aspects fonctionnels, constituent aujourd'hui un outil analytique précieux et extrêmement utile pour l'étude de nombreux problèmes géométriques. Les meilleures constantes et les fonctions extrémales de cette inégalité sur la sphère ont été abondamment étudiées notamment par T. Aubin [A] et ses collaborateurs. Sur une sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension n et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, on a pour, $p = \dfrac{2n}{n-2}$, l'inégalité de Sobolev optimale suivante :

$$\frac{n}{p-2}\left[\left(\int_{\mathbb{S}^n}|f|^p\,d\xi\right)^{\frac{2}{p}} - \int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\xi\right] \leq \int_{\mathbb{S}^n}|\nabla_s f|^2\,d\xi \tag{1}$$

où $d\xi$ est la mesure uniforme normalisée sur $\mathbb{S}^n$ et $|\nabla_s f|$ est la norme du gradient de f. L'extension de l'inégalité (1) à tous les exposants p de l'intervalle $\left[1, \dfrac{2n}{n-2}\right]$, $(p \neq 2)$, est due à Beckner (voir [Be]). Pour les petites dimensions, $n = 1$ ou $n = 2$, l'inégalité (1) est satisfaite pour tout $p \geq 1$ et les fonctions du domaine de Dirichlet sont (même) exponentiellement intégrables. L'inégalité d'Onofri [On] indique, pour ces cas particuliers, que pour toute fonction intégrable $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que ∇f soit dans $\mathbb{L}^2(\xi)$, on a

$$2n\left(\log\int_{\mathbb{S}^n} e^f d\xi - \int_{\mathbb{S}^n} f d\xi\right) \leq \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\xi.$$

Si l'inégalité (1) écrite pour $p = 1$ correspond à l'inégalité de Poincaré,

$$n\left[\int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\xi - \left(\int_{\mathbb{S}^n} f d\xi\right)^2\right] \leq \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\xi, \tag{2}$$

pour $p = 2$, nous remplacerons cette inégalité par l'inégalité obtenue par passage à la limite pour retrouver l'inégalité de Sobolev-Logarithmique :

$$n\left[\int_{\mathbb{S}^n} f^2 \log f^2 d\xi - \int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\xi \log\int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\xi\right] \leq 2\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla f|^2 d\xi. \tag{3}$$

Toutes les inégalités intégrales décrites précédemment renforcent, entre autres, l'inégalité de Poincaré (2).

Dans un cadre plus général, si $\mathbb{M}$ est une variété riemannienne compacte de dimension n, $n \geq 3$, et de courbure de Ricci minorée par $R > 0$, pour toute fonction f suffisamment régulière sur $\mathbb{M}$ et pour tout $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right]$, $(p \neq 2)$,

$$\frac{n}{p-2}\left[\left(\int_{\mathbb{M}} f^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}} - \int_{\mathbb{M}} f^2 d\mu\right] \leq \frac{(n-1)}{R}\int_{\mathbb{M}} |\nabla f|^2 d\mu \tag{4}$$

où μ est la mesure riemannienne normalisée sur $\mathbb{M}$, et $|\nabla f|$ désigne la norme du gradient de f sur $\mathbb{M}$. Ce résultat est dû dans ce cadre à S. Ilias [I], qui l'a obtenu en transportant par symétrisation l'inégalité (1) à l'aide du théorème de comparaison de Lévy-Gromov.

En 1985 D. Bakry et M. Émery ont inauguré un autre lieu de rencontre privilégié entre théorie des probabilités, analyse mathématique et géométrie. Sous une hypothèse de courbure-dimension issue de la formule de Böchner-Lichnérowicz, ces deux auteurs ont établi dans le cadre des opérateurs de diffusion markoviennes des inégalités de Sobolev et de Sobolev-Logarithmiques avec constante optimales. (voir [B-É1] et [B-É2]) . À la suite de ces travaux, et en faisant appel à des techniques variationnelles, M. Ledoux a pu raffiner les résultats de D. Bakry et M. Émery [B-É2] relatives à l'étude des inégalités de Sobolev. Cette méthode (présentée dans le cours de D. Bakry [Ba]) a permis, dans un cadre abstrait (qui englobe les diffusions sur une variété compacte) de retrouver ou d'améliorer de nombreux résultats déjà existants, comme par exemple, les meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev des variétés riemanniennes compactes.

C'est encore à l'aide du critère courbure-dimension que l'on aborde, dans ce travail, l'étude des fonctions extrémales liées aux inégalités de Sobolev et de leurs variantes.

Sous les mêmes hypothèses que celles présentées dans [Ba] (cf.Théorème 6.10, p. 107), et pour une situation un peu plus contraignante (voir l'hypothèse ($\mathcal{H}$) ci-dessous), nous allons montrer en fait qu'il est possible de ramener aussi la recherche des fonctions extrémales relatives aux inégalités de Sobolev (pour l'exposant optimum) à la résolution d'une équation conceptuellement maniable, équation s'exprimant simplement en termes du gradient Γ et du carré du champ itéré Γ_2 qui sont canoniquement liés au générateur L. En suite, nous étendons la méthode utilisée aux cas des inégalités d'Onofri et de Sobolev-Logarithmiques.

Comme conséquences de cette étude, nous explicitons les fonctions extrémales relatives aux inégalités de Sobolev et d'Onofri pour le cas des générateurs de Gegenbauer multidimensionnels définis sur la boule unité euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$. Cela permet d'étendre des résultats obtenus par J.M. Pearson (cf.[Pe]) lors de l'étude des opérateurs ultrasphériques. Notre description fournit aussi de nouvelles démonstrations simplifiant ou améliorant des résultats déjà connus comme, par exemple, les fonctions extrémales des inégalités de Sobolev sur les sphères exhibées par T. Aubin [A] ainsi que celles liées aux inégalités de Sobolev-Logarithmiques pour le modèle gaussien dues à E. Carlen [C] (voir aussi [Le1]).

Notre principale source d'inspiration a été la méthode introduite par O.S. Rothaus lors de l'étude des constantes de Sobolev-Logarithmique (cf.[Ro]), reprise pour les inégalités de Sobolev dans [Ba].

2 Modèle de référence

Nous nous plaçons dans une situation abstraite (extraite de [Ba], [B-Él] et [Le2] auquels nous renvoyons pour des discussions complètes et rigoureuses) qui recouvre, outre le cadre des variétés riemanniennes, d'autres cas très intéréssants. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sur lequel on se donne un générateur markovien de diffusion symétrique L. Nous supposerons que nous disposons d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions bornées sur Ω dans le domaine de L (au sens de $\mathbb{L}^2(\mu)$), contenant les constantes et stable par composition des fonctions de classe C^∞. On note $\langle f\rangle = \int_\Omega f d\mu$, $\langle f,g\rangle = \langle fg\rangle = \int_\Omega fgd\mu$, et, $\|f\|_p = \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}$. Sur cette algèbre $\mathcal{A}$, on définit l'opérateur bilinéaire symétrique Γ, dit opérateur carré du champ de L, par

$$\Gamma(f) = \Gamma(f,f) = \frac{1}{2}L(f^2) - fLf.$$

Se construit également l'opérateur carré du champ itéré Γ_2, à partir de la formule précédente,

$$\Gamma_2(f) = \Gamma_2(f,f) = \frac{1}{2}L\Gamma(f,f) - \Gamma(f,Lf), \quad f \in \mathcal{A}.$$

$\Gamma(f,g)$ et $\Gamma_2(f,g)$ se définissent par polarisation.

La propriété de diffusion se traduit par la formule de changement de variable suivante : pour toute fonction Ψ de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$,

$$L(\Psi(f)) = \Psi'(f)Lf + \Psi''(f)\Gamma(f).$$

Cette propriété, qui a un aspect algébrique, peut se lire aussi sur l'opérateur carré du champ Γ et l'opérateur carré du champ itéré Γ_2 (cf.[Ba]) : $\forall f \in \mathcal{A}, \quad \forall \Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\Gamma(\Psi(f), f) = \Psi'(f)\Gamma(f),$$

$$\Gamma_2(\Psi(f)) = \Psi'(f)^2\Gamma_2(f) + \Psi'(f)\Psi''(f)\Gamma(f, \Gamma(f)) + \Psi''^2(f)\Gamma^2(f).$$

Avec les notations précédentes, les formules de symétrie et de dissipativité du générateur L s'écrivent :

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \quad \langle -Lf, g\rangle = \langle f, -Lg\rangle = \langle \Gamma(f, g)\rangle. \tag{5}$$

L'opérateur Γ_2 vérifie aussi une formule d'intégration par parties

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \quad \langle \Gamma_2(f)\rangle = \langle (Lf)^2\rangle. \tag{6}$$

Plus généralement (cf.[Ba]), $\forall f \in \mathcal{A}, \quad \forall \Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \Psi(f), (Lf)^2\rangle = \langle \Psi(f), \Gamma_2(f)\rangle + \frac{3}{2}\langle \Psi'(f), \Gamma(f, \Gamma(f))\rangle + \langle \Psi''(f), \Gamma^2(f)\rangle, \tag{7}$$

$$\langle \Psi(f), Lf\Gamma(f)\rangle = \langle \Psi(f), \Gamma(f, \Gamma(f))\rangle - \langle \Psi'(f), \Gamma^2(f)\rangle. \tag{8}$$

Notre dernière hypothèse, qui est peut être la plus intéressante, est de nature géométrique. Nous supposerons que le générateur L satisfait une inégalité de courbure-dimension $CD(\rho, n)$ de courbure $\rho > 0$ et de dimension $n \geq 1$. C'est-à-dire, pour toute $f \in \mathcal{A}$,

$$\Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f) + \frac{1}{n}(Lf)^2. \tag{9}$$

Dans le cas où $0 < n < 1$, L satisfait l'inégalité renversée :

$$\Gamma_2(f) \leq -\rho\Gamma(f) + \frac{1}{n}(Lf)^2. \tag{10}$$

Pour ce qui est du cas unidimensionnel, $n = 1$, on conviendra de poser $\rho = 0$ dans (9) et l'on suppose en plus, dans ce cas, que L admet un trou dans le spectre λ strictement positif.

Soit, par exemple, L l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur une variété riemannienne compacte $\mathbb{M}$ de dimension n et de tenseur de Ricci Ric. Dans ce cas, on peut prendre pour $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ à support compact, et l'on a, $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$. L'identité de Bochner [B-G-M] indique que pour toute fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{M}$,

$$\Gamma_2(f) = \frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) = |\mathrm{Hessf}|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla \mathrm{f}, \nabla \mathrm{f}), \tag{11}$$

où $|\mathrm{Hessf}|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la hessienne de f. Comme Δf est la trace de Hessf,

$$|\mathrm{Hessf}|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2.$$

La formule (11) nous permet donc de disposer d'une inégalité de courbure-dimension de type (9). Ici, ρ est un minorant du tenseur de Ricci pris sur les vecteurs tangents unitaires. D'autres exemples seront introduits plus loin.

Revenons maintenant à notre cadre général abstrait. En intégrant par rapport à la mesure μ sur Ω l'inégalité $CD(\rho, n)$, (9) ou (10), il apparaît donc que

$$\langle \Gamma_2(f) \rangle \geq \rho_n \langle \Gamma(f) \rangle$$

où on a posé

$$\rho_n = \frac{\rho}{1 - \frac{1}{n}}. \tag{12}$$

Une telle inégalité fournit d'ores et déjà la minoration suivante

$$\lambda_1 \geq \rho_n, \tag{13}$$

où λ_1 est le trou spectral du générateur L, minoration qui correspond à celle de Lichnerowicz [B-G-M] dans le cas d'une variété riemannienne de dimension n.

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour aborder, à proprement parler, notre étude.

3 Fonctions extrémales relatives aux inéglités de Sobolev

Nos hypothèses sont celles qui viennent d'être décrites précédemment. Il a été prouvé dans [Ba] (cf.également [F1]) que L satisfait alors une inégalité de Sobolev tendue, au sens où :

- Si $n > 2$, pour tout $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right]$, $(p \neq 2)$,

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \frac{\rho_n}{p-2}\left[\|f\|_p^2 - \|f\|_2^2\right] \leq \langle \Gamma(f) \rangle. \tag{14}$$

- Dans le cas où $0 < n \leq 2$, $n \neq 1$, l'inégalité (14) est satisfaite pour tout $p \geq 1$.
- Si $n = 1$, alors, pour tout $p \geq 1$, on a une inégalité (14) qui fait intervenir en lieu et place de ρ_n, le trou spectral λ.

Si l'on remplace f par $1 + \varepsilon f$ dans l' inégalité (14), et l'on passe à la limite quand ε tend vers 0^+, nous retrouvons aisément l'inégalité de Poincaré (appelée souvent inégalité de trou spectral) :

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 \leq \frac{1}{\rho_n} \langle \Gamma(f) \rangle. \tag{15}$$

Outre les hypothèses précédentes, dans ce travail nous nous intéressons spécialement à l'étude des générateurs réalisant l'égalité dans (13) :

$$\lambda_1 = \rho_n. \tag{$\mathcal{H}$}$$

Sous cette hypothèse $(\mathcal{H})$, la constante obtenue dans l'inégalité de Sobolev (14) est optimale. Cette classe de générateurs constitue une part importante de diffusions que l'on rencontre en analyse mathématique incluant, entre autres, le Laplacien sphérique, le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck et les opérateurs associés aux polynômes ultrasphériques. En revanche, les opérateurs de Jacobi désymétriques et de Laguerre ne conviennent pas (voir [F2] et [Ma]). Géométriquement, l'hypothèse $(\mathcal{H})$ n'est pas innocente : dans le cas d'une variété riemannienne compacte $\mathbb{M}$ de dimension n et de courbure de Ricci minorée par la coubure de la sphère $\mathbb{S}^n_r$ de rayon r de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{M}$ est isométrique à la sphère $\mathbb{S}^n_r$ (théorème d'Obata [B-G-M]).

Le critère Γ_2, qui a joué un rôle déterminant dans l'établissement de l'inégalité de Sobolev (14), sera notre outil majeur pour examiner les fonctions extrémales liées à cette inégalité. Le théorème suivant est le résultat principal de cette section, il souligne en particulier l'intérêt accordé à l'exposant critique, $p = \dfrac{2n}{n-2}$ dans le cas où la dimension $n > 2$.

Théorème 3.1 - *Sous les hypothèses précédentes, notamment l'hypothèse $(\mathcal{H})$,*
i) *si $n > 2$, au dessous de l'exposant critique, $1 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, $(p \neq 2)$, seules les fonctions constantes sont extrémales dans l'inégalité de Sobolev (14). De même, si $0 < n \leq 2$, les extrémales de (14) sont constantes, pour tout réel $p > 1$.*
ii) *On suppose que $2 < n < \infty$ et $p = \dfrac{2n}{n-2}$. Si $\mathcal{S} > 0$ est extrémale pour l'inégalité de Sobolev (14) et normalisée par $\|\mathcal{S}\|_p = 1$, alors*

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}^{\frac{2}{2-n}}) = 0.$$

où $\mathcal{R} = \Gamma_2 - \rho\Gamma - \dfrac{1}{n}(L)^2$.

Preuve. - Nous reprenons les mêmes techniques de démonstration que celles du théorème 6.10 de [Ba]. Si $\mathcal{S}$ est une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev, (14), alors elle réalise le minimum de la fonctionnelle :

$$\mathcal{J}(h) = \frac{\langle \Gamma(h) \rangle - \frac{(p-2)}{\rho_n}\left(\|h\|_p^2 - \|h\|_2^2\right)}{\|h\|_p^2}.$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\mathcal{S} \geq 0$ et que $\|\mathcal{S}\|_p = 1$. Par des techniques variationnelles, on montre que $\mathcal{S}$ est solution faible de l'équation non linéaire suivante

$$\mathcal{S}^{p-2} = 1 - \frac{(p-2)}{\rho_n}\left(\frac{L\mathcal{S}}{\mathcal{S}}\right). \tag{16}$$

D'aprés le principe du maximum et les théorèmes classiques de régularité, $\mathcal{S} \in C^\infty(\Omega)$ et est partout strictement positive (voir [Ba]). Bien évidemment, si l'on multiplie l'équation (16) par $\mathcal{S}$ puis en l'intégrant, on obtient, sous la condition de normalisation, $\|\mathcal{S}\|_p = 1$, l'égalité dans l'inégalité de Sobolev (14).

• Dans un premier temps on va s'intéresser aux cas où $p \in \left]1, \frac{2n}{n-2}\right[$ quand $n > 2$, et $p > 1$ quand $0 < n \leq 2$, $(n \neq 1)$. On pose alors dans l'équation (16), $\mathcal{S} = u^{\beta}$, où β est un réel non nul que l'on déterminera par la suite. Il ressort que

$$u^{\beta(p-2)} = 1 - \frac{(p-2)\beta}{\rho_n}\left[\frac{Lu}{u} + (\beta - 1)\frac{\Gamma(u)}{u^2}\right].$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $-uLu$, on obtient, après intégration,

$$\langle -Lu, u^{\beta(p-2)+1}\rangle = \langle \Gamma(u)\rangle + \frac{(p-2)\beta}{\rho_n}\left[\langle (Lu)^2\rangle + (\beta - 1)\left\langle \Gamma(u), \frac{Lu}{u}\right\rangle\right].$$

Or, par la formule de dissipativité,

$$\langle -Lu, u^{\beta(p-2)+1}\rangle = (\beta(p-2)+1)\langle u^{\beta(p-2)}, \Gamma(u)\rangle.$$

Clairement,

$$\rho_n\langle \Gamma(u)\rangle = \langle (Lu)^2\rangle + (1+\beta(p-2))(\beta-1)\left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2}\right\rangle + \beta(p-1)\left\langle \Gamma(u), \frac{Lu}{u}\right\rangle. \quad (17)$$

D'un autre côté, comme l'établi D. Bakry dans [Ba] (p. 110, 6.38), l'inégalité (9) ou (10) jointe aux et formules du changement de variables sur Γ_2, (7) et (8), montre que pour tout réel α non nul,

$$\langle (Lu)^2\rangle - \frac{n+2}{n-1}\alpha\left\langle \Gamma(u), \frac{Lu}{u}\right\rangle + \alpha(\alpha + \frac{n}{n-1})\left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2}\right\rangle \geq \rho_n\langle \Gamma(u)\rangle. \quad (18)$$

En combinant l'égalité (17) et cette dernière inégalité (18), et en choisissant $\alpha = \left(\frac{1-n}{n+2}\right)\beta(p-1)$, il vient

$$V_1(\beta)\left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2}\right\rangle \leq 0,$$

où $V_1(\beta)$ est un polynôme du second degré en β qui vaut

$$V_1(\beta) = \left[-(n-1)^2p^2 + 3(n^2+2)p - 3(n^2+2n+3)\right]\beta^2 - 2(n+2)(p-n-3)\beta - (n+2)^2.$$

Le discriminant Δ_{V_1} de V_1 s'écrit :

$$\Delta_{V_1} = -4(n+2)^2(p-1)((n-2)p-2n).$$

Nous voyons immédiatement que $\Delta_{V_1} > 0$. En choisissant donc β de manière à avoir $V_1(\beta) > 0$ (ce qui est possible), il apparaît que

$$\Gamma(u) = 0.$$

De ceci, il découle naturellement que $\mathcal{S}$ est constante .

• Venons-en maintenant au cas où $n = 1$. En utilisant d'une part l'égalité intégrale (17) qui fait intervenir en lieu et place de ρ_n, le trou spectral λ, et d'autre part la minoration

$$\langle (Lu)^2 \rangle \geq \lambda \langle \Gamma(u) \rangle$$

qui découle immédiatement de la définition du trou spectral, on fait apparaître que

$$(1 + \beta(p-2))(\beta - 1) \left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2} \right\rangle + \beta(p-1) \left\langle \Gamma(u), \frac{Lu}{u} \right\rangle \leq 0.$$

Mais, si l'on applique l'inégalité $CD(0,1)$ à la fonction u^{-2}, on obtient, après intégration,

$$\frac{1}{3} \left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2} \right\rangle \leq \left\langle \Gamma(u), \frac{Lu}{u} \right\rangle.$$

Par conséquent, pour tout $\beta > 0$,

$$V_2(\beta) \left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2} \right\rangle \leq 0,$$

où nous avons posé, cette fois-ci,

$$V_2(\beta) = (p-2)\beta^2 + \frac{2}{3}(4-p)\beta - 1.$$

En tenant compte de l'inégalité précédente, un choix d'une constante β telle que

$$\beta > \frac{2}{3}\left(p + \sqrt{(p-1)(p+2)} - 4\right),$$

permet enfin de conclure que $\mathcal{S}$ est constante.

• Pour ce qui est du cas critique $p = \dfrac{2n}{n-2}$ lorsque $n > 2$, nous posons dans l'équation (16) $\mathcal{S} = u^{1-\frac{n}{2}}, \quad u > 0$, pour montrer alors que $\mathcal{R}(u) = 0$. Cette équation devient alors

$$n\Gamma(u) - 2uLu = \rho_n(u^2 - 1). \tag{19}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $-u^{-(2+n)}Lu$, puis intégrons, sur Ω, pa rapport à la mesure μ. On obtient

$$\langle u^{-n}, -Lu \rangle = \langle u^{2-n}, -Lu \rangle - \frac{2}{\rho_n}\langle u^{1-n}, (Lu)^2 \rangle - \frac{n}{2}\langle u^{-n}, Lu\Gamma(u) \rangle. \tag{20}$$

Par la formule de dissipativité, (5), et la propriété de diffusion,

$$\langle u^{-n}, -Lu \rangle = \langle \Gamma(u^{-n}, u) \rangle = -n\langle u^{-(1+n)}, \Gamma(u) \rangle.$$

En remplaçant dans cette dernière égalité $u^{-(1+n)}$ par sa valeur issue de (19), cela s'écrit encore

$$\langle u^{-n}, -Lu \rangle = -n\langle u^{1-n} - \frac{n}{\rho_n} u^{-(1+n)}\Gamma(u) + \frac{2}{\rho_n} u^{-n} Lu, \Gamma(u) \rangle.$$

De même
$$\langle u^{2-n}, -Lu\rangle = \langle \Gamma(u^{2-n}, u)\rangle = (2-n)\langle u^{-(1+n)}, \Gamma(u)\rangle.$$
La formule (7) indique que
$$\langle u^{1-n}, (Lu)^2\rangle = \langle u^{1-n}, \Gamma_2(u)\rangle + \frac{3}{2}(1-n)\langle u^{-n}, \Gamma(u,\Gamma(u))\rangle - n(1-n)\langle u^{-(1+n)}, \Gamma^2(u)\rangle.$$
En reportant toutes ces valeurs dans l'équation (20), on obtient, après avoir arrangé un peu les termes, et remplacé ρ_n par sa valeur donnée dans (12),
$$\langle u^{1-n}, \mathcal{R}(u)\rangle = \frac{3}{2}(n-1)\langle u^{-n}, Lu\Gamma(u) + \Gamma(u,\Gamma(u)) - \frac{n}{u}\Gamma^2(u)\rangle.$$
Ainsi, une application de l'identité (8) montre que le second membre de cette inégalité est nul. L'hypothèse $CD(\rho, n)$, (9), quant à elle permet de conclure au résultat escompté.

Cela prouve le théorème 3.1 et achève la démonstration pour toutes les situations. ■

Nous décrivons, avec cette nouvelle approche, quelques applications. Nous commençons par un exemple à l'origine de notre réflexion.

3.1 Le cas de la boule

Sur la boule unité euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / |x| < 1\}$, on considère la classe des mesures normalisées $\sigma(dx) = C_{\lambda,n}\left(1-|x|^2\right)^{\frac{\lambda-n-1}{2}} dx_1 \ldots dx_n$, où λ est un réel strictement supérieur à $n-1$, $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. On associe à ces mesures la famille des opérateurs L_λ agissant sur les fonctions de classe $C^2(\mathbb{B}_n)$, par :
$$L_\lambda f = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - x_i x_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
(δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$, si $i = j$ et 0 sinon). Lorsque λ est un entier, l'opérateur L_λ s'obtient par projection du Laplacien de la sphère $\mathbb{S}^\lambda$ sur un sous-espace de dimension $n \leq \lambda$. Les formules de symétrie et de dissipativité de l'opérateur $L^{(\lambda)}$ s'écrivent alors
$$\forall f, g \in \int_{\mathbb{B}_n} (-L_\lambda f) g d\sigma = \int_{\mathbb{B}_n} (-L_\lambda g) f d\sigma = \int_{\mathbb{B}_n} \Gamma(f,g) d\sigma, \quad f, g \in C^\infty(\mathbb{B}_n)$$
où $\Gamma(f,g) = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - x_i x_j)\frac{\partial}{\partial x_i} f \frac{\partial}{\partial x_j} g$. Ici, le carré du champ itéré est décrit par
$$\Gamma_2(f) = (\lambda - 1)\Gamma(f) + \frac{1}{\lambda}(Lf)^2 + \mathcal{R}(f),$$
avec
$$\mathcal{R}(f) = \sum_{l,k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - x_i x_j)(\delta_{lk} - x_l x_k)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - x_i x_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2.$$
Si l'on se restreint alors aux cas où $\lambda \geq n$ quand $n \geq 2$,
$$\Gamma_2(f) \geq (\lambda - 1)\Gamma(f) + \frac{1}{\lambda}(Lf)^2, \tag{21}$$

si $\lambda \geq 1$. L'inégalité est renversée lorsque $0 < \lambda < 1$. À l'aide des estimations précédentes, l'inégalité de Sobolev (14) a lieu avec la meilleure constante λ. De plus, pour tout $1 < p < \frac{2\lambda}{\lambda - 2}$, quand $\lambda > 2$ et pour tout $p > 1$, quand $0 < \lambda \leq 2$, l'égalité n'est satisfaite dans cette inégalité que pour les constantes.

Pour l'exposant optimum, $p = \frac{2\lambda}{\lambda - 2}$, $(\lambda > 2)$, l'inégalité de Sobolev énonce que, pour toute fonction f de $C^\infty(\mathbb{B}_n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{B}_n} |f|^p \, d\sigma\right)^{\frac{2}{p}} - \int_{\mathbb{B}_n} f^2 d\sigma \leq \frac{4}{\lambda(\lambda - 2)} \int_{\mathbb{B}_n} \Gamma(f) d\sigma, \tag{22}$$

Pour pouvoir déterminer les fonctions extrémales de cette inégalité intégrale, (22), le théorème 3.1 suggère d'examiner, tout d'abord, les fonctions extrémales de l'inégalité de courbure-dimension (21). Seules les polynômes de degré un dans $\mathbb{R}^n$, restreints à $\mathbb{B}_n$, qui réalisent l'égalité dans (21) (voir [Ba-Ben]). En conséquence, si $\mathcal{S}$ est une fonction extrémale (qui peut être considérée positive), alors elle est nécessairement de la forme

$$\mathcal{S}_{a,b}(x) = (a \cdot x + b)^{1 - \frac{\lambda}{2}}, x \in \mathbb{B}_n,$$

où $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$, et $a \cdot x$ est le produit scalaire euclidienne. En reportant dans l'équation non linéaire (16) (qui fait intervenir en lieu et place de L l'opérateur L_λ) cette valeur pour $\mathcal{S}_{a,b}$, on obtient

$$b^2 - |a|^2 = b^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Il nous faut donc à présent tâcher d'assouplir, avec cette contrainte, la condition de normalisation $\int_{\mathbb{B}_n} \mathcal{S}_{a,b}^{\frac{2\lambda}{\lambda-2}} d\sigma(x) = 1$. C'est l'objet du lemme qui suit :

Lemme 3.2 - *Avec les notations précédentes; si* $b^2 - |a|^2 = 1$,

$$I = \int_{\mathbb{B}_n} (a \cdot x + b)^{-\lambda} \, d\sigma(x) = 1.$$

Preuve. - La clef technique de la démonstration repose sur le changement de variable suivant. À tout point $(a, b) = (a_1, \ldots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tel que $b^2 - |a|^2 = 1$, nous associons l'application $\phi_{a,b}$ définie au point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}_n$, par $\phi_{a,b}(x) = y = (y_1, \ldots, y_n)$ où on a posé, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} + \frac{a_i a_j}{1 - b}\right) x_j + a_i}{a \cdot x - b}.$$

En utilisant la relation entre a et b, il est aisé de se convaincre successivement des propriétés suivantes :

1) $\phi_{a,b}$ est bien définie sur la boule unité $\mathbb{B}_n$: $\forall x \in \mathbb{B}_n, a \cdot x - b \neq 0$. En effet, s'il en était autrement, il existerait un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $a \cdot x_0 - b = 0$. Cependant, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on s'aperçoit immédiatement que

$$|x_0|^2 \geq \frac{(a \cdot x_0)^2}{|a|^2} = \frac{b^2}{|a|^2} = 1 + \frac{1}{|a|^2} > 1.$$

2) $\phi_{a,b}$ laisse fixe $\mathbb{B}_n$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{B}_n, |\phi_{a,b}(x)|^2 = 1 - \dfrac{1-|x|^2}{(a \cdot x - b)^2} < 1$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{B}_n, \phi_{a,b} \circ \phi_{a,b}(-x) = -x$. Notamment $\phi_{a,b}$ est une bijection de $\mathbb{B}_n$, et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{B}_n, \quad \phi_{a,b}^{-1}(x) = -\phi_{a,b}(-x)$$

où nous avons désigné par $\phi_{a,b}^{-1}$ l'application inverse de $\phi_{a,b}$.

4) La transportée $\hat{\sigma}$ sur $\mathbb{B}_n$ de la mesure de probabilité σ par l'application $\phi_{a,b}$ est absolument continue par rapport à cette mesure :

$$d\hat{\sigma}(x) = (a \cdot x + b)^{-\lambda}\, d\sigma.$$

Clairement,

$$I = \int_{\mathbb{B}_n} d\hat{\sigma} = 1.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme et donne explicitement toutes les fonctions extrémales de (22). ∎

Lorsque $n = 1$, nous retrouvons, en particulier, le résultat de J.M. Pearson [Pe]. Par la même occasion, nous dégageons, au passage, une propriété très importante liée à cette inégalité de Sobolev (22) et ses fonctions extrémales. Cela justifie, une fois de plus, l'introduction des transformations $\phi_{a,b}$.

Soit $\mathcal{S}_{a,b}$ une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev (22). Exprimée en terme de $\mathcal{S}_{a,b}$, $\hat{\sigma}$ la mesure image de σ par $\phi_{a,b}$ s'écrit

$$d\hat{\sigma} = \mathcal{S}_{a,b}^p d\sigma.$$

$\phi_{a,b}$ est une transformation conforme de $\mathbb{R}^n$ de taux $\mathcal{S}_{a,b}^{2-p}$ qui laisse fixe la boule $\mathbb{B}_n$: pour toute $\forall f \in C^\infty(\mathbb{B}_n)$,

$$\Gamma(f \circ \phi_{a,b})(x) = (a.x + b)^2\, \Gamma(f) \circ \phi_{a,b} = \mathcal{S}_{a,b}^{2-p}\Gamma(f) \circ \phi_{a,b}.$$

Avec ces considérations, et en posant $\hat{f} = f \circ \phi_{a,b}^{-1}$, l'inégalité de Sobolev (22) devient alors

$$\left(\int_{\mathbb{B}_n} \left|\hat{f}\mathcal{S}_{a,b}\right|^p d\sigma\right)^{\frac{2}{p}} - \int_{\mathbb{B}_n} \hat{f}^2 \mathcal{S}_{a,b}^p d\sigma \leq \frac{4}{\lambda(\lambda-2)} \int_{\mathbb{B}_n} \mathcal{S}^2 \Gamma(\hat{f}) d\sigma. \tag{23}$$

Posons dans cette dernière inégalité $g = \hat{f}\mathcal{S}_{a,b}$. L'équation non linéaire (16), écrite pour L_λ montre que le premier terme du membre de droite est égal à

$$\int_{\mathbb{B}_n} \hat{f}^2 (\mathcal{S}_{a,b})^p d\sigma = \int_{\mathbb{B}_n} \hat{f}^2 (\mathcal{S}_{a,b})^2 d\sigma + \frac{4}{\lambda(\lambda-2)} \int_{\mathbb{B}_n} \mathcal{S}_{a,b}^2 \Gamma(\hat{f}^2 \mathcal{S}_{a,b}, \mathcal{S}_{a,b}) d\sigma,$$

et, par la propriété de diffusion,

$$\int_{\mathbb{B}_n} S_{a,b}^2 \Gamma(\hat{f}) d\sigma = \int_{\mathbb{B}_n} \Gamma(\hat{f} S_{a,b}) d\sigma - \int_{\mathbb{B}_n} S_{a,b}^2 \Gamma(\hat{f}^2 S_{a,b}, S_{a,b}) d\sigma.$$

En reportant ces valeurs dans (23), on retrouve "miraculeusement" l'inégalité de Sobolev (22) de départ, écrite pour la nouvelle fonction $g = \mathcal{S}_{a,b} \cdot (f \circ \phi_{a,b}^{-1})$,

$$\left(\int_{\mathbb{B}_n} |g|^p \, d\sigma \right)^{\frac{2}{p}} - \int_{\mathbb{B}_n} g^2 d\sigma \leq \frac{4}{\lambda(\lambda-2)} \int_{\mathbb{B}_n} \Gamma(g) d\sigma, \tag{24}$$

p étant toujours l'exposant critique $\dfrac{2\lambda}{\lambda - 2}$. Les inégalités (22) et (24) sont donc équivalentes. En particulier, l'égalité dans l'une implique l'égalité dans l'autre (voir par exemple dans cet ordre d'idée [S]). Finalement, on obtient la

Proposition 3.3 - 1) *Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $b^2 - |a|^2 = 1$, les fonctions*

$$\mathcal{S}_{a,b}(x) = (a \cdot x + b)^{1 - \frac{\lambda}{2}}$$

sont extrémales pour l'inégalité de Sobolev (22). Inversement, si $\mathcal{S}$ est une fonction extrémale non constante pour (22), alors, à une constante multiplicative réelle près, $\mathcal{S}$ est l'une des $\mathcal{S}_{a,b}$.
2) *L'inégalité de Sobolev (22) et ses fonctions extrémales sont stables par les transformations : $f \longrightarrow \mathcal{S}_{a,b} \cdot (f \circ \phi_{a,b}^{-1})$.*

Nous revenons maintenant à l'exemple le plus célèbre :

3.2 Le cas de la sphère

L'accès à l'inégalité de Sobolev et ses solutions extrémales sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, via un passage à la limite quand λ tend vers $n-1$ dans (22), est malheureusement empêché par la limitation (sans doute artificielle) $\lambda \geq n$. Le Laplacien sphérique Δ_s vérifie l'inégalité de courbure-dimension $CD(n-1, n)$:

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{S}^n), \quad \Gamma_2(f) - (n-1) |\nabla_s f|^2 - \frac{1}{n}(\Delta_s f)^2 \geq 0. \tag{25}$$

L'inégalité de Sobolev (1) décrite dans l'introduction est donc aussi une conséquence immédiate du critère Γ_2. Pour tout $1 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, quand $n \geq 3$ et pour tout $p > 1$, quand $n = 1$ ou $n = 2$, il n'y a pas de fonctions non constantes extrémales pour cette inégalité. Intéressons-nous maintenant au cas de l'exposant critique $p = \dfrac{2n}{n-2}$ $(n > 2)$. Nous avons, pour toute fonction f de classe $C^\infty(\mathbb{S}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{S}^n} |f|^{\frac{2n}{n-2}} \, d\xi \right)^{\frac{n-2}{n}} - \int_{\mathbb{S}^n} f^2 d\xi \leq \frac{4}{n(n-2)} \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla_s f|^2 \, d\xi \tag{26}$$

où $d\xi$ est la mesure uniforme normalisée sur $\mathbb{S}^n$ et $|\nabla_s f|$ est la norme du gradient de f. Comme précédemment, puisque les solutions de l'équation $\mathcal{R} = 0$ sont les polynômes de degré un dans $\mathbb{R}^{n+1}$ restreints à $\mathbb{S}^n$ (cf.[Ba-Ben]), les solutions extrémales (positives) de (25) s'écrivent

$$\mathcal{S}(x) = (a \cdot x + b)^{1-\frac{n}{2}}, x \in \mathbb{S}^n$$

où $a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, b \in \mathbb{R}$, et où le produit scalaire prend effet dans $\mathbb{R}^{n+1}$. L'équation (16) nous contraint à prendre

$$b^2 - |a|^2 = b^2 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1.$$

Il ne nous reste plus qu'à noter, sous cette dernière contrainte, la condition de normalisation $\int_{\mathbb{S}^n} \mathcal{S}^{\frac{2n}{n-2}} d\xi = 1$. Pour ceci, nous utiliserons un résultat dû à Mueller et Weissler [M-W] : soit $z \in \mathbb{S}^n$ et h une fonction positive définie sur l'intervalle $]-1,+1[$. Si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par $g(x) = h(x \cdot z)$,

$$\int_{\mathbb{S}^n} g d\xi = \int_{-1}^{+1} h d\mu \tag{27}$$

où μ désigne la mesure ultrasphérique normalisée sur $]-1,+1[$,

$$d\mu(x) = c_n (1-y^2)^{\frac{n}{2}-1} dy.$$

Cette remarque étant faite,

$$\int_{\mathbb{S}^n} \mathcal{S}^{\frac{2n}{n-2}}(x) d\xi(x) = \int_{\mathbb{S}^n} (a \cdot x + b)^{-n} d\xi(x) = \int_{-1}^{+1} (|a|\, y + b)^{-n} d\mu(y).$$

Un changement de variable, $t = \dfrac{by + |a|}{|a|\, y + b}$, dans cette dernière intégrale donne, après quelques calculs élémentaires, l'égalité qu'on voulait démontrer. Le tout donne lieu au résultat suivant dû à T. Aubin (cf.[A]).

Corollaire 3.4- *Les extrémales pour l'inégalité de Sobolev (26) sur la sphère sont, à un facteur multiplicatif réel près, les fonctions de la forme :*

$$(a \cdot x + b)^{1-\frac{n}{2}}, x \in \mathbb{S}^n$$

où $a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *tels que :* $b^2 - |a|^2 = 1$.

Remarque - Bien que présentée ci-dessus pour la boule $\mathbb{B}_n$, la propriété d'invariance sous les transformations conformes de l'inégalité de Sobolev sur la sphère (décrites dans [A]) peut s'établir directement par le même schéma de la proposition 3.3. La même forme explicite des $\phi_{a,b}$ évoquée dans le lemme 3.2 autorise, sans trop de peine, l'adéquation à la sphère $\mathbb{S}^n$.

4 Fonctions extrémales des inégalités d'Onofri

Supposons que $0 < n \leq 2$. L'inégalité de Sobolev (14) jointe à l'inégalité de Poincaré (15) fournissent, pour tout $p > 2$,

$$\langle f^p \rangle^{\frac{2}{p}} \leq \langle f \rangle^2 + \frac{p-1}{\rho_n} \langle \Gamma(f) \rangle.$$

Si l'on substitue f à $1+(f/p)$ dans cette dernière inégalité, et l'on fait tendre p vers l'infini, on obtient alors l'inégalité suivante (qui sera dite d'Onofri [On])

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \log\langle e^f\rangle - \langle f\rangle \leq \frac{1}{2\rho_n}\langle \Gamma(f)\rangle \tag{28}$$

(quand $n = 1$, ρ_n est le trou spectral λ). Une nouvelle fois, une application de l'inégalité (28) à la fonction εf, ε étant choisi suffisamment petit, permet de retrouver l'inégalité de Poincaré (15). L'hypothèse $(\mathcal{H})$, quant à lui, assure alors l'optimalité de cette inégalité. Le propos du théorème suivant est d'examiner les fonctions extrémales pour celle-ci.

Théorème 4.5 - *Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 3.1.*
i) *Si $0 < n < 2$, les fonctions extrémales relatives à l'inégalié d'Onofri (28) sont constantes.*
ii) *Pour le cas $n = 2$, si $\mathcal{O} > 0$ est une fonction extrémale pour l'inégalité d'Onofri bi-dimensionnelle et normalisée par $\langle e^{\Theta}\rangle = 1$, alors*

$$\mathcal{R}(e^{-\frac{\mathcal{O}}{2}}) = 0$$

où nous avos posé $\mathcal{R} = \Gamma_2 - \rho\Gamma - \dfrac{1}{2}(L)^2$.

Cette observation suggère ainsi l'intêret de l'inégalité d'Onofri pour les diffusions symétriques bi-dimensionnelles.

Preuve. - Elle procède comme celle du théorème 3.1. Nous considérons, l'équation non linéaire associée à l'inégalité d'Onofri (28) :

$$L\mathcal{O} - \rho_n(1 - e^{\mathcal{O}}) = 0 \tag{29}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle e^{\mathcal{O}}\rangle & = 1 \\ \langle \mathcal{O} e^{\mathcal{O}}\rangle & = -\langle \mathcal{O}\rangle. \end{array} \right. \tag{$\mathcal{N}_\Theta$}$$

En retour, si la fonction $\mathcal{O}$ satisfait l'équation non linéaire (29), alors elle réalise, sous la condition $(\mathcal{N}_\Theta)$, l'égalité dans (28). Supposons que $0 < n < 2$, $n \neq 1$ et posons dans l'équation (29), $\mathcal{O} = \beta \log u$; $\beta \in \mathbb{R}$. Il vient, après utilisation de la formule de changement de variables,

$$\frac{Lu}{u} - \frac{\Gamma(u)}{u^2} = \frac{\rho_n}{\beta}(1 - u^\beta).$$

En multipliant cette équation par $\Gamma(u)$, nous obtenons, après intégration,

$$\rho_n\langle\Gamma(u)\rangle = \langle (Lu)^2\rangle + \beta\left\langle \Gamma(u), \frac{Lu}{u}\right\rangle - (\beta+1)\left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2}\right\rangle.$$

L'inégalité (18), écrite pour $\alpha = \left(\dfrac{1-n}{n+2}\right)\beta$, jointe à la dernière équation entraîne que pour tout réel β non nul,

$$W(\beta)\left\langle \frac{\Gamma^2(u)}{u^2}\right\rangle \geq 0,$$

où $W(\beta)$ vaut
$$W(\beta) = (n-1)^2\beta^2 + 2(n+2)\beta + (n+2)^2.$$
Choisissons β dans l'intervalle $\left]-\frac{(n+2)}{(n-1)^2}\left(\sqrt{n(2-n)}+1\right), \frac{(n+2)}{(n-1)^2}\left(\sqrt{n(2-n)}-1\right)\right[$ pour que
$$W(\beta) \leq 0.$$
Ainsi, en vertu de l'estimation précédente, $\Gamma(u) = 0$ et finalement $\mathcal{O} \equiv C^{\text{te}}$.

Le cas $n = 1$ fonctionne de manière analogue. Enfin, pour $n = 2$, si l'on pose $\mathcal{O} = \log\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$, $u > 0$, l'équation (29) s'écrit alors
$$\frac{\rho}{u^2} = \rho + \frac{Lu}{u} - \frac{\Gamma(u)}{u^2}.$$
Puis, en multipliant les deux membres de cette équation par $-Lu$, nous obtenons, après intégration, et après avoir utilisé les formules (7) et (8),
$$\langle\frac{1}{u}, \Gamma_2(u) - \rho\Gamma(f) - \frac{1}{2}(Lu)^2\rangle = \langle\frac{1}{u}, \mathcal{R}(u)\rangle = 0.$$
La conclusion s'ensuit aisément par l'hypothèse de courbure-dimension $CD(\rho, 2)$. Le théorème 4.5 est établi. ■

Nous reprenons une nouvelle fois le cadre du générateur de Gegenbauer multidimensionnel L_λ d'écrit plus haut, avec toute fois $\lambda \in]0, 2[$ (qui exige évidemment $n = 1$). Avec ces considérations qui recouvrent le cas du cercle, l'inégalité d'Onofri (28) est satisfaite avec la meilleure constante λ et les fonctions extrémales de cette inégalité sont constantes. Il nous reste à traiter le cas $\lambda = 2$ qui correspond à la dimension critique. Pour ne pas obscurir la rédaction, on suppose aussi que $n = 2$. L'inégalité d'Onofri s'écrit alors
$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{B}_2), \quad \log\int_{\mathbb{B}_2} e^f d\sigma \leq \int_{\mathbb{B}_2} f d\sigma + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(f) d\sigma. \tag{30}$$
Les transformations conformes $\phi_{a,b}$ du lemme 3.2 seront mises, une nouvelle fois, en évidence pour détecter une propriété d'invariance de l'inégalité d'Onofri bi-dimensionnelle (30). C'est ce qui exprime la

Proposition 4.6 - 1) *À un facteur additif près, les fonctions extrémales de l'inégalité d'Onofri bi-dimensionnelle (30) s'écrivent*
$$\mathcal{O}_{a,b}(x) = -2\log(a \cdot x + b), \quad x \in \mathbb{B}_2,$$
où $a \in \mathbb{R}^2$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $b^2 - |a|^2 = 1$.
2) *L'inégalité d'Onofri (30) et ses solutions extrémales sont stables par les changements $f \longrightarrow \mathcal{O}_{a,b} + (f \circ \phi_{a,b}^{-1})$.*

Bien évidemment, cet énoncé admet une version analogue pour le cas unidimensionnel ($n = 1$).

Preuve.- La stratégie est plus ou moins la même. À l'image de la preuve de la proposition 3.3, et en vertu du théorème 4.5, les extrémales de (30) sont de la forme $\mathcal{O}_{a,b} = -2\log(a \cdot x + b)$, $a \in \mathbb{R}^2$; $b \in \mathbb{R}$. L'équation (29) quant à elle exhibe la relation $b^2 - |a|^2 = 1$. Le seul point à vérifier est donc la condition $(\mathcal{N}_\Theta)$. À cet effet, on va se servir du lemme 3.2. On a

$$\int_{\mathbb{B}_2} e^{\mathcal{O}_{a,b}} d\sigma = \int_{\mathbb{B}_2} (a \cdot x + b)^{-2}\, d\sigma(x) = 1,$$

et

$$\int_{\mathbb{B}_2} \mathcal{O}_{a,b} e^{\mathcal{O}_{a,b}} d\sigma = \int_{\mathbb{B}_2} \mathcal{O}_{a,b} d\hat{\sigma} = \int_{\mathbb{B}_2} (\mathcal{O}_{a,b} \circ \phi_{a,b}) d\sigma = -\int_{\mathbb{B}_2} (\mathcal{O}_{a,b} d\sigma.$$

Nous avons noté au paragraphe précédent que, lorsque la condition $b^2 - |a|^2 = 1$ est satisfaite, la mesure image $\hat{\sigma}$ de σ sur $\mathbb{B}_2$ par l'application $\phi_{a,b}$ est absolument continue par rapport σ. Avec

$$d\hat{\sigma}(x) = (a \cdot x + b)^{-2}\, d\sigma(x).$$

Ce qui peut se réécrire, en introduisant la fonction extrémale $\mathcal{O}_{a,b}$ de (30),

$$d\hat{\sigma}(x) = e^{\mathcal{O}_{a,b}} d\sigma(x).$$

Remarquons de plus que

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{B}_2), \quad \Gamma(f \circ \phi_{a,b}) = e^{-\mathcal{O}_{a,b}} \Gamma(f) \circ \phi_{a,b}.$$

À partir de ces deux observations, on peut écrire alors l'inégalité d'Onofri (30) sous la forme suivante

$$\log \int_{\mathbb{B}_2} e^{(\mathcal{O}_{a,b} + \hat{f})} d\sigma \leq \int_{\mathbb{B}_2} \hat{f} e^{\mathcal{O}_{a,b}} d\sigma + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(\hat{f}) d\sigma$$

en ayant posé comme plus haut $\hat{f} = f \circ \phi_{a,b}^{-1}$. Soit alors $h = \hat{f} + \mathcal{O}_{a,b}$. Du fait que $\mathcal{O}_{a,b}$ est solution de l'équation (29), les deux membres de droite de cette inégalité s'écrivent successivement

$$\int_{\mathbb{B}_2} \hat{f} e^{\mathcal{O}_{a,b}} d\sigma = \int_{\mathbb{B}_2} (h - \mathcal{O}_{a,b}) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(\mathcal{O}_{a,b}, \hat{f}) d\sigma$$

et

$$\int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(\hat{f}) d\sigma = \int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(h) d\sigma - 2 \int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(\mathcal{O}_{a,b}, \hat{f}) d\sigma - \int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(\hat{f}) d\sigma.$$

Mais, puisque $\mathcal{O}_{a,b}$ satisfait aussi la condition $(\mathcal{N}_\Theta)$,

$$\int_{\mathbb{B}_2} (\mathcal{O}_{a,b}) d\sigma = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(\mathcal{O}_{a,b}) d\sigma.$$

D'où en fin du compte

$$\log \int_{\mathbb{B}_2} e^h d\sigma \leq \int_{\mathbb{B}_2} h d\sigma + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{B}_2} \Gamma(h) d\sigma. \tag{31}$$

Ce qui est bien l'inégalité (30) écrite pour la fonction $h = \mathcal{O}_{a,b} + (f \circ \phi_{a,b}^{-1})$. La proposition 4.6 est entièrement établie. ■

Remarque - Comme pour les inégalités de Sobolev, tous les résultats de la proposition 4.6 subsistent pour le cas de la sphère bi-dimensionnelle $\mathbb{S}^2$. Une fois de plus la démonstration pour ce cadre fait appel, en particulier, à la formule (27) précédemment rappelée.

Nous terminons notre étude par le cas des inégalités de Sobolev-Logarithmiques :

5 Fonctions extrémales des inégalités de Sobolev-Logarithmiques

L'inégalité de Sobolev (14) décrite plus haut contient aussi l'inégalité de Sobolev-Logarithmique. En effet, si l'on pose, pour f (fixé) de $\mathcal{A}$, $\mathcal{I}(p) = \|f\|_p^2$, l'inégalité (14) s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\mathcal{I}(p) - \mathcal{I}(2)}{p-2} \leq \frac{1}{\rho_n}\langle\Gamma(f)\rangle,$$

et, par un passage à la limite de p vers 2, on obtient alors l'inégalité de Sobolev-Logarithmique

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathrm{Ent(f)} = \langle \mathrm{f}^2 \log \mathrm{f}^2\rangle - \langle \mathrm{f}^2\rangle \log\langle \mathrm{f}^2\rangle \leq \frac{2}{\rho_{\mathrm{n}}}\langle\Gamma(\mathrm{f})\rangle \tag{32}$$

(si $n = 1$, nous remplacerons ρ_n par le trou spectral λ). Cette inégalité contient, à son tour, l'inégalité de trou spectral (15) (voir [Ba]). Vu donc l'hypothèse ($\mathcal{H}$)) faite sur ρ_n, la constante numérique $\frac{2}{\rho_n}$ du membre de droite de l'inégalité (32) ne peut être améliorée. Nous traitons ici d'une question semblable au précédentes : qu'en est-il des fonctions extrémales pour le cas des inégalités de Sobolev-Logarithmiques? C'est le but du

Théorème 5.7 - i) *Si $0 < n < \infty$, alors les extrémales liées à l'inégalité de Sobolev-Logarithmique (32) sont constantes.*
ii) *On suppose que $n = \infty$. Soit $\mathcal{L} > 0$ une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev-Logarithmique infini-dimensionnelle telle que $\|\mathcal{L}\|_2 = 1$, alors*

$$\mathcal{R}(\log \mathcal{L}) = 0$$

avec $\mathcal{R} = \Gamma_2 - \rho\Gamma$.

Ce résultat précise le rôle avantageux joué par les inégalités de Sobolev-Logarithmiques infini-dimensionnels.

Preuve. - Grossièrement, si $\mathcal{L}$ est une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev-Logarithmique (32), alors, à une normalisation près, $\|\mathcal{L}\|_2 = 1$, elle est solution de l'équation non linéaire :

$$L\mathcal{L} + \rho_n \mathcal{L} \log \mathcal{L} = 0. \tag{33}$$

Les étapes de la démonstration se copient mutatis mutandis sur celle du théorème 3.1. Dans le cas infini-dimensionnel, $n = \infty$, et après avoir posé $\mathcal{L} = e^u$, on montre aisément que

$$\langle e^{2u}, \mathcal{R}(u) \rangle = 0.$$

Nous avons laissé le soin au lecteur de suppléer tous les détails de calcul. ■

À titre d'illustration des conséquences de ce théorème nous esquissons brièvement ci-dessous quelques applications :

1) Pour le cas de la sphère $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, il n'existe pas de fonction non constante pour la quelle l'égalité soit atteinte dans l'inégalité de Sobolev-Logarithmique (2). Ce résultat est dû à M. Ledoux [Le1] qu'il a obtenu par une méthode complétement différente de celle proposée ici.

2) L'opérateur de Gegenbauer multidimensionnel L_λ ($\lambda \geq n$ quand $n \geq 2$ et $\lambda > 0$ quand $n = 1$) répond aussi à toutes les hypothèses requises dans l'énoncé i) du théorème 5.7, notamment celle concernant la dimension. Par conséquent, les fonctions extrémales relatives aux inégalités de Sobolev-Logarithmiques optimales,

$$\lambda \left[\int_{\mathbb{B}_n} f^2 \log f^2 d\sigma - \int_{\mathbb{B}_n} f^2 d\sigma \log \int_{\mathbb{B}_n} f^2 d\sigma \right] \leq 2 \int_{\mathbb{B}_n} \Gamma(f) d\sigma, \tag{34}$$

sont des constantes.

3) Le générateur L d'Ornstein-Uhlenbeck (ou d'Hermite) agit, sur les fonctions f de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$, par $L(f) = \Delta f(x) - x \cdot \nabla f(x)$, où Δ est le Laplacien usuel de $\mathbb{R}^n$. Sa mesure invariante (et symétrique) étant la mesure canonique de Gauss de densité

$$\gamma_n(dx) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-n} exp\left(- |x|^2 /2\right) dx.$$

Son carré du champ s'exprime par $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$ et nous disposons en particulier de la formule de dissipativité

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-Lf) g d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \nabla g d\gamma_n,$$

f, g suffisamment régulières sur $\mathbb{R}^n$. L'on se convainc facilement que, pour toute $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\Gamma_2(f) = \Gamma(f) + |\mathrm{Hessf}|^2 = \Gamma(f) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2.$$

L'opérateur L satisfait donc à une inégalité de courbure-dimension $CD(1,\infty)$ et nous avons, par une simple approximation,

$$\frac{1}{2-p}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\gamma\right)^{\frac{2}{p}}\right] \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \, d\gamma,$$

pour tout réel $p \in [1,2[$, et pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f et ∇f soient dans $\mathbb{L}^2(\gamma_n)$. Cette inégalité n'admet pas de fonctions extrémales non constantes (théorème 3.1). Pour $p = 2$, nous remplacerons l'inégalité précédente par l'inégalité obtenue en passant à la limite

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log f^2 d\gamma_n - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_n\right) \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_n\right) \le 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \, d\gamma_n. \tag{35}$$

C'est l'inégalité de Sobolev-Logarithmique de Gross [G] qui peut être considérée comme la version à l'infini de l'inégalité de Sobolev-Logarithmique (34) lorsque la dimension λ tend vers l'infini.

Ici, les solutions de $\mathcal{R}(f) = |\mathrm{Hessf}|^2 = 0$ sont les polynômes de premier degré dans $\mathbb{R}^n$. On déduit alors, en appliquant le théorème 5.7, que les fonctions extrémales pour (35) s'écrivent sous la forme $\mathcal{L}_{a,b} = be^{a.x}, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. On procède ensuite comme précédemment, le lien entre a et b est fourni habituellement par l'équation non linéaire (33) :

$$b = e^{|a|^2}.$$

Comme, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\alpha\cdot x} d\gamma_n = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}},$$

la condition de normalisation, $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^2_{a,b} d\gamma_n = 1$, est assurée. Nous concluons finalement, qu'à un facteur multiplicatif réel près, les fonctions $\mathcal{L}_{a,b}$, (avec $b = e^{|a|^2}$), sont les seuls extrémales pour l'inégalité (35) (voir [C] et [Le1]). Pour ce cadre simple, la mesure image $\hat{\gamma_n}$ de la mesure de Gauss γ_n par une translation d'amplitude $2a$ est absolument continue par rapport à celle-ci et l'on a :

$$\hat{\gamma_n} = \mathcal{L}^2_{a,b}\gamma_n.$$

Comme plut haut, cette identité est l'ingrédient crucial, qui joint à l'équation (33), permet de voir que l'inégalité de Sobolev-Logarithmique (35) et ses fonctions extrémales sont manifestement stables par les transformations $f \longrightarrow \mathcal{L}_{a,b} f(\cdot - 2a), a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$, et $b = e^{|a|^2}$.

Remerciements : *Une partie de cette étude est issue de questions posées par D. Bakry que nous remercions bien vivement pour son inlassable disponibilité. Nous tenons à remercier également M. Ledoux pour le grand intérêt qu'il a manifesté à l'exposition de ce travail et G. Letac pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec lui.*

Bibliographie

[A] T. Aubin, Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1982).

[Ba] D. Bakry, L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes, in P. Bernard, editor, Lecture on Probability Theory. École d'été de probabilités de Saint-Flour XXII-1992, 1-114, Lectures Notes in Math, Vol 1581, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1994).

[Ba-Ben] D. Bakry et A. Bentaleb, Extension of Böchner-Lichnerowicz formula on spheres, Priprint (2001).

[B-É1] D. Bakry et M. Émery, Diffusions hypercontractives, Séminaire de Probabilités XIX, 175-206, Lectures Notes in Math, Vol. 1123, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1985).

[B-É2] D. Bakry et M. Émery, Inégalité de Sobolev pour un semi-groupe symétrique, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t.301, 411-413, (1985).

[Be] W. Beckner, Sharp Sobolev inequalities, on the sphere $\mathbb{S}^n$ and the Moser-trudinger inequality, Ann. Math. 138, 213-242, (1993).

[B-G-M] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, Lectures Notes in Math, Vol. 194, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1971).

[C] E. Carlen, Superadditivity of Fisher information and logarithmic Sobolev inequalities, J. Funct. Anal 105, 194-211, (1991).

[F1] E. Fontenas, Sur les constantes de Sobolev des variétés Riemanniennes compactes et les fonctions extrémales des sphères, Bull. des Sciences Mathématiques, 71-96, Vol 121, (1997).

[F2] E. Fontenas, Sur les constantes de Sobolev et de Sobolev-logarithmiques pour les opérateurs de Jacobi et de Laguerre, Séminaire de Probabilités XXXII, 14-29, Lectures Notes in Math, Vol. 1686, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1998).

[G] L. Gross, logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math.,97, 1061-1083, (1975)

[I] S. Ilias, Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes, Ann. Inst. Fourier 33, Fasc. 2, 151-165, (1983).

[Le1] M. Ledoux, On an integral Criterion for hypercontractivity of Diffusion Semigroups and Extremal Functions, J. Funct. Anl 105, 444-465, (1992).

[Le2] M. Ledoux, The Geometry of Markov Diffusion Generators, Ann. Fac. Sc. Toulouse, Vol IX, 2, 305-366, (2000).

[Ma] O. Mazet, Classification des semi-groupes de Diffusion sur $\mathbb{R}^n$ associés à une famille de polynômes orthogonaux, Séminaire de Probabilités XXXI, 40-53, Lectures Notes in Math, Vol. 1655, Springer-Verlag, New-York/Berlin, (1997).

[On] E. Onofri, On the Positivity of the Effective Action in a theory of Random Surfaces, Commun. Math. Phy 86, 321-326, (1982).

[Pe] J. M. Pearson, Best Constants in Sobolev Inequalities for Ultraspherical Polynomial, Arch. Rational Mech. Anal 116, 361-374, (1991).

[Ro] O. S. Rothaus, Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compact Lie groups, J. Funct. Anal. 65, 358-367, (1986).

[S] G. Scheffer, Inégalités fonctionnelles, géométrie conforme et noyaux markoviens, Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier. Toulouse, France (2001).