Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Nathalie Eisenbaum

Corrections : « Théorèmes limites pour les temps locaux d'un processus stable symétrique »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 33 (1999), p. 417-418
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1999__33__417_0>

THEOREMES LIMITES POUR LES TEMPS LOCAUX
D'UN PROCESSUS STABLE SYMETRIQUE

Nathalie Eisenbaum

Ce rectificatif concerne le paragraphe 2) de la Section II, intitulé : <u>Passage du temps exponentiel indépendant à un temps déterministe</u>.
En effet, la preuve de ce passage s'appuie sur la Remarque (i) (Section II, 1)). Cette Remarque (i) nécessite assurément des justifications plus étendues. Aussi nous proposons l'argument suivant qui présente le double avantage de :

- prouver le passage du temps exponentiel indépendant à un temps déterministe sans utiliser la Remarque (i)
- fournir une preuve de la Remarque (i).

En premier lieu, on remarque qu'à partir du Théorème 2, on obtient facilement le corollaire suivant par un argument de convergence dominée :

<u>**Corollaire 2.1**</u> : *Pour* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *n réels distincts , on a :*

$$\left(X_T \,,\, L_T \,,\, \left(\frac{1}{\varepsilon^{(\beta-1)/2}}\left(L_T^{\varepsilon x+y_k} - L_T^{y_k}\right) \;;\; x\in\mathbb{R} \,, 1\le k\le n\right) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(X_T \,,\, L_T \,,\, \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_T^{y_k}}(x) \;;\; x\in\mathbb{R},\; 1\le k\le n \right) \right)$$

où $\{ B^{[y_k]}_u(x),\ x\in\mathbb{R},\ 1\le k\le n,\ u\ge 0 \}$ *est un système gaussien indépendant de* X *et de* T, *composé de* n *draps browniens fractionnaires d'indice* $(\beta-1)$, *tous indépendants.*

On rappelle alors que la famille des lois de

$$\left\{ \left(X_t \,,\, L_t,\, \left(\frac{1}{\varepsilon^{(\beta-1)/2}}\left(L_t^{\varepsilon x+y_k} - L_t^{y_k}\right); x\in\mathbb{R}, 1\le k\le n\right)\right)\ t\ge 0 \right\}$$

est faiblement relativement compacte. Donc pour toute suite $(\varepsilon_m)_{m>0}$ de réels strictement positifs tendant vers 0, quitte à extraire une sous-suite, on sait que :

$$\left\{ \left(X_t \,,\, L_t,\, \left(\frac{1}{\varepsilon_m^{(\beta-1)/2}}\left(L_t^{\varepsilon_m x+y_k} - L_t^{y_k}\right) \;;\; x\in\mathbb{R}, 1\le k\le n\right)\right)\ t\ge 0 \right\}$$

converge en loi

quand m tend vers l'infini vers une loi de probabilité ν. On note de façon évidente : $\nu = (\nu(t)\ ,\ t\geq 0)$.

Grâce au Corollaire 2.1, on obtient pour toute fonctionnelle continue bornée F de $(\mathbb{R},\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n))$ dans $\mathbb{R}$, et tout $\lambda>0$:

$$\int_0^{+\infty} dte^{-\lambda t}\nu(t)(F) = \int_0^{+\infty} dte^{-\lambda t}E[F\big(X_t, L_t, (\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_t^{y_k}}(x)\ ; x\in\mathbb{R}, 1\leq k\leq n)\big)].$$

On en deduit que dt-p.s. $\nu(t)$ est la loi de $(X_t, L_t, (\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_t^{y_k}}(x)\ ; x\in\mathbb{R}, 1\leq k\leq n))$. Par scaling , c'est donc vrai pour tout t>0. D'où pour tout t>0 :

$$\Big(X_t\ ,\ L_t,\ \big(\frac{1}{\varepsilon^{(\beta-1)/2}}\big(L_t^{\varepsilon x+y_k} - L_t^{y_k}\big)\ ; x\in\mathbb{R}, 1\leq k\leq n\big)\Big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \Big(X_t\ ,\ L_t\ ,\ \big(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_t^{y_k}}(x)\ ;\ x\in\mathbb{R},\ 1\leq k\leq n\ \big)\Big)$$

La Remarque (i) s'obtient alors simplement par convergence dominée.