SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
THIERRY JEULIN
FRANK B. KNIGHT
MARC YOR

Quelques calculs de compensateurs impliquant l'injectivité de certains processus croissants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 316-327
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__316_0>

Quelques calculs de compensateurs impliquant l'injectivité de certains processus croissants.

J. Azéma[1] T. Jeulin[2] F. Knight[3] M.Yor[1]

[1] Laboratoire de Probabilités - Université Paris 6 et CNRS URA 224
4 place Jussieu - Tour 56 - 3ème étage - Couloir 56-66
75272 PARIS CEDEX 05.
[2] Université Paris 7 et CNRS URA 1321 - 2 place Jussieu
Tour 45 - 5ème étage - Couloir 45-55 - 75251 PARIS CEDEX 05.
[3] University of Illinois - Department of Mathematics - 273 Altgeld Hall
1409 West Green Street - URBANA, IL 61801 - U.S.A.

1 Introduction

Soit $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles. Dans l'article [1], est introduite et étudiée la notion suivante de *processus injectif* :

un processus $\mathcal{G}$-prévisible, à variation bornée $(A_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus injectif (on dit aussi qu'il possède la propriété d'injectivité) s'il satisfait la condition suivante :

si H est un processus prévisible tel que $\int_{]0,\infty[} |H_s|\,|dA_s| < \infty$ et $\int_{]0,\infty[} H_s dA_s = 0$,

alors $\int_{]0,t]} H_s\, dA_s = 0$, pour tout $t \geq 0$.

On montre, dans le même article, que si A^L est la projection duale prévisible du processus $1_{[L,\infty[}$, où L est une fin d'ensemble $\mathcal{G}$-prévisible, alors A^L est un processus injectif.

Toutefois, il existe d'autres processus injectifs que les processus A^L ci-dessus, et une caractérisation de la propriété d'injectivité de A est donnée dans [1], en terme du support gauche et des sauts de A.

Finalement, toujours dans le même article [1], nous donnons les exemples explicites suivants de processus injectifs :

Théorème 1 *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ et $(L_t^x)_{x\in\mathbb{R},\, t\geq 0}$ la famille bicontinue des temps locaux du mouvement brownien réel. Le processus*

$$V_t = \int_{\mathbb{R}} L_t^x \, d\mu(x)$$

a la propriété d'injectivité si, et seulement si, le support de μ est d'intérieur vide.

Dans dans le paragraphe *2* du présent article, nous calculons explicitement, les processus A^L lorsque

$$L = g_\alpha^F \equiv \sup\{t < \alpha \mid X_t \in F\}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, F fermé de $\mathbb{R}$ et X mouvement brownien réel, ce qui nous fournit de nombreux exemples de processus croissants injectifs. En particulier, pour tout ensemble fini $F_n = \{x_1, .., x_n\}$, le processus $\left(\sum_{1\le j\le n} L_{t\wedge\alpha}^{x_j}\right)_{t\ge 0}$ est injectif, car équivalent, en tant que mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ à A^L où $L = g_\alpha^{F_n}$ (cela résulte aussi du théorème *1*).

Pour calculer les projections duales prévisibles mentionnées ci-dessus, nous avons besoin d'une formule d'Itô-Tanaka qui ne semble pas se trouver dans la littérature ; nous l'établissons au paragraphe *3*.

2 Derniers temps de passage du brownien [linéaire]-espace temps et propriété d'injectivité

Proposition 2 *Soit $\alpha > 0$, F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et g_α^F le dernier temps de passage du mouvement brownien X dans F avant l'instant α :*

$$g_\alpha^F = \sup\{t < \alpha \mid X_t \in F\}.$$

1) Soit ρ une variable exponentielle, de paramètre p, indépendante de $\mathcal{G}_\infty$. On note $\mathcal{G}^\rho$ la plus petite filtration contenant $\mathcal{G}$, pour laquelle ρ est un temps d'arrêt. La projection duale $\mathcal{G}^\rho$-prévisible de $1_{\{g_\rho^F>0\}}1_{[g_\rho^F,\infty[}$ est

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2p}\sum_{\substack{]h,k[\text{ composante}\\ \text{connexe de } F^c}} \tanh\left(\sqrt{2p}\frac{k-h}{2}\right)\left(L_{t\wedge\rho}^h + L_{t\wedge\rho}^k\right)\right) + p\int_0^{t\wedge\rho} 1_F(X_s)\,ds.$$

2) La projection duale prévisible de $1_{\{g_\alpha^F>0\}}1_{[g_\alpha^F,\infty[}$ est

$$A_t^{g_\alpha^F} = 1_{\{X_\alpha\in F\}}1_{\{\alpha\le t\}} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{]h,k[\text{ composante}\\ \text{connexe de } F^c}} \int_0^{t\wedge\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha-s)}}\vartheta\left(\frac{k-h}{\sqrt{\alpha-s}}\right)\left(dL_s^h + dL_s^k\right)$$

où

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{2x^2}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \exp\left(-\frac{k^2x^2}{2}\right)$$

(on pose $\vartheta(0) = 0$ et $\vartheta(\infty) = 1$).

Démonstration. 1) Soit pour $-\infty < u < v < \infty$, $J(u,v,.)$ la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}\varphi" - p\varphi = 0, \text{ avec condition frontière : } \varphi(u) = \varphi(v) = 1\ ;$$

une expression explicite de J est :

$$J(u,v,x) = \frac{\cosh\left(\sqrt{2p}\left(x - \frac{u+v}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\sqrt{2p}\frac{u-v}{2}\right)}\ ;$$

on notera aussi

$$\begin{aligned} J(-\infty, v, x) &= \exp\left(\sqrt{2p}\,(x-v)\right) && (v \in \mathbb{R}), \\ J(u, \infty, x) &= \exp\left(\sqrt{2p}\,(u-x)\right) && (u \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Soit enfin, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\delta_F(x) = \inf(y > x \mid y \in F), \ \gamma_F(x) = \sup(y < x \mid y \in F).$$

$$x \to j(x) = 1_F(x) + 1_{F^c}(x)\, J(\gamma_F(x), \delta_F(x), x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$; $\{j = 1\} = F$. j vérifie sur F^c l'équation différentielle $\frac{1}{2}j" - pj = 0$. Pour $]u, v[$ composante connexe de F^c, j a une dérivée à gauche en v [resp. à droite en u] donnée par

$$\begin{aligned} &j'(v-) = -j'(u+) = \sqrt{2p}\tanh\left(\sqrt{2p}\tfrac{u-v}{2}\right) && (-\infty < u < v < \infty) \\ &j'(-\infty) = 0, \ -j'(v-) = \sqrt{2p} && (-\infty = u < v < \infty) \\ &j'(v-) = j'(u+) = -\sqrt{2p}, \ j'(\infty-) = 0 && (-\infty < u < v = \infty) \end{aligned}$$

on en déduit que j est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ (en un point $c \in F$, non isolé à droite [resp. à gauche] dans F, $j'(c+) = 0$ (resp. $j'(c-) = 0$) et que pour $x < y$

$$\begin{aligned} j'(y+) - j'(x+) = 2p \int_x^y (j 1_{F^c})(s)\, ds \\ - \sum_{\substack{]h,k[\text{ composante} \\ \text{connexe de } F^c}} \sqrt{2p}\tanh\left(\sqrt{2p}\tfrac{k-h}{2}\right)\left(1_{\{x<h\le y\}} + 1_{\{x<k\le y\}}\right) \ ; \end{aligned}$$

ainsi,

$$j(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{2p}|x-y|}\, d\mu_{p,F}(y)$$

$$\text{où} \quad \mu_{p,F} = \sqrt{2p} \sum_{\substack{]h,k[\text{ composante} \\ \text{connexe de } F^c}} \tanh\left(\sqrt{2p}\tfrac{k-h}{2}\right)\left(\tfrac{\delta_h + \delta_k}{2}\right) + p 1_F.\lambda$$

est la mesure d'équilibre du fermé F pour le mouvement brownien tué à temps exponentiel [indépendant] de paramètre p (λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; $\tanh(\infty) = 1$).

$\left(1_{\{\rho \le t\}} - p \inf(t, \rho)\right)$ est une $\mathcal{G}^\rho$-martingale et X est un $\mathcal{G}^\rho$-mouvement brownien. Par suite, pour U $\mathcal{G}^\rho$-temps d'arrêt,

$$\mathbb{P}\left[U < g_\rho^F\right] = \mathbb{P}[U < \rho, \ X_U \in F] + \mathbb{P}[U' < \rho, \ X_U \in F^c]$$

où $U' = \inf\{t > U \mid X_t \in F\}$;

$$j(X_{t \wedge U'})\, 1_{\{X_U \in F^c, \ U \le t \wedge U' < \rho\}}$$

étant une $\mathcal{G}^\rho$-martingale de variable terminale $1_{\{X_U \in F^c, \ U' < \rho\}}$,

$$\mathbb{P}[U' < \rho, \ X_U \in F^c] = \mathbb{E}[j(X_U) \ ; \ X_U \in F^c, \ U < \rho].$$

La projection $\mathcal{G}^\rho$-optionnelle de $1_{[0,g^F_\rho[}$ est donc

$$Z^{g^F_\rho}_t = 1_{\{t<\rho\}} j(X_t) = j(X_{t\wedge\rho}) - 1_{\{\rho\le t\}} j(X_\rho).$$

D'après la formule d'Itô-Tanaka, sa partie martingale est

$$-1_{\{\rho\le t\}} j(X_\rho) + p\int_0^{t\wedge\rho} j(X_s)\,ds + \int_0^{t\wedge\rho} j'(X_s)\,dX_s,$$

sa partie à variation finie $\mathcal{G}^\rho$-prévisible est

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2p}\sum_{\substack{]h,k[\text{ composante}\\ \text{connexe de } F^c}} \tanh\left(\sqrt{2p}\frac{k-h}{2}\right)\left(L^h_{t\wedge\rho}+L^k_{t\wedge\rho}\right)\right) + p\int_0^{t\wedge\rho} 1_F(X_s)\,ds.$$

2) Il est bien connu que pour $z\in\mathbb{R}$

$$\tanh z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z}{z^2+(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}},$$

ce qui permet d'écrire pour $\tau>0$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2p}\tanh\left(\sqrt{2p}\tfrac{\tau}{2}\right) &= \tfrac{p}{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{2}{p+(2n+1)^2\frac{\pi^2}{2\tau^2}} \\
&= \tfrac{2p}{\tau}\int_0^\infty e^{-p\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\tfrac{(2n+1)^2\pi^2\alpha}{2\tau^2}\right)d\alpha \\
&= 2p\int_0^\infty e^{-p\alpha}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\vartheta\left(\tfrac{\tau}{\sqrt{\alpha}}\right)d\alpha
\end{aligned}$$

(*nota bene* : cette formule est vraie aussi pour $\tau=\infty$) .

Pour K processus prévisible, positif, borné, on a d'une part

$$\int_0^\infty e^{-ps}\mathbb{E}\left[K_s\,;\,X_s\in F\right]ds = \mathbb{E}\left[\int_0^\rho K_s 1_F(X_s)\,ds\right]$$

et, d'autre part, pour tout $\tau\in\overline{\mathbb{R}}^*_+$ et $h\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&p\int_0^\infty e^{-p\alpha}\mathbb{E}\left[\int_0^\alpha \tfrac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha-s)}}\vartheta\left(\tfrac{\tau}{\sqrt{\alpha-s}}\right)K_s\,dL^h_s\right]d\alpha \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty\left(p\int_s^\infty e^{-p\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha-s)}}\vartheta\left(\tfrac{\tau}{\sqrt{\alpha-s}}\right)d\alpha\right)K_s\,dL^h_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-ps}K_s\,dL^h_s\right]\left(p\int_0^\infty e^{-p\alpha}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\vartheta\left(\tfrac{\tau}{\sqrt{\alpha}}\right)d\alpha\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{2p}\tanh\left(\sqrt{2p}\tfrac{\tau}{2}\right)\,\mathbb{E}\left[\int_0^\rho K_s\,dL^h_s\right]
\end{aligned}$$

Par sommation, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[K_{g^F_\rho}\right] = p\int_0^\infty e^{-p\alpha}\mathbb{E}\left[K_{g^F_\alpha}\right]d\alpha = p\int_0^\infty e^{-p\alpha}\mathbb{E}\left[\int_{]0,\alpha]} K_s\,dA^{g^F_\alpha}_s\right]d\alpha$$

ce qui permet d'obtenir *2*) par inversion de transformation de Laplace.

3) Nous donnons également une démonstration directe de *2*), utilisant une formule d'Itô-Tanaka adéquate.

Notons, pour $t > 0$ et $-\infty < a \leq 0 < b \leq \infty$, $\Phi(a,b,t)$ la probabilité que X quitte l'intervalle $]a,b[$ avant l'instant t ; soit enfin, pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$\Psi_F(x,t) = 1_{F^c}(x)\,\Phi(\gamma_F(x) - x, \delta_F(x) - x, t) + 1_F(x).$$

Soit U un temps d'arrêt ; vu la régularité des points pour le mouvement brownien réel,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[U < g_\alpha^F\right] &= \mathbb{P}[U < \alpha,\ X_U \in F] + \mathbb{P}\left[U < g_\alpha^F,\ X_U \in F^c\right] \\ &= \mathbb{P}[U < \alpha,\ X_U \in F] + \mathbb{P}[U' < \alpha,\ X_U \in F^c]\end{aligned}$$

où $U' = \inf\{t > U \mid X_t \in F\}$; par application de la propriété de Markov au temps U,

$$\mathbb{P}\left[U < g_\alpha^F\right] = \mathbb{E}[\Psi_F(X_U, \alpha - U) ; U < \alpha] ;$$

En conséquence, la projection optionnelle $Z^{g_\alpha^F}$ de $1_{[0,g_\alpha^F[}$ est

$$Z_t^{g_\alpha^F} = 1_{\{t<\alpha\}}\Psi_F(X_t, \alpha - t) = \Psi_F\left(X_{t\wedge\alpha}, (\alpha - t)_+\right) - 1_{\{X_\alpha \in F\}}1_{\{\alpha \leq t\}}.$$

Remarquons que :

$$\begin{gathered}Z_{t-}^{g_\alpha^F} = 1_{\{t\leq\alpha\}}\Psi_F(X_t, \alpha - t) \text{ et} \\ \left\{g_\alpha^F = \alpha\right\} = \{X_\alpha \in F\},\ \left\{Z_{g_\alpha^F}^{g_\alpha^F} = 1\right\} = \{X_\alpha \notin F\}.\end{gathered}$$

La partie purement discontinue de $A^{g_\alpha^F}$ est donc bien $1_{\{X_\alpha \in F\}}1_{[\alpha,\infty[}$.

4) Pour identifier la partie continue de $A^{g_\alpha^F}$, nous nous appuierons sur le

Lemme 3 *Pour* $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$,

$$1 - \Phi(a,b,t) = \mathbb{P}\left[\inf_{s\leq t} X_s \geq a,\ \sup_{s\leq t} X_s \leq b\right].$$

Par suite, si $-\infty < a < 0 < b < \infty$,

$$\begin{aligned}\Phi(-\infty,b,t) &= b\int_0^t e^{-\frac{b^2}{2\rho}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^3}}\,d\rho \\ 1 - \Phi(a,b,t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_a^b\left(e^{-\frac{(\xi+2k(b-a))^2}{2t}} - e^{-\frac{(\xi-2b+2k(b-a))^2}{2t}}\right)d\xi.\end{aligned}$$

Ces formules se trouvent dans la plupart des traités classiques sur le mouvement brownien (voir, par exemple, [2]-*X.5* ou [3]) et s'obtiennent par intégration sur $]a,b[$ de l'égalité

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[B_t \in dx\,;\ \inf_{s\leq t} B_s \geq a,\ \sup_{s\leq t} B_s \leq b\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(e^{-\frac{(x+2k(b-a))^2}{2t}} - e^{-\frac{(x-2b+2k(b-a))^2}{2t}}\right)dx \quad (a < x < b).\end{aligned}$$

$(x,t) \in F^c \times \mathbb{R}_+^* \to \Psi_F(x,t)$ est de classe C^2 ; si $]a,b[$ est une composante connexe de F^c, on a, pour $(x,t) \in]a,b[\times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial \Psi_F}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{(b-x)^2}{2t}} & \text{si } -\infty = a < b < \infty \\ \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} & \text{si } -\infty < a < b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left(\begin{array}{c} e^{-\frac{(a-x+2kb-a)^2}{2t}} - e^{-\frac{(b-x+2k(b-a))^2}{2t}} \\ -e^{-\frac{(b+x-2a+2k(b-a))^2}{2t}} + e^{-\frac{(x-a+2k(b-a))^2}{2t}} \end{array} \right) & \\ \quad \text{si } -\infty < a < b < \infty & \end{cases}$$

en outre,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi_F}{\partial t} = 0 \text{ sur } F^c \times \mathbb{R}_+^*.$$

Si $a \in F$ est isolé à gauche dans F, $\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_F}{\partial x}(a+,t)$ existe et

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_F}{\partial x}(a+,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \vartheta\left(\frac{b-a}{\sqrt{t}}\right) ;$$

de même, si $b \in F$ est isolé à droite dans F, $\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_F}{\partial x}(b-,t)$ existe et

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_F}{\partial x}(b-,t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi t}} \vartheta\left(\frac{b-a}{\sqrt{t}}\right).$$

Comme $\vartheta(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, si $c \in F$ n'est pas isolé à droite [resp. à gauche] dans F, $\frac{\partial \Psi_F}{\partial x}(c+,t)$ $\left[\text{resp. } \frac{\partial \Psi_F}{\partial x}(c-,t)\right]$ existe et est nulle.

La généralisation de la formule d'Itô-Tanaka donnée au paragraphe suivant permet d'écrire la décomposition canonique de la semimartingale

$$(\Psi_F(X_{t\wedge\alpha}, \alpha - t))_{0 \le t \le \alpha},$$

sous la forme :

$$\begin{aligned} \Psi_F(X_{t\wedge\alpha}, \alpha - t) &= \Psi_F(0,\alpha) + \int_0^t \tfrac{\partial \Psi_F}{\partial x}(X_s, s)\, dX_s \\ &+ \sum_{\substack{]h,k[\text{ composante} \\ \text{connexe de } F^c}} \int_0^{t\wedge\alpha} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha-s)}} \vartheta\left(\tfrac{k-h}{\sqrt{\alpha-s}}\right) \left(dL_s^h + dL_s^k\right), \end{aligned}$$

ce qui donne *2*) □

3 Formule d'Itô-Tanaka pour le brownien [linéaire]-espace temps.

N'ayant pas trouvé dans la littérature de *formule d'Itô-Tanaka* à notre convenance pour le couple (X_t, t) où X est un mouvement brownien réel issu de 0, nous établissons

Proposition 4
Soit $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue vérifiant les quatre propriétés suivantes :
i) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \to H(x,t)$ est absolument continue, de dérivée [de Radon-Nikodym] $\frac{\partial H}{\partial t}(x,t)$ telle que

$$\forall A,\ t \in \mathbb{R}_+,\ \int_{[-A,A]\times[0,t]} \left|\frac{\partial H}{\partial t}(x,s)\right| dx \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty\,;$$

ii) il existe une mesure de Radon ν sur $\mathbb{R}$ et une fonction h borélienne sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ avec

$$\forall A,\ t \in \mathbb{R}_+,\ \int_{[-A,A]\times[0,t]} |h(x,s)|\, d\nu(x)\, \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty$$

et telles que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \to H(x,t)$ a pour dérivée seconde (au sens des distributions) la mesure $h(x,t)\, d\nu(x)$
$\left(\text{en particulier, } x \to H(x,t) \text{ a une dérivée à droite } \frac{\partial H}{\partial x}(x+,t)\right)$.

$$iii) \qquad \forall A,\ t \in \mathbb{R}_+,\ \int_{[-A,A]\times[0,t]} \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x+,s)\right)^2 dx \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty\,;$$

iv) pour presque tout t, $x \to h(x,t)$ est ρ-presque sûrement continue, où ρ est la partie de ν étrangère à la mesure de Lebesgue.

On a alors :

$$\begin{aligned} H(X_t,t) &= H(X_0,0) + \int_0^t \tfrac{\partial H}{\partial x}(X_s,s)\, dX_s \\ &\quad + \int_0^t \tfrac{\partial H}{\partial t}(X_s,s)\, ds + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t h(z,s)\, d_s L_s^z\right) d\nu(z)\,. \end{aligned}$$

Démonstration. Quitte à remplacer H par HK_n où K_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ avec $0 \leq K_n \leq 1$ et $K_n = 1$ sur $[-n,n] \times [0,n]$ (cela revient à localiser) on peut supposer :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \left|\tfrac{\partial H}{\partial t}(x,s)\right| dx \tfrac{ds}{\sqrt{s}} + \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |h(x,s)|\, d\nu(x)\, \tfrac{ds}{\sqrt{s}} \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x+,t)\right)^2 dx \tfrac{ds}{\sqrt{s}} < \infty \end{aligned}$$

On a alors :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\tfrac{\partial H}{\partial x}(X_s,s)\right)^2 ds\right] < \infty,$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\tfrac{\partial H}{\partial t}(X_s,s)\right| ds + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t |h(z,s)|\, d_s L_s^z\right) d\nu(z)\right] < \infty,$$

$\left(\int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}(X_s,s)\,dX_s\right)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable,

$\left(\int_0^t \frac{\partial H}{\partial t}(X_s,s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t h(z,s)\,d_sL_s^z\right)d\nu(z)\right)_{t\geq 0}$ est un processus continu, à variation finie. Il suffit en outre de montrer, pour $0<\varepsilon<t$, la formule

$$(\natural)\quad \left(\begin{aligned} H(X_t,t) = H(X_\varepsilon,\varepsilon) &+ \int_\varepsilon^t \frac{\partial H}{\partial x}(X_s,s)\,dX_s \\ &+ \int_\varepsilon^t \frac{\partial H}{\partial t}(X_s,s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_\varepsilon^t h(z,s)\,d_sL_s^z\right)d\nu(z). \end{aligned}\right.$$

Nous allons montrer ($\natural$) par régularisation de H (prolongée par 0 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-^*$).
Soit $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ de classe C^∞, à support compact, avec

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1.$$

Pour $m,\ n\in\mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = nf(nx)\,,\quad g_m(x) = mg(mx)$$
$$H_{n,m}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} H(y,s)\,f_n(x-y)\,g_m(t-s)\,dyds.$$

$H_{n,m}$ étant de classe C^∞, on peut lui appliquer la formule d'Itô "ordinaire" :

$$\begin{aligned} H_{n,m}(X_t,t) &= H_{n,m}(X_\varepsilon,\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \frac{\partial H_{n,m}}{\partial x}(X_s,s)\,dX_s \\ &\quad + \int_\varepsilon^t \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{n,m}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_{n,m}}{\partial t}\right)(X_s,s)\,ds. \end{aligned}$$

$\triangleright$ $H_{n,m}(X_\varepsilon,\varepsilon) \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} H(X_\varepsilon,\varepsilon)$.

$\triangleright$ En ce qui concerne l'intégrale stochastique par rapport à X, remarquons ("intégration par parties" ou Fubini) que, pour presque tout t,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{n,m}}{\partial x}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} H(y,s)\,f_n'(x-y)\,g_m(t-s)\,dy\,ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial H}{\partial x}(y,s)\,f_n(x-y)\,g_m(t-s)\,dy\,ds \end{aligned}$$

et que (résultats classiques sur les approximations de l'unité) :

$$\frac{\partial H_{n,m}}{\partial x} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial H}{\partial x} \text{ dans } L^2\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Comme

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{\varepsilon\leq r\leq t}\left|\int_\varepsilon^r \tfrac{\partial H_{n,m}}{\partial x}(X_s,s)\,dX_s-\int_\varepsilon^r \tfrac{\partial H}{\partial x}(X_s,s)\,dX_s\right|^2\right]\\
&\leq 4\mathbb{E}\left[\left(\int_\varepsilon^r\left(\tfrac{\partial H_{n,m}}{\partial x}(X_s,s)-\tfrac{\partial H}{\partial x}(X_s,s)\right)^2 ds\right)\right]\\
&=4\int_{\mathbb{R}^2} dy\left(\int_\varepsilon^r \tfrac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{a^2}{2s}}\left(\tfrac{\partial H_{n,m}}{\partial x}(a,s)-\tfrac{\partial H}{\partial x}(a,s)\right)^2 ds\right)\\
&\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\left\|\frac{\partial H_{n,m}}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

il y a convergence (en probabilité, uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$) de $\int_\varepsilon^t \frac{\partial H_{n,m}}{\partial x}(X_s,s)\,dX_s$ vers $\int_\varepsilon^t \frac{\partial H}{\partial x}(X_s,s)\,dX_s$.

▷ De même, pour presque tout x,

$$\frac{\partial H_{n,m}}{\partial t}(x,t)=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial H}{\partial t}(y,s)\,f_n(x-y)\,g_m(t-s)\,dy\,ds$$

et

$$\frac{\partial H_{n,m}}{\partial t}\underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\partial H}{\partial t}\text{ dans } L^1\left(\mathbb{R}^2\right),$$

si bien que :

$$\mathbb{E}\left[\int_\varepsilon^t\left|\frac{\partial H_{n,m}}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial t}\right|(X_s,s)\,ds\right]\underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

▷ Pour le dernier terme,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_{n,m}}{\partial x^2}(x,t)&=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial H}{\partial x}(y,s)\,f_n'(x-y)\,g_m(t-s)\,dy\,ds\\
&\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial H}{\partial x}(y,t)\,f_n'(x-y)\,dy\text{ dans } L^1\left(\mathbb{R}^2\right).
\end{aligned}$$

Il reste à s'occuper de la convergence, quand $n\to\infty$, de

$$\int_\varepsilon^t\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial H}{\partial x}(y,s)\,f_n'(X_s-y)\,dy\right)ds=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_\varepsilon^t f_n(X_s-y)\,h(y,s)\,ds\right)d\nu(y).$$

Soit ν_a la partie absolument continue de ν, ϕ sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue ;

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left(\int_\varepsilon^t f_n(X_s-z)\,h(z,s)\,ds\right)d\nu_a(z)\\
&\qquad=\int_\varepsilon^t\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(X_s-z)\,h(z,s)\,\phi(z)\,dz\right)ds\ ;
\end{aligned}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$, tout $s > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(y-z)\, h(z,s)\, \phi(z)\, dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(y,s)\, \phi(y) \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{et}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_\varepsilon^t \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(X_s - z)\, h(z,s)\, \phi(z)\, dz - h(X_s,s)\, \phi(X_s)\right| ds\right]$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}\times[\varepsilon,t]} \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(y-z)\, h(z,s)\, \phi(z)\, dz - h(y,s)\, \phi(y)\right| dy\, ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A l'aide de la continuité de $(L_t^x)_{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, la suite des mesures

$$\left(A \in \mathcal{R}_+ \to \int_A f_n(X_s - z)\, ds\right)_{n\geq 1}$$

converge (presque sûrement) étroitement vers la mesure

$$A \in \mathcal{R}_+ \to \int_A d_s L_s^z.$$

Vu la condition *iv*), pour ρ-presque tout z,

$$\int_\varepsilon^t f_n(X_s - z)\, h(z,s)\, ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\varepsilon^t h(z,s)\, dL_s^z \text{ et}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_\varepsilon^t f_n(X_s - z)\, h(z,s)\, ds\right) d\rho(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_\varepsilon^t h(z,s)\, d_s L_s^z\right) d\rho(z).$$

On peut en effet se limiter au cas où h est positif, auquel cas (lemme de Scheffé) il suffit de vérifier :

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_\varepsilon^t f_n(X_s - z)\, h(z,s)\, ds\right) d\rho(z)\right]$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_\varepsilon^t h(z,s)\, d_s L_s^z\right) d\rho(z)\right].$$

Or

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_\varepsilon^t f_n(X_s - z)\, h(z,s)\, ds\right) d\rho(z)\right]$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2\times[\varepsilon,t]} f_n(y-z)\, h(z,s)\, e^{-\frac{y^2}{2s}}\, dy\, d\rho(z)\, \tfrac{ds}{\sqrt{2\pi s}}$$
$$= \int_{\mathbb{R}\times[\varepsilon,t]} h(z,s) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-\frac{(z+\frac{y}{n})^2}{2s}}\, dy\right) d\rho(z)\, \tfrac{ds}{\sqrt{2\pi s}}$$
$$\underset{\text{Lebesgue}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \int_{\mathbb{R}\times[\varepsilon,t]} h(z,s)\, e^{-\frac{z^2}{2s}}\, d\rho(z)\, \tfrac{ds}{\sqrt{2\pi s}}$$

tandis que

$$\mathbb{E}[L_t^z] = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{z^2}{2s}\right) ds$$

est dérivable par rapport à t et $\sqrt{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{E}[L_t^z]\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{z^2}{2t}}$.

Remarque 5

Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et Ψ_F la fonction introduite dans la démonstration de la proposition *2* ;

$$(x,t) \to \Psi_F(x,\alpha-t) = 1_F(x) + 1_{F^c}(x)\,\Phi(\gamma_F(x)-x,\delta_F(x)-x,\alpha-t)$$

vérifie (sur $\mathbb{R}\times[0,\alpha[$) les hypothèses de la proposition *4*. En effet :

▷ si $]-\infty,b[$ $(b<\infty)$ est une composante connexe de F^c, on a, pour $x<b$,

$$\Psi_F(x,t) = (b-x)\int_0^t e^{-\frac{(b-x)^2}{2u}}\frac{du}{\sqrt{2\pi u^3}} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_{\frac{b-x}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv\ ;$$

$$\frac{\partial\Psi_F}{\partial x}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{(b-x)^2}{2t}},\quad \left|\frac{\partial\Psi_F}{\partial x}(x,t)\right| \le \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\ ;$$

$$\frac{\partial^2\Psi_F}{\partial x^2}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}(b-x)\,e^{-\frac{(b-x)^2}{2t}},\quad \left|\frac{\partial^2\Psi_F}{\partial x^2}(x,t)\right| \le \sqrt{\frac{2}{e\pi t}}\ ;$$

▷ si $]a,b[$ $(-\infty<a<b<\infty)$ est une composante connexe de F^c, soit

$$\ell = b-a \text{ et } L = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[2k\ell,(2k+1)\ell]\ ;$$

on a, pour $x\in\,]a,b[$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi_F}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\int_{x-a+L}\frac{u}{t}e^{-\frac{u^2}{2t}}\,du + \int_{-(x-a)+L}\frac{u}{t}e^{-\frac{u^2}{2t}}\,du\right),\\
\left|\frac{\partial\Psi_F}{\partial x}(x,t)\right| &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\left(1_{\{u-x+a\in L\}} + 1_{\{u+x-a\in L\}}\right)\frac{|u|}{t}e^{-\frac{u^2}{2t}}\,du\\
&\le \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\frac{|u|}{t}e^{-\frac{u^2}{2t}}\,du = 2\sqrt{\frac{2}{\pi t}}.
\end{aligned}$$

On montre de même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Psi_F}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_{\mathbf{R}}\left(1_{\{u-x+a\in L\}} + 1_{\{u+x-a\in L\}}\right)\left(1-\frac{u^2}{t}\right)e^{-\frac{u^2}{2t}}\,du\\
\left|\frac{\partial^2\Psi_F}{\partial x^2}(x,t)\right| &\le \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}\int_{\mathbf{R}}\left|1-\frac{u^2}{t}\right|e^{-\frac{u^2}{2t}}\,du \le \frac{4}{t}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial\Psi_F}{\partial t}(x,t) = 1_{F^c}(x)\,\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi_F}{\partial x^2}(x,t).$$

En outre, pour $t>0$, $x\to\Psi_F(x,t)$ a pour dérivée seconde, au sens des distributions,

$$\begin{aligned}
&1_{F^c}\frac{\partial^2\Psi_F}{\partial x^2}(.,t)\cdot\lambda + \sum_{\substack{]h,k[\text{ composante}\\ \text{connexe de } F^c}}\left(\frac{\partial\Psi_F}{\partial x}(h+,t) - \frac{\partial\Psi_F}{\partial x}(k-,t)\right)(\delta_h+\delta_k)\\
&= 1_{F^c}\tfrac{\partial^2\Psi_F}{\partial x^2}(.,t)\cdot\lambda + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{\substack{]h,k[\text{ composante}\\ \text{connexe de } F^c}}\vartheta\left(\tfrac{k-h}{\sqrt{t}}\right)(\delta_h+\delta_k)\ ;
\end{aligned}$$

enfin, ϑ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, si $M = \sup_{x>0} \frac{\vartheta(x)}{x}$, on a pour tout $A > 0$:

$$\sum_{\substack{]h,k[\text{ composante connexe de } F^c, \\ h \text{ ou } k \in]-A,A[}} \vartheta\left(\frac{k-h}{\sqrt{t}}\right) \leq 2 + \frac{M}{\sqrt{t}} \lambda\,[F^c \cap]-A,A[] \ \square$$

Bibliographie.

[1] AZEMA J., JEULIN T., KNIGHT F., MOKOBODZKI G., YOR M. Sur les processus croissants de type injectif. Séminaire de Probabilités XXX, 312-343, Lect. Notes in Math 1626, Springer 1996.

[2] FELLER W. : An Introduction to Probability Theory and its applications. Tome 2. Wiley 1971.

[3] FREEDMAN D. : Brownian Motion and Diffusion. Holden Day, 1971.