JEAN-MARC AZAÏS
MARIO WSCHEBOR

Oscillation presque sûre de martingales continues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 69-76
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__69_0>

Oscillation presque sûre de martingales continues

Jean-Marc Azaïs.
Laboratoire de Statistique et Probabilités
UMR-CNRS C55830, Université Paul Sabatier
Toulouse France.

Mario Wschebor.
Centro de Matemática, Facultad de Ciencias
Universidad de la Republica. Montevideo - Uruguay.

Nous établissons une limite presque sûre en loi pour les variations de martingales continues. Ce résultat généralise un résultat précédent de Azaïs et Wschebor qui demandait des conditions techniques sur les martingales. On en déduit une approximation presque sûre faible de la mesure d'occupation à partir du nombre de franchissements.

Mathematics Subject Classification (1991): 60F05, 60G44.

1 Introduction

Soit $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus stochastique à valeurs réelles sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. L'article [3] étudie le comportement asymptotique des variations normalisées du processus X_t. Plus précisément nous définissons :

$$Z_h(t) = \frac{X_{t+h} - X_t}{a(h)} \tag{1}$$

où $a(.)$ est une certaine fonction de normalisation. On montre dans [3] que pour plusieurs classes de processus : processus gaussiens, P.A.I. stables (voir également [6]), intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien, si l'on définit

$$\mu_h(B) = \frac{1}{\lambda(I)} \lambda(\{t \in I, Z_h(t) \in B\}),$$

où I est un intervalle borné dans $\mathbb{R}$, B un borélien et λ la mesure de Lebesgue, alors il existe une normalisation $a(h)$ telle que μ_h converge faiblement vers $\mu^* \neq \delta_0$, lorsque h tends vers zéro. Ces résultats sont généralisés au cas où $Z_h(t)$ est défini par

$$Z_h(t) = \frac{h\dot{X}_h(t)}{a(h)}, \tag{2}$$

où $\dot{X}_h$ est la dérivée de X_h, $X_h = \psi_h * X$ est la régularisation de X par convolution avec une approximation de l'unité ψ_h, $\psi_h(t) = \frac{1}{h}\psi(\frac{t}{h})$, $h > 0$, ψ étant une fonction fixée. La formule (1) correspond au cas particulier $\psi = \mathbf{1}_{[-1,0]}$.

L'objet de cet article est d'étendre les résultats de [3] à toutes les martingales continues. Dans [3] on n'étudie que des martingales de la forme

$$X_t = \int_0^t b(s)dW_s,$$

où W_s est un brownien standard et l'intégrand $b(s)$ est adapté et satisfait certaines conditions de régularité. La démonstration consiste à se ramener au résultat correspondant pour le brownien. Dans le présent article on utilise des techniques différentes.

Dans le paragraphe 3 nous utilisons la convergence de μ_h pour construire une approximation de la mesure d'occupation basée sur les nombres de franchissements. Ceci permet d'étendre en un certain sens les résultats de [1] [2] [4] [5].

Dans tout ce qui suit, $M = \{M_t : t \geq 0\}$ est une martingale locale à valeurs réelles et à trajectoires continues sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$. On note $\{A_t : t \geq 0\}$ le crochet de M et on définit la décomposition de Lebesgue de A_t.

$$A_t = S_t + \int_0^t \dot{A}_s ds, \tag{3}$$

où

- S_t correspond à une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue λ
- $\dot{A} \in L^1([0,T], \lambda)$ pour chaque T positif.

ψ est une fonction à variation bornée dont le support est inclus dans $[-1,1]$, $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$. $\|\psi\|_p$ est la norme de ψ dans $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$. On note $\Psi(v)$, la variation totale de la mesure signée de distribution $\psi(-v)$ sur l'intervalle $[-1, v]$. La martingale locale M est prolongée par la valeur M_0 sur $\mathbb{R}^-$.

2 Oscillation de martingales

Sans perte de généralité, nous posons $I = [0,1]$ et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Soit $M_h = \psi_h * M$, alors presque sûrement, pour tout réel x non nul,*

$$\lambda(\{t \in I, h^{1/2}\dot{M}_h(t) \leq x\}) \xrightarrow{h \to 0} \int_0^1 P(\dot{A}_t^{1/2}\|\psi\|_2 \eta \leq x)dt,$$

η suivant une loi normale centrée réduite et indépendante de M.

Démonstration: Par un argument de localisation, on peut supposer que M et A sont bornés sur $[0, 1+\delta]$, $\delta > 0$, uniformément en ω. En remarquant que

$$\lambda(\{t \in [0,1], h^{1/2}\dot{M}_h(t) \leq x\}) - \lambda(\{t \in [0,1], h^{1/2}\dot{M}_h(t+h) \leq x\}) \longrightarrow 0, \; h \to 0,$$

on se ramène au cas où ψ est à support dans $[-1,0]$. Soit t un instant donné et C une constante positive, on définit

$$T_{t,C} = \inf\{s \;:\; s > 0\;; (A_{t+s} - A_t)/s \geq C\},$$

avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$. $T_{t,C}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $\{\mathcal{G}_s^t = \mathcal{F}_{t+s}\;; s \geq 0\}$. On définit le processus

$$X_h(t,z) = Z_{h\wedge T_{t,C}}(t,z),$$

avec

$$Z_s(t,z) = exp\left(iz\int_0^1 \psi(-v)d_v(M_{t+sv} - M_t) + \frac{1}{2}z^2\int_0^1 \psi^2(-v)d_v(A_{t+sv} - A_t)\right). \quad (4)$$

Pour chaque $t, z \in \mathbb{R}$, $s \to X_s(t,z)$ est une $\{\mathcal{G}_s^t\;;\; s \geq 0\}$ martingale, donc

$$E\{X_s(t,z)/\mathcal{F}_t\} = 1.$$

Le deuxième terme dans l'exposant de (4) s'écrit

$$-\frac{1}{2}z^2\int_0^1 (A_{t+sv} - A_t)d\psi^2(-v),$$

ce qui entraine l'inégalité

$$\begin{aligned}
|X_h(t,h^{-\frac{1}{2}}z)| &= exp\left[-\frac{1}{2}\frac{z^2}{h}\int_0^1 (A_{t+(h\wedge T_{t,C})v} - A_t)d\psi^2(-v)\right] \leq \\
&\leq exp\left[\frac{z^2}{h}(A_{t+(h\wedge T_{t,C})} - A_t)\int_0^1 \Psi(v)d\Psi(v)\right],
\end{aligned}$$

$$|X_h(t,h^{-\frac{1}{2}}z)| \leq exp\left[\frac{1}{2}z^2C(\Psi(1))^2\right].$$

De plus,

$$E\left(\left|\int_0^1 (X_h(t,h^{-1/2}z) - 1)dt\right|^2\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{|t-s|>h} E\left[(X_h(t,h^{-1/2}z) - 1)(\overline{X_h(s,h^{-1/2}z) - 1})\right]dsdt + \\
&+ \iint_{|t-s|\leq h} E\left[(X_h(t,h^{-1/2}z) - 1)(\overline{X_h(s,h^{-1/2}z) - 1})\right]dsdt.
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, si $t > s+h$ on conditionne par $\mathcal{F}_t$. La relation $E\{X_h(t,z)/\mathcal{F}_t\} = 1$ montre que l'intégrand est nul. Le second terme est borné par $(cte)h$.

Le lemme de Borel-Cantelli implique que si $h_n = n^{-a}, a > 1$, on a presque sûrement

$$\int_0^1 (X_{h_n}(t,h_n^{-1/2}z) - 1)dt \to 0\;,\; (n \to +\infty).$$

On obtient le même résultat si l'on remplace $[0,1]$ par un intervalle d'intégration $J \subset [0,1]$ fixé. Par un argument de densité, $X_h(t,h^{-1/2}z)$ étant borné par $exp\left[\frac{1}{2}z^2C(\Psi(1))^2\right]$, on obtient que presque sûrement

$$\forall J \subset [0,1] \;\int_J (X_{h_n}(t,h_n^{-1/2}z) - 1)dt \to 0\;,\; (n \to +\infty).$$

On en déduit que presque sûrement pour toute fonction $g(.) \in L^1([0,1],\lambda)$, on a

$$\int_0^1 g(t)(X_{h_n}(t, h_n^{-1/2}z) - 1)dt \longrightarrow 0 \ , \ n \to +\infty. \tag{5}$$

Maintenant nous introduisons les notations

$$\phi_{n,z,C}(t) = exp\left[\frac{1}{2}z^2 \int_0^1 \frac{A_{t+(h_n \wedge T_{t,C})v} - A_t}{h_n} d\psi^2(-v)\right]$$

$$\phi_{z,C}(t) = exp\left[-\frac{1}{2}z^2 \dot{A}_t \|\psi\|_2^2\right] \mathbf{1}_{\{T_{t,C}>0\}} + \mathbf{1}_{\{T_{t,C}=0\}}.$$

Remarquons que la dernière fonction n'est définie que pour presque tout t. Nous utilisons la representation suivante :

$$h\dot{M}_h(t) = \int_0^1 \psi(-v)d_v(M_{t+hv} - M_t).$$

Nous allons d'abord prouver que la convergence dans l'énoncé du théorème a lieu sur la suite $\{h_n\}$. Soit

$$F_h(z) = \int_0^1 exp(izh^{1/2}\dot{M}_h(t))dt \ , \ z \in \mathbb{R},$$

la transformée de Fourier de la fonction $t \longrightarrow h^{1/2}\dot{M}_h(t)$ définie dans l'espace mesuré (I,λ). On a :

$$\left|F_{h_n}(z) - \int_0^1 \phi_{n,z,C}(t)X_{h_n}(t, h_n^{-1/2}z)dt\right| \le 2\lambda(\{t \in I, \ T_{t,C} = 0\}) +$$

$$+\left|\int_{\{t\in I, \ T_{t,C}>0\}} \left[exp(izh_n^{1/2}\dot{M}_{h_n}(t)) - exp(izh_n^{-1/2}(h_n \wedge T_{t,C})\dot{M}_{h_n \wedge T_{t,C}}(t))\right]\right| dt.$$

Or si $T_{t,C} > 0$ et n est suffisamment grand, $h_n \wedge T_{t,C} = h_n$ et l'intégrand dans le dernier terme s'annule. Une application directe du théorème de Lebesgue montre que ce dernier terme tend vers zéro, lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et par conséquent :

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \left|F_{h_n}(z) - \int_0^1 \phi_{n,z,C}(t)X_{h_n}(t, h_n^{-1/2}z)dt\right| \le 2\lambda(\{t \in I, \ T_{t,C} = 0\}). \tag{6}$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \phi_{n,z,C}(t)X_{h_n}(t, h_n^{-1/2}z)dt = \int_0^1 (\phi_{n,z,C}(t) - \phi_{z,C}(t))\, X_{h_n}(t, h_n^{-1/2}z)dt +$$

$$+\int_0^1 \phi_{z,C}(t)\left(X_{h_n}(t, h_n^{-1/2}z) - 1\right) dt + \int_0^1 \phi_{z,C}(t)dt.$$

Le premier terme tend vers zéro par le théorème de Lebesgue, le second à cause de (5). La relation (6) implique que

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \left|F_{h_n}(z) - \int_0^1 \phi_{z,C}(t)dt\right| \le 2\lambda(\{t \in I, \ T_{t,C} = 0\}). \tag{7}$$

La fonction croissante A_t étant dérivable $\lambda-$presque partout on a bien que

$$p.s \ \ \lambda(\{t \ : \ \forall C > 0, T_{t,C} = 0\}) = 0,$$

ce qui permet de déduire de (7) et de la définition de $\phi_{z,C}$ pour tout réel z on a presque sûrement

$$F_{h_n}(z) \longrightarrow \int_0^1 exp[-\frac{1}{2}z^2 \dot{A}_t \|\psi\|_2^2]dt. \tag{8}$$

Le théorème de Fubini permet de conclure que p.s. la convergence dans (8) a lieu pour $\lambda-$presque tout $z \in \mathbb{R}$. Maintenant, une modification standard du théorème de Cramér-Lévy implique que p.s., pour tout $x \neq 0$:

$$\lambda(\{t \ : \ t \in I, h_n^{1/2} \dot{M}_{h_n}(t) \leq x\}) \longrightarrow \int_0^1 P(\dot{A}_t^{1/2} \|\psi\|_2 \eta \leq x)dt, \ (n \to \infty). \tag{9}$$

La démonstration sera achevée si l'on remplace la suite $\{h_n\}$ par $h \to 0$. Soit donc $0 < h < \delta$ et $n = n(h)$ tel que $h_{n+1} \leq h < h_n$. Comme $h \simeq h_n$ quand h tend vers zéro, il suffit de montrer que presque sûrement

$$\overline{M}_n(.) = \sup_{h_{n+1} \leq h < h_n} h_n^{-1/2}(h_n \dot{M}_{h_n}(.) - h\dot{M}_h(.))$$

converge vers zéro en mesure dans l'espace $\{I, \lambda\}$. Ce qui découle à son tour de

$$p. \ s. \ \int_0^1 |\overline{M}_n(t)|^\gamma dt \to 0,$$

pour un certain $\gamma > 0$. Or nous savons qu'il existe un mouvement brownien $B = (B(t), t \geq 0)$ tel que $M_t = B(A_t)$. Soit maintenant $0 < \alpha < 1/2$; presque sûrementles trajectoires de B sont α-hölderiennes sur tout compact. Posons $\gamma = 1/\alpha$, nous avons, pour $h_{n+1} \leq h \leq h_n$:

$$\left|h_n \dot{M}_{h_n}(t) - h\dot{M}_h(t)\right| = \left|\int_0^1 [(M_{t+vh_n} - M_t) - (M_{t+vh} - M_t)](-d\psi(-v))\right| \leq$$

$$\leq C_\omega \int_0^1 (A_{t+vh_n} - A_{t+vh_{n+1}})^\alpha d\Psi(v),$$

où C_ω désigne une variable aléatoire positive presque sûrement finie. Donc,

$$\int_0^1 |\overline{M}_n(t)|^\gamma dt \leq C_\omega^\gamma h_n^{-\gamma/2} \int_0^1 dt \int_0^1 \left(A_{t+vh_n} - A_{t+vh_{n+1}}\right)^{\gamma\alpha} d\Psi(v)(\Psi(1))^{\gamma-1} =$$

$$= C'_\omega \ h_n^{-\gamma/2} \int_0^1 d\Psi(v) \int_0^1 \left(A_{t+vh_n} - A_{t+vh_{n+1}}\right) dt \leq$$

$$\leq C''_\omega \ \ h_n^{-\gamma/2}(h_n - h_{n+1}) \leq C'''_\omega n^{-(a+1)} n^{\frac{a}{2\alpha}}.$$

C'_ω, C''_ω et C'''_ω désignent également des variables aléatoires positives presque sûrement finies. Le terme de droite ci-dessus tend vers zéro si α a été choisi suffisamment proche de 1/2.

□

Corollaire 2.1 *Presque sûrement, pour tout réel x non nul,*

$$\lambda(\{t \in I, \frac{M_{t+h} - M_t}{h^{1/2}} \leq x\}) \xrightarrow{h \to 0} \int_0^1 P(\dot{A}_t^{1/2}\eta \leq x)dt,$$

η suivant une loi normale centrée réduite indépendante de M.

Démonstration: Appliquer le théorème 2.1 avec $\psi = \mathbf{1}_{[-1,0]}$.

3 Approximation de la mesure d'occupation

Lemme 3.1 *Avec les notations précédentes, soit* $1 < \beta < 2$ *et* $\delta > 0$*, alors*

$$p.s. \quad \sup_{0<|h|<\delta} \int_0^1 \left| \frac{M_{t+h} - M_t}{\sqrt{h}} \right|^\beta dt < +\infty.$$

Démonstration: Il suffit de démontrer la relation pour $h > 0$. Comme dans la démonstration du théorème 2.1 on peut supposer M et A bornés sur $[0, 1+\delta]$ uniformément en ω. Soit $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $G(x) = x^2$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $G(x) = |x|^\beta$ pour $|x| > 1$. On vérifie les inégalités suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|G(x)| \leq (cte)|x|^\beta \tag{10}$$

$$|G'(x)| \leq (cte)|x|^{\beta-1} \tag{11}$$

$$|G''(x)| \leq (cte). \tag{12}$$

Il est clair que

$$\int_0^1 \left| \frac{M_{t+h} - M_t}{\sqrt{h}} \right|^\beta dt \leq 1 + \int_0^1 G\left(\frac{M_{t+h} - M_t}{\sqrt{h}} \right) dt. \tag{13}$$

Pour chaque t, en appliquant la formule d'Ito, on obtient pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{M_{t+h} - M_t}{\sqrt{h}} \right) &= \int_0^h h^{-\frac{1}{2}} G'\left(\frac{M_{t+s} - M_t}{\sqrt{h}} \right) d_s(M_{t+s} - M_t) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^h h^{-1} G''\left(\frac{M_{t+s} - M_t}{\sqrt{h}} \right) d_s(A_{t+s} - A_t) = X_{t,h} + Y_{t,h}. \end{aligned}$$

D'une part, en vertu de (12)

$$\int_0^1 |Y_{t,h}| dt \leq (cte) \int_0^1 h^{-1}(A_{t+h} - A_t) dt \leq (cte) A_{1+\delta} \leq (cte), \tag{14}$$

si $0 < h < \delta$. D'autre part puisque $E(X_{t,h}/\mathcal{F}_t) = 0$, on a bien:

$$E(\int_0^1 X_{t,h} dt) = 0$$

et

$$E\left(\left[\int_0^1 X_{t,h} dt \right]^2 \right) = 2 \iint_{0 \leq t \leq s \leq t+h \leq 1} E(X_{t,h} X_{s,h}) ds.$$

Nous majorons l'intégrand en utilisant (11)

$$E[(X_{t,h})^2] = 1/h \; E\left[\int_0^h G'^2 \left(\frac{M_{t+h} - M_t}{\sqrt{h}} \right) d_s(A_{t+s} - A_t) \right] \leq (cte) \; h^{-\beta} E(A_{t+h} - A_t).$$

Ce qui entraîne

$$E\left(\left[\int_0^1 X_{t,h} dt \right]^2 \right) \leq (cte) h^{-\beta} \iint_{0 \leq t \leq s \leq t+h \leq 1} (E(A_{t+h} - A_t) E(A_{s+h} - A_s))^{\frac{1}{2}} ds$$

$$\leq (cte)h^{-\beta} \iint_{0\leq t\leq s\leq t+h\leq 1} E(A_{t+2h} - A_t)ds \leq (cte)h^{1-\beta}\int_0^1 E(A_{t+2h} - A_t)dt \leq (cte)h^{2-\beta},$$

si h est inférieur à $\delta/2$.

Le lemme de Borel-Cantelli implique que pour toute suite $h_n = n^{-a}$, $a(2-\beta) > 1$, presque sûrement

$$\int_0^1 X_{t,h_n} dt \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{15}$$

Les relations (13) (14) et (15) impliquent que

$$p.s. \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \left|\frac{M_{t+h_n} - M_t}{\sqrt{h_n}}\right|^\beta < +\infty.$$

Pour obtenir le résultat du lemme, il suffit d'appliquer l'argument utilisé à la fin de la démonstration du théorème 2.1.

□

Théorème 3.1 *Si I est un intervalle borné de $\mathbb{R}^+$, p.s. pour toute fonction f continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :*

$$\sqrt{\pi/2}\|\psi\|_2^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} h^{1/2} f(u) N_u^{M_h}(I)du \longrightarrow \int_I f(M_t)\dot{A}_t^{1/2}dt \ ; \ (h \to 0),$$

où $N_u^g(I)$ est le nombre de franchissements du niveau u par la fonction $g \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durant l'intervalle de temps I :

$$N_u^g(I) = \#\{t \in I, g(t) = u\}.$$

Démonstration : Sans perte de généralité nous pouvons supposer $I \subset [0,1]$ et comme précédemment, M et A bornés uniformément en ω sur $[0, 1+\delta]$, $\delta > 0$. L'identité suivante est vraie pour f continue et g de classe C^1 ([5])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)N_u^g(I)du = \int_I f[g(t)]|\dot{g}(t)|dt.$$

Posons

$$C_\psi = \sqrt{\pi/2}\|\psi\|_2^{-1}.$$

On a,

$$C_\psi \int_{\mathbb{R}} h^{\frac{1}{2}} f(u) N_u^{M_h}(I)du = C_\psi \int_I f(M_h(t))|h^{\frac{1}{2}}\dot{M}_h(t)|dt$$

$$= C_\psi \int_I f(M_t)|h^{\frac{1}{2}}\dot{M}_h(t)|dt + C_\psi \int_I [f(M_h(t)) - f(M_t)]|h^{\frac{1}{2}}\dot{M}_h(t)|dt. \tag{16}$$

Soit $1 < \beta < 2$, alors,

$$p.s. \quad \sup_{0<h<\delta} \int_0^1 \left|h^{\frac{1}{2}}\dot{M}_h(t)\right|^\beta dt < +\infty. \tag{17}$$

En effet :

$$\int_0^1 \left|h^{\frac{1}{2}}\dot{M}_h(t)\right|^\beta dt = \int_0^1 \left|\int_{-1^-}^{1^+} \frac{M_{t+hu} - M_t}{\sqrt{h}} d\psi(-u)\right|^\beta dt$$

$$\leq (cte)\int_{-1^-}^{1^+} d\Psi(u)\int_0^1 \left|\frac{M_{t+hu}-M_t}{\sqrt{h}}\right|^\beta dt \leq C_\omega \int_{-1^-}^{1^+} |u|^{\beta/2} d\Psi(u),$$

en utilisant le lemme 3.1 (C_ω est une certaine constante aléatoire). Ceci prouve (17). Il s'ensuit que p.s. le second terme dans (16) tend vers zéro , puisque $\int_I |h^{1/2}\dot{M}_h(t)|dt$ est borné et que $f(M_h(t)) - f(M_t)$ tend vers zéro uniformément sur $t \in I$ lorsque $h \to 0$.

En ce qui concerne le premier terme dans (16), la relation (17) implique que p.s. l'ensemble des fonctions $\{h^{1/2}\dot{M}_h(.)\ ; 0 < h < \delta\}$ est uniformément intégrable sur $([0,1],\lambda)$. Pour chaque intervalle $J \subset [0,1]$ le théorème 2.1 appliqué à l'intervalle J au lieu de $[0,1]$ entraîne que p.s.

$$\int_J |h^{1/2}\dot{M}_h(t)|dt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x|F_J(dx) = (2/\pi)^{1/2}\|\psi\|_2 \int_J \dot{A}_t^{1/2}dt,\ (h \to 0), \tag{18}$$

où

$$F_J(x) = \int_J P(\dot{A}_t^{1/2}\|\psi\|_2\ \eta \leq x)dt.$$

Par un argument de monotonie, p.s. la convergence dans (18) a lieu simultanément pour tout intervalle $J \subset [0,1]$. On en déduit que p.s.

$$\int_I g(t)|h^{1/2}\dot{M}_h(t)|dt \longrightarrow C_\psi^{-1}\int_I g(t)\dot{A}_t^{1/2}dt,\ (h \to 0),$$

simultanément pour toutes les fonctions g qui sont des combinaisons linéaires d'indicatrices d'intervalles, donc pour toutes les fonctions continues. En posant $g(t) = f(M_t)$ on a bien le théorème.

□

4 Bibliographie

[1]Azaïs, J-M. (1989). "Approximation des trajectoires et temps local des diffusions". Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.25,2,175-194.
[2]Azaïs , J-M. (1990). "Conditions for convergence of number of crossings to the local time. Application to stable processes with independent increments and to Gaussian processes". Prob. and Math. Statistics, Vol.11,1,19-36.
[3] Azaïs J-M. & Wschebor M., (1996). "Almost Sure Oscillation of Certain Random Processes". A paraître dans Bernoulli.
[4] Berzin, C. & Wschebor,M. (1993). "Approximation du temps local des surfaces gaussiennes". Probab. Theory Relat. Fields",96,1-32.
[5] Nualart, D. & Wschebor, M. (1991). "Integration par parties dans l'espace de Wiener et approximation du temps local". Probab. Th. Rel. Fields,90,83-109.
[6] Wschebor, M. (1995). "Almost sure weak convergence of the increments of Lévy processes". Stochastic Processes and their Applications,55,253-270.