SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MADALINA DEACONU
SOPHIE WANTZ

Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 168-175
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__168_0>

Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante

Mădălina DEACONU, Sophie WANTZ

INRIA-Institut Elie Cartan
Université Henri Poincaré , B.P 239
54506 Vandoeuvre-les-Nancy

Résumé - Soit $y \in \mathbb{R}$ et $(X_t^y; t \geq 0)$ la solution de l'EDS unidimensionelle : $X_t^y = y + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t u(X_s^y)ds$, où la dérive $-u$ est "fortement rentrante" (cf. H_1 et H_2 ci-dessous). Nous étudions le comportement asymptotique de $E(exp\ \alpha T_x^y)$, lorsque $y \to \infty$ avec $\alpha \geq 0$, $y \geq x \geq 0$ et $T_x^y = \inf\{t \geq 0; X_t^y = x\}$.

1. Introduction

Soit $(X_t^y; t \geq 0)$ la solution de l'EDS unidimensionelle

$$X_t^y = y + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t u(X_s^y)\,ds \tag{E}$$

où $(B_t; t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire issu de zéro. En fait, nous ne nous intéressons au processus $(X_t^y; t \geq 0)$ que lorsqu'il séjourne dans $\mathbb{R}_+$, si bien que les hypothèses suivantes ne portent que sur les valeurs prises par u sur $\mathbb{R}_+$:

(H_1) • $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est de classe C^2, u et u' tendent vers l'infini à l'infini, u'' et $\frac{u'^2}{u}$ sont des $o(u)$ à l'infini et $u'' \leq 2\frac{u'^2}{u}$ en dehors d'un compact .

(H_2) • $\int_.^{+\infty} \frac{1}{u} < +\infty$

Un exemple simple d'une telle fonction est $u(x) = x^\gamma$ avec $\gamma > 1$.

Quitte à modifier u sur $\mathbb{R}_-$ pour obtenir le caractère localement lipschitzien et rentrant de $-u$, l'équation (E) possède une unique solution forte. Soit : $T_x^y = \inf\{t \geq 0; X_t^y = x\}$. Notre résultat est :

Théorème 1.1 . — *Il existe un compact K de $\mathbb{R}_+$ et deux constantes $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tels que pour tout $x \notin K$, $x \geq 0$:*

i) Pour tout $\alpha > 0$, tel que $u(x) \geq C_2\alpha^{\frac{1}{2}}$, on a : $\forall\, y \geq x$, $E(exp\ \alpha T_x^y) < \infty$.
De plus : $\sup_{y \geq x} E(exp\ \alpha T_x^y) < \infty$ et $\lim_{y \to \infty} E(exp\ \alpha T_x^y)$ existe .

ii) Pour tout $\alpha > 0$, tel que $u(x) \leq C_1\alpha^{\frac{1}{2}}$, on a : $\forall\, y \geq x$, $E(exp\ \alpha T_x^y) = \infty$.

iii) Pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$1 \geq \limsup_{y \to \infty} E(exp\ -\alpha T_x^y) = \liminf_{y \to \infty} E(exp\ -\alpha T_x^y) = k(\alpha, x) > 0 .$$

C_2 (resp. C_1) peut être choisie arbitrairement proche et plus grande que $2\sqrt{2}$ (resp. arbitrairement proche et plus petite que $\sqrt{2}$) .

Remarque 1.2 . — *Si X est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (c'est à dire $u(x) = k\,x$, $k > 0$), un tel résultat est faux . Bien que, pour un $\alpha > 0$ assez petit par rapport à k, on ait : $E(exp\ \alpha T_x^y) < \infty$ $(y \geq x)$, nous avons : $\sup_{y \geq x} E(exp\ \alpha T_x^y) = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \geq 0$ (cf [GNRS], p.402, formule 12). Ainsi, l'hypothèse (H_2) est-elle tout à fait essentielle à notre résultat .*

Le but de ce travail est de démontrer le Théorème 1.1 . Heuristiquement, ce résultat s'explique par le caractère fortement rentrant de $-u$.

2. Démonstration du théorème 1.1

On cherche à estimer la vitesse de retour en un point x partant de y, $y \geq x$: T_x^y . Afin de calculer $E(exp\ \alpha T_x^y)$, nous aurons besoin des fonctions propres du générateur infinitésimal de X :

$$L := \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u\frac{\partial}{\partial x}\Big).$$

On rappelle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2,

$$M_t^{y,f} := f(X_t^y)\ exp\Big(-\int_0^t \frac{Lf}{f}(X_s^y)ds\Big)\,; \quad t \geq 0, \tag{1}$$

est une martingale locale (cf [RY] p. 277) . Aussi est-il classique que l'étude de $E(exp\ \alpha T_x^y)$, pour x fixé assez grand, passe par celle des fonctions propres de L, donc des solutions de :

$$f''(z) - u(z)f'(z) = \alpha f(z) \ \ (\alpha \in \mathbb{R}, z \geq x) \tag{P_α}$$

(La constante $\frac{1}{2}$ a disparu mais elle est prise en compte dans les constantes intervenant dans notre résultat.)

Nous allons chercher des solutions de (P_α) sous la forme :

$$f_\alpha(z) = \Big(exp \int_x^z \frac{\varphi_\alpha(y)}{u(y)}dy\Big)\,\frac{exp\ \int_x^z u(y)dy}{u(z)} \tag{2}$$

Dès que φ_α est bornée, l'hypothèse (H_2) assure l'existence d'une limite finie de $\displaystyle\int_x^z \frac{\varphi_\alpha}{u}(y)dy$ quand $z \to +\infty$.

Le lemme suivant résulte de calculs élémentaires . Nous en omettons la démonstration .

Lemme 2.1 . — *f_α est solution de (P_α) si et seulement si φ_α est solution de l'équation différentielle ordinaire :*

$$S_\alpha(\varphi_\alpha, x) = \varphi'_\alpha(x) \tag{D_α}$$

avec : $$S_\alpha(g,x) = 3g\frac{u'}{u}(x) + u''(x) - \frac{2u'^2}{u}(x) - g^2\frac{1}{u}(x) + (\alpha - g)u(x)\,.$$

Afin de déterminer l'allure de la fonction φ_α qui nous renseignera sur le fonction propre f_α, résolvons l'équation $S_\alpha\ (y,x) \ = \ 0$. En la multipliant par u, on trouve une équation en y du second degré : $y^2 + y(u^2 - 3u') + 2u'^2 - u''u - \alpha u^2 \ = \ 0.$

Pour que cette équation ait des racines réelles, on doit imposer :

$$\Delta = u^4\Big(1 - 6\frac{u'}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4} + 4\frac{u''}{u^3} + 4\frac{\alpha}{u^2}\Big) \geq 0.$$

Par l'hypothèse (H_1), $\frac{u'^2}{u} = o(u)$ et $u'' = o(u)$, donc Δ se comporte comme

$$\Delta \simeq u^4\Big(1 - \varepsilon + \frac{4\alpha}{u^2}\Big).$$

On en déduit la condition suivante pour avoir des racines :

$$\begin{cases} \bullet \quad \alpha \geq 0 \textit{ et } x \textit{ assez grand} \\ ou \\ \bullet \quad \alpha < 0 \textit{ et } x \textit{ est tel que } u(x) \geq \overline{C_2}|\alpha|^{\frac{1}{2}}, \textit{ avec } \overline{C_2} > 2 \end{cases} \qquad (C)$$

Nous verrons que cette condition (C), selon qu'elle est ou non vérifiée, détermine deux classes de fonctions propres .

Désignons par Γ_α^+ (resp. $\Gamma_\alpha^-, \Gamma_\alpha^0$) le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ défini par :

$$\Gamma_\alpha^+ = \{(x,y); x \geq 0,\ S_\alpha(y,x) > 0\ (resp. < 0, = 0)\}.$$

Désignons par Δ_x la droite verticale de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ passant par $(x,\ 0)$. On a alors les faits suivants :

• $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^+$ est soit vide, soit un compact non vide . Cette dichotomie nous amènera à distinguer deux sortes de fonctions propres (voir plus loin).

• $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^0$ est, pour x assez grand, constitué de deux points : $\widetilde{\Gamma_x^0}$ et $\widetilde{\widetilde{\Gamma_x^0}}$, avec $\widetilde{\Gamma_x^0} > \widetilde{\widetilde{\Gamma_x^0}}$. $\widetilde{\Gamma_x^0}$ est la plus grande racine de l'équation $S_\alpha(y,x) = 0$. Elle est de la forme : $\widetilde{\Gamma_x^0} = \alpha - \varepsilon_\alpha(x)$ avec $\varepsilon_\alpha(x) > 0$ et $\varepsilon_\alpha(x) \to_{x\to\infty} 0$.

• Pour x assez grand, $\Gamma_\alpha^+ \cap \{(z,y); z \geq x, y \in \mathbb{R}\} =: \Gamma_\alpha^{+,x}$ est absorbant pour l'équation (D_α), i.e. : si φ est une solution de (D_α), avec $\varphi(x) = s$ et $(x,s) \in \Gamma_\alpha^{+,x}$, alors φ est définie sur $[x,\infty[$ et $(z,\varphi(z)) \in \Gamma_\alpha^{+,x}$ pour tout $z \geq x$.

Nous considérons à présent les deux cas induits par la condition (C) .

a) Plaçons nous ici dans le cas où la condition (C) est vérifiée . Cela se traduit par : $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^+ \neq \emptyset$. On a alors le résultat suivant, que nous montrerons dans le paragraphe suivant :

Théorème 2.2 . — *Dans le cas où la condition (C) est vérifiée, définissons une fonction f par (pour $z \geq x$) :*

$$f(z) := \frac{exp\int_x^z u(y)dy}{u(z)}\Big[exp\Big(\int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u}\Big) - exp\Big(\int_x^\infty \frac{\varphi_2}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_1}{u}\Big)\Big], \quad (3)$$

avec φ_1 et φ_2 deux solutions de D_α sur l'intervalle $[x,+\infty[$, telles que, pour $s > \alpha$ et $s' > \alpha$ fixés, $\varphi_1(x) = s$, $\varphi_2(x) = s'$ et $\varphi_1 \geq \varphi_2$, cf. figure 1 . Alors f est une fonction propre de L et $\lim_{t\to+\infty} f(t) > 0$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la formule de la vitesse de rappel. On note T_x^y le temps de retour en x partant de y, $x \leq y$.

THÉORÈME 2.3 . — *Lorsque* (C) *est vérifiée, on a pour tout* $y > x$:

$$E_y\big(e^{-\alpha T_x^y}\big) = \frac{f(y)}{f(x)}. \tag{4}$$

Démonstration du Théorème 2.3 :

(i) Soient $\alpha < 0$ et $u(x) \geq \overline{C_2}|\alpha|^{\frac{1}{2}}$ et soit z tel que $x < y < z$. On a, en notant $\mathbb{1}$ la fonction indicatrice :

$$f(y) = E_y\big(f(X_t)e^{|\alpha|t}\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y}\big)+f(x)E_y\big(e^{|\alpha|T_x^y}\mathbb{1}_{T_x^y<t\wedge T_z^y}\big)+f(z)E_y\big(e^{|\alpha|T_z^y}\mathbb{1}_{T_z^y<t\wedge T_x^y}\big) \tag{5}$$

en appliquant le fait que $M_t^{y,f}$ donnée par (1) est une martingale locale .
Quand $t \to \infty$, d'après le théorème de convergence monotone, on a pour les deux derniers termes de (5) :

$$\lim_{t\to\infty} f(x)E_y\big(e^{|\alpha|T_x^y}\mathbb{1}_{T_x^y<t\wedge T_z^y}\big) = f(x)E_y\big(e^{|\alpha|T_x^y}\mathbb{1}_{T_x^y<T_z^y}\big)$$
$$\lim_{t\to\infty} f(z)E_y\big(e^{|\alpha|T_z^y}\mathbb{1}_{T_z^y<t\wedge T_x^y}\big) = f(z)E_y\big(e^{|\alpha|T_z^y}\mathbb{1}_{T_z^y<T_x^y}\big).$$

Pour le premier terme du membre de droite de (5), on sait que :

$$\lim_{t\to\infty} f(X_t)e^{|\alpha|t}\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y} = 0 \qquad p.s.$$

Montrons que cette famille est équiintégrable en t. Pour cela, il suffit de voir qu'elle est bornée dans L^p, avec $p > 1$. En écrivant la relation (5) pour une fonction propre g de valeur propre $\alpha' < 0$, avec $\alpha' < \alpha$, on en déduit que :

$$g(y) \geq E_y\big(g(X_t)\,e^{|\alpha'|t}\,\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y}\big) \geq C\,E_y\big(e^{|\alpha'|t}\,\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y}\big)$$

puisque g est minorée. D'où :

$$\begin{aligned} E_y\big(f^{\frac{\alpha'}{\alpha}}(X_t)\,e^{|\alpha'|t}\,\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y}\big) &\leq C'\,E_y\big(e^{|\alpha'|t}\,\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y}\big) \\ &\leq C''\,g(y). \end{aligned}$$

Donc la famille $\big(f(X_t)\,e^{|\alpha|t}\,\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y}\big)_t$ est bornée dans $L^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$ et est donc équiintégrable. Ainsi :

$$\lim_{t\to\infty} E_y\big(f(X_t)e^{|\alpha|t}\mathbb{1}_{t<T_x^y\wedge T_z^y}\big) = 0\,.$$

Ce qui nous donne, pour $t \to \infty$ dans (5) :

$$f(y) = f(x)E_y\big(e^{|\alpha|T_x^y}\mathbb{1}_{T_x^y<T_z^y}\big)+f(z)E_y\big(e^{|\alpha|T_z^y}\mathbb{1}_{T_z^y<T_x^y}\big).$$

On fait à présent tendre z vers $+\infty$, et par la même méthode (l'équiintégrabilité), on montre que :

$$\lim_{z\to\infty} E_y\big(e^{|\alpha|T_z^y}\mathbb{1}_{T_z^y<T_x^y}\big) = 0.$$

On conclut par (4) dans le cas (i) :

$$E_y\big(e^{|\alpha|T_x^y}\big) = \frac{f(y)}{f(x)}\,.$$

(ii) Soient $\alpha > 0$ et x assez grand . Ce cas est beaucoup plus simple car $f(X_{t\wedge T_x^y}\, e^{-\alpha(t\wedge T_x^y)})$ est une martingale bornée . Il suffit donc d'appliquer le théorème d'arrêt et de faire tendre t vers $+\infty$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.3.

On a alors : $\lim\limits_{y\to+\infty} E_y(e^{-\alpha T_x^y}) = \dfrac{C(\alpha)}{f(x)}$. Les points (i) et (iii) du théorème 1.1 en découlent aisément .

Corollaire 2.4 . — *Pour tout $x \notin K$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour tout $r > 0$ et uniformément en $y \geq x$, on a :*

$$P\,(T_x^y > r) \leq C(x)\,e^{-\alpha r}\,.$$

Corollaire 2.5 . — *Pour $\alpha > 0$ et x en dehors d'un compact K et pour tout $\alpha < 0$ tel que $u(x) \geq \overline{C_2}|\alpha|^{\frac{1}{2}}$, les lois des v.a. T_x^y convergent étroitement, quand $y \to +\infty$, vers une loi de probabilité ν telle que $\int_0^\infty e^{-\alpha z}\,\nu(dz) < \infty$.*

Idée de la démonstration du Corollaire 2.5 : On se place dans le cas $\alpha > 0$ et x assez grand . Soit Q_x^y la loi de la *v.a.* T_x^y . Alors, on montre que la famille $(Q_x^y)_y$ est tendue et monotone, et on en déduit qu'il existe une loi de probabilité ν telle que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha z}\,\nu(dz) < +\infty$ et Q_x^y converge vers ν quand $y \to +\infty$. Ceci établit notre corollaire .

b) On se place à présent en dehors du domaine d'application de la condition (C), c'est-à-dire lorsque $\alpha < 0$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

Théorème 2.6 . — *Lorsque la condition (C) n'est pas vérifiée, une fonction propre de L peut être écrite sous la forme :*

$$f(z) := \Big(exp \int_{x_1}^{z} \frac{\varphi}{u}\Big)\, \frac{exp\int_{x_1}^{z} u(y)dy}{u(z)}\,, \tag{6}$$

avec x_1 tel que $u(x_1) \leq \overline{C_1}|\alpha|^{\frac{1}{2}}$, et φ telle que :

- pour $z \geq x_1$, $\varphi(z) \leq \rho|\alpha| - u^2(z) \qquad (\rho < 1)$

- pour $z \leq x_1$, $\varphi(z) \geq \frac{|\alpha|}{z-x_0}$, voir figure 2 .

Par les mêmes arguments d'équiintégrabilité que dans la démonstration du théorème 2.3, on en déduit que : $E(exp\ \alpha T_{x_0}^y) = +\infty$, avec $x_0 < C_1|\alpha|^{\frac{1}{2}}$, ce qui est le point (ii) du théorème 1.1 avec $C_1 = \sqrt{2}\,\overline{C_1}$. Notre principal résultat est donc établi .

Remarque 2.7 . — *L'hypothèse $\int^{+\infty} \frac{1}{u} < +\infty$, sous laquelle notre théorème 1.1 est vrai, est précisement celle qui assure l'ultracontractivité du semigroupe associé à X_t^y par rapport à la mesure de probabilité $\nu(dx) = Ce^{-v(x)}dx$ avec v une primitive de u (cf. [KKR]) .*

Nous allons achever la démonstration du théorème 1.1 en prouvant les théorèmes 2.2 et 2.6 .

3. Démonstration du théorème 2.2 (première classe de fonctions propres : cas où (C) est satisfaite)

Supposons que $\alpha < 0$ et $u(x) \geq \overline{C_2}|\alpha|^{\frac{1}{2}}$ (le cas $\alpha > 0$ et x assez grand se traite de manière analogue).
On remarque que la fonction constante α est une sursolution de (D_α) pour x assez grand (i.e. $-S_\alpha(\alpha, x) \geq 0$) .
Soit $s > \alpha$. Nous désignons par φ la solution de (D_α) définie sur l'intervalle $[x, \infty[$ et telle que $\varphi(x) = s$. Il est alors clair que :

$$\sup_{z \geq x} |\varphi(z)| \leq k \qquad \text{et} \qquad \lim_{z \to \infty} \varphi(z) = \alpha.$$

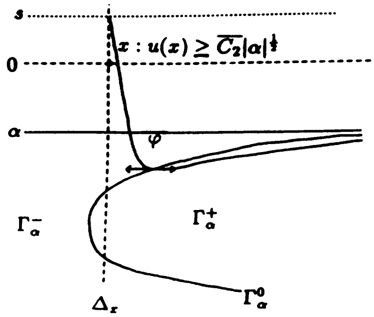


Fig. 1.

Montrons alors que la fonction f définie dans l'énoncé du théorème 2.2 par (3) est une solution positive de P_α, et que sa limite à l'infini existe et est strictement positive . On note :

$$v(z) := \int_x^z u(y)dy \quad \text{et} \quad h(z) := \int_x^z \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y)dy\,.$$

On voit facilement que : $(\varphi_1 - \varphi_2)(z) = Cu^3(z)exp(-v(z) - h(z))$.
f étant une combinaison linéaire de deux fonctions propres de la forme (2), de valeur propre α, est elle-même une fonction propre de valeur propre α. Ecrivons f sous la forme :

$$f(z) = \left(exp \int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u}\right)\left(1 - exp \int_z^\infty \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{u}\right)\frac{e^{v(z)}}{u(z)} \tag{7}$$

Puisque $(\varphi_2 - \varphi_1) \leq 0$ on a $f(z) \geq 0$ pour tout $z \geq x$.
Notons :

$$\gamma(z) := \left(exp \int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u}\right), \qquad g(z) := 1 - exp \int_z^\infty \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{u}.$$

Il est evident que $\gamma(z)$ a une limite quand z tend vers l'infini, égale à $exp \displaystyle\int_x^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}$.

D'autre part :

$$g(z) = \Big(\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u} + o\Big(\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u}\Big)\Big)$$

car $(\varphi_1 - \varphi_2)(z) \to_{z\to\infty} 0$ et donc on peut encadrer l'intégrale par deux fonctions tendant vers zéro, ce qui nous autorise à faire de développement limité de l'exponentielle au voisinage de l'origine . On obtient :

$$\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u}(y)dy = \int_z^\infty \widetilde{C}(y)u^2(y)e^{-v(y)}dy \quad \text{avec} \lim_{y\to\infty} \widetilde{C}(y) = 1.$$

D'autre part : $\displaystyle\int_z^\infty u^2(y)e^{-v(y)}dy = u(z)e^{-v(z)} + e^{-v(z)}o\big(\tfrac{1}{z}\big).$

D'où : $\qquad g(z) = u(z)e^{-v(z)} + e^{-v(z)}o\big(\tfrac{1}{z}\big);$

et finalement, d'après (7) :

$$f(z) = \gamma(z)\Big(1 + \frac{1}{u(z)}o\big(\tfrac{1}{z}\big)\Big).$$

On en déduit que :

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = Cexp \int_x^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y)dy.$$

Ceci achève la démonstration .

De plus, on peut trouver une majoration des moments d'ordre p des temps d'atteinte; et pour $p = 1$, on a une estimation optimale .

Théorème 3.1 . — *i) Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $C_p < \infty$ telle que :*

$$\limsup_{x\to\infty} u(x)\, E\big[(T_x^{x+h})^p\big] \leq h\, C_p,$$

ii) Pour $p = 1$, cette estimation est optimale : il existe deux constantes $C < \infty$ et $C' < \infty$ telles que :

$$h\, C' \leq \liminf_{x\to\infty} u(x)E(T_x^{x+h}) \leq \limsup_{x\to\infty} u(x)E(T_x^{x+h}) \leq h\, C.$$

4. Démonstration du théorème 2.6 (seconde classe de fonctions propres : cas où (C) n'est pas satisfaite)

Rappelons que dans ce cas, la condition (C) n'est pas vérifiée, ce qui équivaut à : $\alpha < 0$ et $|\alpha| > 1$. Faisons trois remarques :

i) La fonction ψ_1, définie par : $\psi_1(z) := \rho|\alpha| - u^2(z)$, avec $\rho < 1$, est une sursolution de (D_α) pour z en dehors d'un compact, i.e. :

$$\psi_1'(z) - S_\alpha(\psi_1, z) \geq 0\,.$$

ii) Soient $\overline{C_1} < 1$, x_1 tel que $u(x_1) \leq \overline{C_1}|\alpha|^{\frac{1}{2}}$ et $x_0 = x_1 - k\,,\Big(k > \dfrac{1}{\rho - \overline{C_1}^2}\Big)$.

Soit ψ_2 définie sur $]x_0, x_1]$ par :

$$\psi_2(z) := \frac{|\alpha|}{z - x_0}.$$

Alors, ψ_2 est une sursolution de (D_α) . En effet, on vérifie aisément que $\psi_2'(z) - S_\alpha(\psi_2, z) \geq 0$.

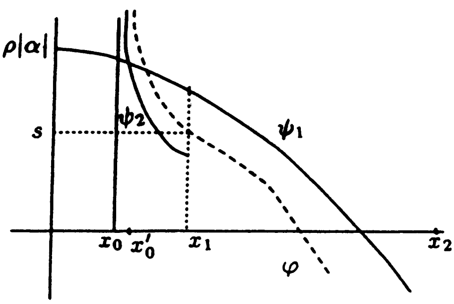
iii) On peut choisir $\overline{C_1}$ (aussi proche de 1 que l'on veut) telle que : $\psi_2(x_1) \leq \psi_1(x_1)$, c'est-à-dire :

$$\frac{|\alpha|}{x_1 - x_0} \leq \rho|\alpha| - u^2(x_1) \ , \qquad (\rho - \overline{C_1}^2) \geq \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{k}.$$

Ceci justifie notre choix de la constante k $\left(k > \frac{1}{\rho - \overline{C_1}^2}\right)$.

Soit maintenant s tel que $\psi_2(x_1) \leq s \leq \psi_1(x_1)$. Et soit φ la solution de (D_α) vérifiant $\varphi(x_1) = s$. Définissons φ sur son intervalle maximal de définition .

Fig. 2.



On a donc :

- pour $z \geq x_1$ $\varphi(z) \leq \rho|\alpha| - u^2(z)$ (8)
- pour $z \leq x_1$ $\varphi(z) \geq \dfrac{|\alpha|}{z - x_0}$ (9)

Soit alors

$$f(z) := \left(exp \int_{x_1}^{z} \frac{\varphi}{u}\right) \frac{exp \int_{x_1}^{z} u(y)dy}{u(z)}.$$

Ainsi, il est clair, d'après (8) et (9), que f est solution de (P_α) et :

•f est définie sur $[x_0', x_2]$ (avec x_0' proche de x_0, $x_0 < x_0' < x_1$ et x_2 éventuellement égal à $+\infty$), de classe C^2 sur $]x_0', x_2[$ et telle que :

•$f(x_0') = f(x_2) = 0 \quad (x_0 \leq x_0' \leq x_1 < x_2 \leq \infty)$.

Références

[GNRS] V. Giorno, A.G. Nobile, L.M. Ricciardi, L. Sacerdote *Some remarks on the Rayleigh process*, J. Appl. Prob. 23 , 398-408 (1986)

[KKR] O. Kavian, G. Kerkyacharian, B. Roynette *Quelques remarques sur l'ultra-contractivité*, Journal of Functional Analysis, 111 (1993)

[RY] D. Revuz, M. Yor *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag