RÉMI LÉANDRE

Cohomologie de Bismut-Nualart-Pardoux et cohomologie de Hochschild entière

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 68-99
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__68_0>

COHOMOLOGIE DE BISMUT-NUALART-PARDOUX ET COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD ENTIERE

R. Léandre

INTRODUCTION

Considérons une variété compacte orientable M. Supposons qu'elle soit munie d'un groupe périodique de difféomorphismes. L'exemple typique est la sphère lorsqu'on la fait tourner le long d'un de ses axes. On dit alors qu'on a une action du cercle sur la variété. On peut toujours supposer qu'il s'agit d'une action par isométries : en effet, le cercle est compact, et on peut moyenner la métrique pour qu'elle soit invariante par l'action du cercle.

Dans le cas de la sphère, on voit apparaître deux points distingués : le pôle nord et le pôle sud. Ils sont invariants sous l'action du cercle. On dit que ce sont les points fixes sous l'action du cercle. On nomme champ de Killing le champ de vecteurs qui engendre cette action du cercle S_1. L'ensemble des points fixes coïncide avec l'ensemble des points où le champ de vecteurs s'annule. Il y a une relation profonde entre l'ensemble des points fixes et la structure globale de la variété.

Introduisons à cette fin l'ensemble des formes S_1 invariantes sur la variété. Infinitésimalement, cela se traduit si X dénote le champ de Killing par le fait que la dérivée de Lie $L_X\mu$ est nulle pour une forme S_1 invariante :

$$L_X\mu = (d + i_X)^2\mu = 0$$

Sur l'ensemble des formes invariantes, on a un complexe, $d + i_X$, et sa cohomologie s'appelle la cohomologie S_1 équivariante. Quelle est la grande différence avec la cohomologie ordinaire? Si on considère une forme S_1 équivariante fermée, $(d+i_X)\mu = 0$, μ ne peut être en général de degré fixe, car d ajoute un degré à la forme et i_X soustrait un degré à la forme. La cohomologie S_1 équivariante est donc par nature reliée aux sommes de formes de degrés arbitraires. On ne peut parler que de groupes de cohomologie paire et impaire.

De plus la cohomologie S_1 équivariante est reliée à la cohomologie des points fixes ([J.P]). On peut voir ceci par le biais des formules de localisations de Berline-Vergne ([Bi$_2$], [Bi$_3$] [B.V]) : elles expriment qu'une certaine intégrale sur la variété totale est égale à une certaine intégrale sur la variété des points fixes.

Considérons en effet une forme S_1 équivariante fermée μ. On remarque que ([Bi$_3$]) :

$$\int_M \mu = \int_M \mu_{top} = \int exp[-t(d + i_X)X] \wedge \mu = ch_t(\mu)$$

Le champ de vecteurs par dualité est égal à une forme; dX est une 2 forme et $i_X X$ est le scalaire $|X|^2$.

$$exp[-tdX] = \sum (-1)^n \frac{t^n}{n!} dX^{\wedge n}$$

est une somme finie. Par le théorème des croissances comparées, quant $t \to \infty$, $ch_t(\mu)$ se localise sur les points fixes de X; l'ensemble des points fixes est bien une variété, car le groupe périodique de difféomorphismes est un groupe d'isométries. L'exemple typique de forme S_1 équivariante fermée est le suivant : on considère un fibré qui est compatible avec l'action du cercle. On définit une classe caractéristique équivariante qui lui est associée ([B.V]). Sur l'espace des points fixes, il se restreint au caractère de Chern sur le fibré restreint.

L'objectif de ce travail est de passer à la dimension infinie, ou du moins d'essayer de donner un sens analytique à un certain nombre de travaux entrepris sur ce domaine ([At], [Bi$_2$], [Bi$_3$], [G.J.P]). On considère l'espace des lacets libres sur la variété, c'est à dire l'espace des applications C^∞ γ_s de S_1 sur M. Il possède une action du cercle en faisant tourner le lacet. Les points fixes sous l'action du cercle sont les lacets constants. On récupère ainsi à partir de cet espace de dimension infinie la variété ambiante.

Une forme S_1 équivariante fermée est par nature une série infinie de formes de degré fini. La parenté avec l'espace de Fock supersymétrique apparaît, puisque l'on considère aussi dans ce cas des sommes infinies de formes de degré fini qui dépendent d'un paramètre. Mais il n'y a pas de mesure et on ne sait pas ce que signifie une série convergente. Dans ce cadre formel, il a été démontré par [J.P] que la cohomologie S_1 équivariante de l'espace des lacets est égale à la cohomologie de la variété.

Un des outils fondamentaux est le caractère de Chern de Bismut $ch\xi_\infty$: introduisons un fibré complexe auxiliaire ξ sur la variété. On en déduit un fibré ξ_∞ sur l'espace des lacets en prenant les sections ξ_s C^∞ au dessus du lacet. Il est clair que ce fibré de dimension infinie est compatible avec l'action du cercle. Bismut introduit une classe caractéristique équivariante, donc par nature une série de formes de degré fini, qui se restreint sur l'ensemble des lacets constants en le caractère de Chern du fibré ξ sur la variété de base M. Il est relié plus ou moins à la solution d'équations différentielles sur l'espace des lacets. Soit e_t l'application évaluation $\gamma_. \to \gamma_t$ et soit σ une forme sur M. $e_t^*\sigma$ est une forme sur T_γ. Elle est définie ainsi : un vecteur tangent est une section périodique X_t au dessus de γ_t; $e_t^*\sigma(X_1, .., X_n) = \sigma(\gamma_t)(X_{1,t}, .., X_{n,t})$. On considère alors la solution de l'équation différentielle :

$$dH_t = H_t \wedge e_t^*\sigma(d\gamma_t, .)$$

qui se résout formellement par la méthode de Picard :

$$H_1 = \sum \int_{0<s_1<\ldots<s_n<1} \sigma(d\gamma_{s_1},.) \wedge .. \wedge \sigma(d\gamma_{s_n},.)$$

La remarque fondamentale de [G.J.P] est la suivante : l'intégrale itérée de Chen ([Ch])

$$H^n = \int_{0<s_1<\ldots<s_n<1} \sigma(d\gamma_{s_1},.) \wedge .. \wedge \sigma(d\gamma_{s_n},.)$$

peut être vue comme un élément de $\Omega_.(M)^{\otimes n}$, $\Omega_.(M)$ désignant l'ensemble des formes de degré strictement positif sur M.

C'est le biais qu'utilise [G.J.P] pour essayer de localiser les intégrales de chemin sur l'espace des lacets. En effet Atiyah-Witten ([At]) ont remarqué que formellement en dimension infinie modulo des constantes infinies convenablement choisies

$$ch_t(1) = IndD_+$$

si D_+ désigne l'opérateur de Dirac sur la variété (on suppose que M est spinorielle). Bismut remarque que par localisation

$$ch_t(ch\xi_\infty) = IndD_{+,\xi}$$

où $D_{+,\xi}$ est l'opérateur de Dirac tensorisé par le fibré auxiliaire complexe ξ. Le fait que M est spinorielle se traduit par le fait que l'espace des lacets est orientable ([At]).

Bismut donne des interprétations probabilistes de $ch_t(ch\xi_\infty)$ au niveau de la théorie de la mesure, qui évitent d'utiliser les constantes infinies d'Atiyah-Witten, mais elles n'ont pas été justifiées par des théorèmes limites convenables. L'idée de [G.J.P] et de [Ge_2] est de définir ce courant sur les formes de Chen, en utilisant la formule de Duhamel. L'intégrale de Chen permet de transplanter sur l'espace des lacets des calculs algébriques sur la cohomologie cyclique des formes apparentés à ceux de la géométrie différentielle non commutative ([Ge_2]). La remarque fondamentale est la suivante : la dérivée extérieure sur l'espace des lacets correspond au cobord de Hochschild sur l'espace algébrique associé. Le bord de Connes en cohomologie cyclique correspond au produit intérieur par l'action infinitésimale du cercle sur l'espace des lacets.

L'objectif de ce travail part des constatations suivantes :

-) Les séries de formes sur l'espace des lacets considérées dans [G.J.P] sont des séries formelles.

-) Le courant ch_t est défini sur un espace de formes relativement petit.

Pour définir analytiquement ce courant, on part du même principe qui a été utilisé par le calcul de Hida pour définir l'intégrale de Feynmann. On introduit une mesure, mais malheureusement la mesure de Riemann n'existe pas; c'est pourquoi on considère la mesure B.H.K du pont brownien ([H.K]). L'espoir est de définir sur l'espace des lacets des espaces de Sobolev et un courant défini sur ceux-ci satisfaisant les propriétés suivantes :

-) La dérivée extérieure et la dérivée extérieure S_1 équivariante sont continues.

-) Le caractère de Chern de Bismut appartient à tous les espaces de Sobolev, ou plus généralement toutes les formes de Chen introduites par [G.J.P] et [Ge$_2$] appartiennent à ces espaces de Sobolev.

-) On peut définir un courant ch_t avec son domaine sur ces espaces de Sobolev satisfaisant à :

$$\frac{\partial}{\partial t} ch_t(\mu) = 0$$

si $(d + i_X)\mu = 0$ et à

$$ch_t(d + i_X)\mu = 0$$

La première relation permet de localiser ce courant sur la variété.

-) La cohomologie S_1 équivariante stochastique est reliée à la cohomologie de la variété.

Le premier travail dans cette direction est [J.L$_1$] : rappelons que les lacets considérés sont continus. Un espace de Hilbert tangent y est introduit, qui s'est avéré ultérieurement ([F.M], [L$_2$]) être celui introduit par Bismut dans [Bi$_1$] pour le cas du mouvement brownien d'une variété. Ceci permet puisqu'il y a une mesure d'effectuer une théorie L^p des formes sur l'espace des lacets, pour que les formes de Chen satisfaisant à des critères de convergences à la manière de [Co] appartiennent à tous les L^p. En particulier, le caractère de Chern de Bismut appartient à tous les L^p. La partie scalaire du courant de Witten ch_t est étendue à toutes les fonctionnelles scalaires dans [L$_2$]. Il n'y a pas d'opérations différentielles dans [J.L$_1$], car il n'y avait pas encore d'intégrations par parties. Elles sont effectuées dans [L$_2$] : l'outil principal est constitué des formules d'intégration par parties de [Bi$_1$] et d'estimation en temps petit de densité (le lecteur peut consulter les articles de revue [L$_1$], [K$_2$], [Wa]). Ceci permet de définir un opérateur d'Ornstein Uhlenbeck invariant par rotation sur l'espace des lacets dans [L$_3$]. Dans [L$_3$], une relation entre l'homologie de Hochschild de la variété et la cohomologie stochastique de l'espace des lacets est mise en évidence, mais aucune analyse fonctionnelle satisfaisante n'est effectuée.

Ce n'est pas le cas pour [J.L$_2$], [L.R], [L$_5$] : on étudie des opérateurs non scalaires, leur adjoint est calculé, et après avoir utilisé une procédure limite, leur indice est calculé. En particulier, il est possible dans [J.L$_2$] et dans [L.R] de travailler avec l'adjoint d'une version régularisée de la dérivée extérieure sur l'espace des lacets libres. Le prix à payer est le suivant : nous avons considéré à cette fin un opérateur qui est homotopiquement équivalent à la dérivée extérieure sur l'espace des lacets C^∞, et nous n'avons pas un complexe.

Le propos de cet article est de définir une version non régularisée de la dérivée extérieure stochastique.

La remarque fondamentale est la suivante :

-) Dans la définition de la dérivée extérieure, des crochets de Lie de champs de vecteurs apparaissent, et par suite la dérivée covariante du processus holonomie sur un lacet qui n'est pas à variation finie. La formule exacte de cette dérivée covariante est donnée par Bismut dans [Bi$_1$] : mais c'est une semi-martingale. Cela montre que la définition de la dérivée est reliée à la notion d'intégrale stochastique anticipante. (Et pas seulement pour son adjoint comme cela est le cas pour le calcul différentiel habituellement utilisé dans le cas plat ([Ar.Mi] [Sh])).

-) Si nous calculons l'adjoint de la dérivée de l'holonomie, un bruit fermionique non intégrable apparaît. Cela montre qu'il semble difficile de donner une clôture de la dérivée extérieure en utilisant des formules d'intégration par parties. On peut comprendre ce fait par un autre moyen : les intégrales stochastiques qui apparaissent dans la définition de la dérivée extérieure ne sont pas des intégrales de Skorohod mais des intégrales de Stratonovitch. Nous devons supposer que leurs noyaux possèdent une certaine régularité pour qu'elles convergent, comme cela a été mis en évidence par Nualart et Pardoux dans [N.P] dans le cas plat pour l'intégrale de Stratonovitch anticipante. L'outil principal de cet article est le suivant ([L_3]) : soit un champ de vecteurs sur l'espace des chemins dont les dérivées covariantes successives satisfont en dehors des diagonales au critère de Kolmogorov. Il existe alors une intégrale de Skorohod. De plus, on peut la décomposer en une partie d'Itô et une partie de dérivation.

Ceci nous permet de définir sur l'espace des chemins une intersection d'espaces de Banach de sections de formes, qui est stable par produit extérieur et par produit intérieur , pour des séries de formes. De plus, la dérivée extérieure est une application continue pour cette famille d'espaces de Banach. Nous comparons la structure des r formes pour la famille des mouvements browniens plats en utilisant l'application d'Itô, et nous voyons que l'espace limite est inclus dans le premier en utilisant le théorème de base de [L_3]. La cohomologie entière du modèle limite est égale à la cohomologie de la variété, ce qui se prouve en utilisant le lemme de Clark-Poincaré : la formule scalaire correspondante est usuellement appelée formule de Clark-Ocone ([Nu]).

Dans la deuxième partie de ce travail, nous établissons un diagramme commutatif qui est le point de départ de la preuve de [G.J.P] de l'égalité entre la cohomologie de Hochschild et la cohomologie de l'espace des lacets libres, et qui est une généralisation cohomologique des opérations menées en analyse quasi-sûre ([Ar.M], [Ge_1]). Les applications horizontales sont des opérations de restriction. Les applications verticales sont les intégrales de Chen stochastiques. Ceci nous permet d'obtenir une application entre la cohomologie de Hochschild entière et la cohomologie stochastique de l'espace des lacets.

Essayons d'expliquer l'introduction de ce diagramme commutatif : l'objectif est en effet de démontrer que la cohomologie de Hochschild est égale à la cohomologie stochastique de l'espace des lacets. Pour les lacets C^∞, la dernière preuve de ce résultat est due à [G.J.P], et ce résultat est dû initialement à Chen pour les lacets libres et à Adams pour les lacets pointés. [G.J.P] introduisent à cette fin trois espaces de Hochschild associés à l'espace des chemins, qui joue dans cette théorie le rôle de l'espace plat de Wiener, puisqu'il se rétracte sur la variété, celui des lacets libres et celui de l'espace des lacets basés. Ces deux derniers ne se rétractent pas sur la variété; on peut mesurer certaines obstructions par le Π_1. Les applications intégrales itérées de Chen appliquent ces espaces algébriques sur les formes sur l'espace des chemins, sur l'espace des lacets libres et sur l'espace des lacets basés. L'égalité entre les cohomologies étudiées résultent alors de l'utilisation de suites spectrales et de l'égalité des groupes de cohomologies considérés comme triviaux dans ce formalisme, à savoir l'espace de Hochschild de l'espace des chemins et l'espace des chemins. C'est à cette dernière fin que nous introduisons dans le cadre stochastique la famille de mouvements browniens plats dans l'espace tangent de la variété : nous disposons en effet de la formule de Clark-Ocone qui permet de mener les calculs cohomologiques de rétraction du modèle plat sur la variété initiale.

Le lecteur peut consulter [T] ou [Sm.W] pour l'analyse en dimension infinie dépendant d'un paramètre.

COHOMOLOGIE DE BISMUT-NUALART-PARDOUX DE L'ESPACE DES CHEMINS

Soit M une variété compacte riemannienne de dimension d. Soit Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami. Soit $p_t(x,y)$ le noyau de la chaleur associé. Soit $P_{1,x}$ la loi du pont brownien issu de x et revenant au point de départ au temps 1. Le temps est [0,1]. Soit P_1^x la loi du mouvement brownien issu de x.

Nous considérons trois espaces de dimension infinie :

-) L'espace des chemins $P(M)$: c'est l'espace des fonctions continues γ_t de [0,1] dans M muni de la mesure $dx \otimes dP_1^x = d\nu$.

-) L'espace des lacets libres L(M) : c'est l'espace des fonctions continues γ_t du cercle S_1 dans M muni de la mesure $p_1(x,x)dx \otimes dP_{1,x} = d\mu$.

-) L'espace des lacets pointés $L_x(M)$: c'est l'espace des fonctions continues γ_t de S_1 dans M telles que $\gamma_0 = \gamma_t = x$ muni de la mesure $dP_{1,x} = d\mu_x$.

Soit τ_t l'holonomie de γ_0 à γ_t. Ces trois espaces de dimension infinie sont munis d'espaces tangents différents :

-) Pour l'espace des chemins, un vecteur tangent est de la forme $X_t = \tau_t H_t$ où H_t est d'énergie finie. Comme structure d'espace de Hilbert, nous prenons :

$$\| X \|^2 = \| X_0 \|^2 + \int_0^1 \| H'_s \|^2 \, ds \tag{1.1}$$

En effet, il n'y a pas d'action du cercle pour cet espace.

-) Pour l'espace des lacets libres, ce sont les vecteurs de la forme $X_t = \tau_t H_t$ tels que $X_1 = X_0$. Nous prenons comme structure d'espace de Hilbert ([J.L$_1$]) :

$$\| X \|^2 = \int_0^1 < X_s, X_s > ds + \int_0^1 \| H'_s \|^2 \, ds \tag{1.2}$$

qui est invariante sous l'action d'une rotation du lacet.

-) Pour l'espace des lacets basés, nous avons $X_1 = X_0 = 0$ ([Dr.R]). Nous utilisons comme structure d'espace de Hilbert :

$$\| X \|^2 = \int_0^1 \| H'_s \|^2 \, ds \tag{1.3}$$

L'objectif de cette partie est de définir un ensemble fonctionnel de formes sur l'espace des lacets qui est stable par produit extérieur et par produit intérieur, tel que l'on puisse définir une dérivée extérieure qui opère continument sur lui. Les opérateurs de restriction seront définis plus tard. Sur l'espace des chemins, on peut définir une connection ∇. Pour $X_t = \tau_t H_t$

$$(1.4) \qquad (\nabla X)_t = \tau_t \nabla H_t.$$

∇ est le ramené en arrière par l'application évaluation $e_0 : \gamma_t \to \gamma_0$ de la connection de Levi-Civita sur $T_{\gamma_0}(M)$ (On peut consulter [L2],[L3]) pour plus de détails). Précisons néanmoins comment ∇ est définie. Localement $H_t = \sum H_t^i X_i(\gamma_0)$ où les H_t^i sont des fonctionnelles scalaires et où les champs de vecteurs sur la variété de dimension finie ne dépendent que du point de départ γ_0. Soit Y un champ de vecteurs sur l'espace des chemins. On a :

$$(1.5) \qquad \nabla_Y H_t = \sum < dH_t^i, Y > X_i(\gamma_0) + \sum H_t^i \nabla_{Y_0} X_i(\gamma_0)$$

$\nabla_{Y_0} X_i(\gamma_0)$ est la dérivée covariante du champ de vecteurs sur M $X_i(\gamma_0)$ suivant le champ de vecteur Y_0.

Une application C^∞ possède des dérivées par rapport à la connection $d_\nabla^r F$. Elles possèdent des noyaux :

$$(1.6) \qquad d_\nabla^r F = \sum_{J \subseteq \{1,..,r\}} k_J(s_1, ..., s_l)$$

dF est la H-dérivée ([Gr]) relativement à l'espace tangent choisi. $d_\nabla^2 F$ est la dérivée covariante du cotenseur dF :

$$(1.7) \qquad d_\nabla^2 F(X,Y) =< d < dF, X >, Y > - < dF, \nabla_Y X >$$

et $d_\nabla^k F$ est la dérivéée covariante du $k-1$ cotenseur $d_\nabla^{k-1} F$:

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} &d_\nabla^k F(X_1, .., X_k) = < d < d_\nabla^{k-1} F, X_1, .., X_{k-1} >, X_k > \\ &- \sum < d_\nabla^{k-1} F, X_1, .., \nabla_{X_k} X_i, .., X_{k-1} > \end{aligned}$$

$k_J(s_1, ., s_l)$ est un $\mid J \mid$ tenseur en $H'_{i_1}(s_1), ., H'_{i_l}(s_l)$, $\{i_1, ., i_l\} = J$ et un $r- \mid J \mid$ tenseur en $X_{j_1}(0), .., X_{j_l}(0)$, $\{j_1, .., j_l\} = J^c$.

Soit σ une r forme. Elle s'écrit comme :

$$(1.9) \qquad \sigma = \sum_{J \subseteq \{1,..,r\}} \sigma_J(s_1, ..., s_l)$$

σ est un tenseur antisymétrique. Cela veut dire que :

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} &\sigma(X_1, .., X_r) = \frac{1}{r!} \sum_J \sum_{s \in S_r} (-1)^{sign(s)} \int_{[0,1]^{|J|}} \\ &< \sigma_J(s_1, .., s_l), H'_{s(i_1)}(s_1), ..., H'_{s(i_l)}(s_l), X_{s(j_1)}(0), ..., X_{s(j_{r-l})}(0) > ds_1 ... ds_l \end{aligned}$$

où $\{i_1, ..., i_l\} = J$, $\{j_1, ..., j_l\} = J^c$. s dans (1.10) décrit l'espace des permutations de $\{1, ..., r\}$. $sign(s)$ désigne la signature de la permutation s. Nous pouvons utiliser la structure de fibration au dessus de M de l'espace des chemins au moyen de l'application évaluation $e_0 : \gamma_t \to \gamma_0$ pour décrire les formes sur l'espace des chemins.

Soit $dx_1,..,dx_d$ une base orthogonale locale de T^*M. Nous en déduisons une base locale orthogonale de $\Lambda(T^*M)$. Localement, on peut décomposer une forme de la manière suivante :

$$\sigma = \sum_{|J|\leq r} \sum_{|J'|=r-|J|} \sigma_J \wedge dx_{J'} \tag{1.11}$$

Les formes σ_J sont des pures formes sur l'espace tangent de l'espace des chemins pointés : la longueur de leurs noyaux coïncide avec leur ordre. Les dx_J sont des formes pures en l'espace des paramètres M.

Soit σ une pure forme dans l'espace des chemins pointés. Nous avons :

$$\begin{gathered}\sigma(X_1,...,X_r) = \\ \frac{1}{r!}\sum_{s\in S_r}\int_{[0,1]^r}(-1)^{sign(s)} < \sigma(s_1,..,s_r), H'_{s(1)}(s_1),..,H'_{s(r)}(s_r) > ds_1..ds_r\end{gathered} \tag{1.12}$$

De plus le noyau $\sigma(s_1,..,s_n)$ de la pure forme sur l'espace des chemins pointés σ est égal à $\sum_{s\in S_r}\frac{1}{r!}(-1)^{sign(s)}\sigma(s_{s(1)},..,s_{s(r)})$. Soit $\nabla^k\sigma'$ la dérivée covariante de la pure forme sur l'espace tangent de l'espace des chemins pointés. Elle s'écrit ([L3]) comme :

$$\nabla^k\sigma' = \sum_{J\subseteq\{1,..,k\}} \sigma'_J(s_1,..,s_r;t_1,...,t_l) \tag{1.13}$$

Précisons ce qu'on entend par $\nabla^k\sigma'$. $\nabla\sigma'$ est défini ainsi :

$$\nabla_Y\sigma'(X_1,..,X_r) =< d\sigma'(X_1,..,X_r), Y > - \sum \sigma'(X_1,..,\nabla_Y X_i,..,X_r) \tag{1.14}$$

On prend pour $\nabla^k\sigma'$ la dérivée covariante du cotenseur $\nabla^{k-1}\sigma'$ de la même manière que précédemment, en itérant. Il y a deux parties dans les dérivées de σ' : les dérivations en l'espace des chemins pointés qui donnent lieu à des noyaux, et les dérivations en l'espace des paramètres qui donnent lieu à des cotenseurs sur TM.

Nous pouvons maintenant définir les espaces de Nualart-Pardoux de formes. Soit σ une forme. Localement $\sigma = \sum \sigma'_J dx_J$. Nous supposons qu'en dehors des diagonales en s et t inclus :

$$\begin{gathered}\| \sigma'_J(s_1,..,s_n;t_1,...,t_l) - \sigma'_J(s'_1,..,s'_n;t'_1,...,t'_l) \|_{L^p} \leq \\ C_{p,r}(\sigma'_J)\sum\sqrt{| s_i - s'_i |} + \sqrt{| t_j - t'_j |}\end{gathered} \tag{1.15}$$

$$\| \sigma'_J(s_1,..,s_r;t_1,..,t_l) \|_{L^p} \leq C'_{p,r}(\sigma'_J) < \infty \tag{1.16}$$

Dans (1.15), $l \leq r$, parce que nous prenons l'espace de toutes les dérivées de σ'_J, et il y a les dérivées en l'espace des chemins pointés et les dérivées en l'espace de départ. $C_{p,r}, C'_{p,r}$ sont appelées les constantes de Kolmogorov de σ'_J ([L3]) (ou de Nualart-Pardoux). Nous prenons dans (1.15) et (1.16) la norme Hilbert-Schmidt du cotenseur de dimension finie $\sigma'_J(s_1,..,s_n;t_1,..,t_l) - \sigma'_J(s'_1,..,s'_n;t'_1,..,t'_l)$, mais on pourrait aussi bien prendre une norme supremum dans une base orthonormée quelconque, parce qu'elle est équivalente à la première avec un module d'équivalence en C^n, ce qui n'est pas relevant vu le 2^{np} qui apparaît dans (1.17).

Pour une n forme, nous définissons ses normes de Sobolev au sens de Nualart-Pardoux de la manière suivante :

$$\| \sigma' \|_{p,r} = \frac{2^{np}}{(n-p)!n!} \sum_O \sum_J \sum_{l \leq r} C_{p,l}(\sigma'_J) + C'_{p,l}(\sigma'_J) \tag{1.17}$$

O est l'ensemble des ouverts constituant la partition de l'unité utilisée pour utiliser des sections locales de l'espace tangent. Ces normes sont équivalentes si on change de partition de l'unité, et de systèmes de bases locales dépendant du point de départ uniquement. Pour une collection $\sigma = \sum_n \sigma_n$ de n formes, nous disons que σ appartient à tous les espaces de Nualart-Pardoux $(N.P)_{p,r}(P)$ si $\sum_n \| \sigma_n \|_{p,r}$ est fini.

DEFINITION I.1. : Nous dirons que σ est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux si σ appartient à tous les espaces de Nualart-Pardoux $(N.P)_{p,r}(P)$.

REMARQUE : Si $p_1 \geq p_2$, $r_1 \geq r_2$

$$(N.P)_{p_1,r_1}(P) \subset (N.P)_{p_2,r_2}(P) \tag{1.18}$$

Nous obtenons un théorème qui est un analogue différentiel du théorème correspondant dans L^p de [J.L$_1$].

THEOREME I.2. :

-) Soit σ et σ' deux formes qui sont C^∞ au sens de Nualart-Pardoux . $\sigma \wedge \sigma'$ est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux.

-) Soit X un champ de vecteurs C^∞ au sens de Nualart-Pardoux (considéré comme une 1-forme, il est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux). $i_X\sigma$ est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux.

PREUVE : Ecrivons localement

$$\sigma = \sum_{r,J} \sigma_{r,J} \wedge dx_J \tag{1.19}$$

$$\sigma' = \sum_{r,J} \sigma'_{r,J} \wedge dx_J \tag{1.20}$$

Nous avons :

$$\sigma \wedge \sigma' = \sum_{n,J} (\sum_{l+l'=n \; K\cap K'=\emptyset \; K\cup K'=J} (-1)^{sign} \sigma_{l,K} \wedge \sigma'_{l',K'}) \wedge dx_J \tag{1.21}$$

Le noyau de $\sigma_{l,K} \wedge \sigma'_{l',K'}$ est somme de $\frac{(l+l')!}{l!l'!}\sigma_{l,K}(s_1,...,s_l) \otimes \sigma'_{l',K'}(s'_1,...,s'_l)$ du fait de l'antisymétrisation. En effet un produit extérieur est un produit tensoriel antisymétrisé. Les constantes de Kolmogorov de $\sigma_l \otimes \sigma'_l$ satisfont à :

$$\sum_{k \ll r} C_{p,k} \ll C(r)(\sum_{k\ll r} C_{2p,k}(\sigma_{l,K}))(\sum_{k \ll r} C_{2p,k}(\sigma'_{l',K'})) \tag{1.22}$$

De plus :

$$(1.23)\qquad \sum_{k\leq r} C_{p,k}(\sigma_{l,K}\wedge\sigma'_{l',K'}) \leq C(r)\frac{(l+l')!}{l!l'!}(\sum_{k\leq r} C_{2p,k}(\sigma_{l,K}))(\sum_{k\leq r} C_{2p,k}(\sigma'_{l',K'}))$$

Dans la présente formule, les deux types de constantes de Kolmogorov sont mélangés. Si nous écrivons localement,

$$(1.24)\qquad \sigma\wedge\sigma' = \sum_{n,J}(\sigma\wedge\sigma')_{n,J}\wedge dx_J$$

nous déduisons de (1.23) que :

$$(1.25)\qquad \begin{aligned} \| (\sigma\wedge\sigma')_{n,J} \|_{p,r} &\leq C(p,r)\frac{1}{(n-p)!n!} \\ &\sum 2^{lp}2^{l'p'}\frac{(l+l')!}{l!l'!}(\sum_{k\leq r} C_{2p,k}(\sigma_{l,K}))(\sum_{k\leq r} C_{2p,k}(\sigma'_{l',K'})) \end{aligned}$$

la somme étant prise sur l'ensemble $\{l+l'=n, K\cup K'=J, K\cap K'=\emptyset\}$. De plus,

$$(1.26)\qquad \frac{(l+l')!}{l!l'!}\frac{1}{(n-p)!n!} \leq \frac{C(p)}{l!(l-2p)!(l'-2p)!l'!}$$

De (1.25) et de (1.26), nous déduisons que :

$$(1.27)\qquad \| (\sigma\wedge\sigma')_{n,J} \|_{p,r} \leq C(r,p) \sum_{l+l'=n,K,K'} \| \sigma_{l,K} \|_{2p,r} \| \sigma'_{l',K'} \|_{2p,r}$$

Nous mettons ainsi en évidence une inégalité de Hölder :

$$(1.28)\qquad \| (\sigma\wedge\sigma') \|_{p,r} \leq C(r,p) \| \sigma \|_{2p,r} \| \sigma' \|_{2p,r}$$

Démontrons maintenant la seconde assertion. Soit σ une n forme pure sur l'espace des chemins. Soit $\sigma(s_1,..,s_n)$ son noyau. Soit $X_t = \tau_t(X_0+\int_0^t k(s_1)ds_1)$ un champ de vecteurs qui est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux. Nous devons estimer les constantes de Kolmogorov de :

$$(1.29)\qquad A(s_1,...,s_{n-1}) = \int \sigma(s,s_1,..,s_{n-1})k(s)ds$$

Utilisons un principe qui sera utilisé souvent par la suite. Soit une intégrale de la fonction $A(s,s_1,..,s_n)$ qui satisfait aux conditions de Nualart-Pardoux. Nous décomposons l'intervalle d'intégration en petits intervalles $[s_i,s_{i+1}]$. Nous effectuons de même pour $\int_0^1 A(s,s'_1,..,s'_n)ds$ (nous avons supposé pour simplifier que $s_1 < s_2 < .. < s_n$ et que $s'_1 < s'_2.. < s'_n$). Nous étudions la différence des intégrales $\int_{s_i}^{s_{i+1}} - \int_{s'_i}^{s'_{i+1}}$, et nous distinguons si nous sommes sur l'intersection de $[s_i,s_{i+1}]$ et de $[s'_i,s'_{i+1}]$ ou non. Si nous sommes sur l'intersection, on peut appliquer les hypothèses de Nualart-Pardoux. Sinon, la mesure de l'espace d'intégration est bornée par $| s'_i - s_i | + | s'_{i+1} - s_{i+1} |$ et nous utilisons les constantes de Nualart-Pardoux (1.16) de seconde espèce.

Appliquons maintenant ce principe général à la dérivée de $A(s_1,..,s_{n-1})$ d'ordre r qui est une somme de $C(r)$ expressions du type

$$B(s_1,..,s_{n-1};t_1,..t_l) = \int \sigma(s,s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_{l_1})k(s;t_{l_1+1},..,t_l)ds \tag{1.30}$$

Nous n'avons pas écrit les dérivations au point de départ. La seconde condition découle de l'inégalité de Hölder et du critère de Kolmogorov qui permet de remplacer (1.16) par

$$\sup_{s_2,..,s_n;t_1,..,t_l} \| \sup_{s_1} \| \sigma(s_1,..,s_n;t_1,..,t_l) \| \|_{L^p} < \infty \tag{1.31}$$

Les constantes sont des expressions en les constantes de Kolmogorov dans (1.15) et dans (1.16) et le second supremum est pris sur la collection de petits intervalles dont l'union est égale à l'intervalle d'intégration dans (1.30). Nous estimons $\| B(s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l) - B(s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l) \|_{L^p}$. Nous découpons l'intervalle d'intégration en une union finie d'intervalles : sur chaque petit intervalle, nous pouvons appliquer (1.15) ou (1.16). Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} &\| B(s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l) - B((s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l \|_{L^p} \leq \\ &\leq (n+r)C(p,r)(\sum_{k\leq r} C_{2p,k}(\sigma))(\sum_{k\leq r} C_{2p,k}(\sigma')).\sqrt{increment} \end{aligned} \tag{1.32}$$

où nous opérons en dehors des diagonales et où nous prenons les deux types de constantes dans l'expression de droite. De plus :

$$\| i_X\sigma \|_{p,r} \leq C(p,r) \| X \|_{2p,r} \| \sigma \|_{2p,r} \tag{1.33}$$

car

$$(n+r)\frac{2^{(n-1)p}}{(n-p)!} \leq C(p,r)\frac{2^{n2p}}{(n-2p)!} \tag{1.34}$$

◊

Rappelons la formule de Bismut ([B1],[L3]) :

$$\nabla_X \tau_t = \tau_t \int_0^t \tau_s^{-1} R(d\gamma_s, X_s)\tau_s \tag{1.35}$$

où R est le tenseur de courbure.De plus, la connection de Lévi-Civita est sans torsion. Soit $X_t = \tau_t H_t$ and $X'_t = \tau_t H'_t$ deux champs de vecteurs. Nous avons :

$$[X, X']_t = \tau_t(\nabla_{X'} H_t) + \tau_t \int_0^t \tau_s^{-1} R(d\gamma_s, X'_s)\tau_s H_t + antisymetrie. \tag{1.36}$$

De plus, l'espace tangent n'est pas stable par crochets de Lie. Rappelons que si σ est une n forme, la dérivée extérieure est définie par :

$$
\begin{aligned}
&d\sigma(X_1,..,X_{n+1}) = \\
(1.37) \qquad &= \sum(-1)^{i-1} < d(\sigma(X_1,..,X_{i-1},X_{i+1},..,X_n)), X_i > + \\
&+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\sigma([X_i,X_j],X_1,..,X_{i-1},X_{i+1},..,X_{j-1},X_{j+1},..,X_n)
\end{aligned}
$$

Cela montre que le problème de définir une dérivée extérieure stochastique est lié au problème de définir une intégrale de Stratonovitch anticipante. Ce problème est traité dans la dernière partie de [L3]. Nous obtenons :

THEOREME I.3 : La dérivée extérieure stochastique est définie sur l'espace des formes C^∞ et est continue pour la famille de normes définissant cet espace.

PREUVE : Soit σ_n une n forme pure sur l'espace des chemins. Soit $\sigma(s_1,..,s_n)$ son noyau. Si $X_i = \tau_t(X_{o,i} + \int_0^t h_i(s)ds) = \tau_t H_i(t)$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&d\sigma_n(X_1,..,X_{n+1}) = \\
&= \sum(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^{r+1}}\sigma(s_1,..,s_n;t_{n+1}) \\
&h_1(s_1)..\hat{h}_i(s_i),,..h_{n+1}(s_n)h_i(t_{n+1})ds_1..ds_n dt_{n+1}+ \\
(1.38) \qquad &+\sum(-1)^i\int_{[0,1]^n}\nabla_{X_{0,i}}\sigma(s_1,..,s_n)h_1(s_1)..,\hat{h}_i(s_i),..,h_{n+1}(s_n)ds_1..ds_n+ \\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\int_{[0,1]^n}\sigma(s_1,..,s_n). \\
&(\tau_{s_1}^{-1}R(d\gamma_{s_1},\tau_{s_1}H_j(s_1))\tau_{s_1}H_{i,s_1} - \tau_{s_1}^{-1}R(d\gamma_{s_1},\tau_{s_1}H_i(s_1))\tau_{s_1}H_{j,s_1}), \\
&h_1(s_2),...,h_{i-1}(s_i),h_{i+1}(s_{i+1})..h_{j-1}(s_{j-1}),h_{j+1}(s_j),..,h_{n+1}(s_n)ds_2...ds_n.
\end{aligned}
$$

$\hat{}$ désigne l'opérateur omission.

Nous prenons une intégrale de Stratonovitch associée à $\int_0^t \tau_s^{-1}R(d\gamma_s,\tau_s.)\tau_s$ qui prend ses valeurs dans les matrices au-dessus de $T_{\gamma_0}(M)$. En ce qui concerne les propriétés de cette intégrale de Stratonovitch anticipante, nous nous référerons toujours à l'appendice. Nous pouvons décomposer la dérivée extérieure en 5 morceaux; ils résultent de la distinction entre dérivée suivant l'espace des paramètres (vecteurs $\tau_t H_0$) ou suivant l'espace tangent de l'espace des chemins basés (vecteurs $\tau_t\int_0^t H'_s ds$) et du fait que l'on peut dériver les noyaux associés à la forme ou le transport parallèle :

1) Le premier d_1 est associé à la somme d'éléments du type $k(s_1,..,s_n;t_{n+1})$.

2) Le second d_2 est associé à la somme de noyaux du type $\nabla_X k(s_1,..,s_n)$.

3) Le troisième terme d_3 est naturellement associé à la somme de noyaux de la forme $\int_{s_1\vee s_2}^1 \sigma(s,s_3,..,s_r).(\tau_s^{-1}R(d\gamma_s,\tau_s.)\tau_s.)$. C'est un tenseur pur sur l'espace des chemins.

4) Le quatrième terme d_4 est naturellement associé à la somme de noyaux du type $\int_{s_1}^1 \sigma(s,s_2,..,s_r).(\tau_s^{-1}R(d\gamma_s,\tau_s.)\tau_s.)$. Il possède une partie en X_0 .

5) Le cinquième d_5 est associé au même type d'intégrales, mais il y deux contributions en le point de départ. L'intégrale est prise entre 0 et 1.

De plus, les constantes de Kolmogorov $\sum_{k\leq r} C(p,k)$ des noyaux des trois derniers termes peuvent être exprimées en fonction de $\sum_{k\leq r+p} C(p^2,k)$ du premier noyau. $r+p$ provient du fait que l'on doit effectuer p intégrations par parties pour estimer la norme L^p d'une intégrale de Stratonovitch, lorsque p est un entier. p^2 provient, d'après l'appendice, du fait que l'on doit estimer la norme d'un polynôme d'ordre p en les dérivées de σ. De plus, toujours d'après l'appendice, il y a un nombre fini de contractions entre les temps du noyau de σ et ceux de ses dérivées qui apparaissent dans ces polynômes; on peut appliquer alors le lemme de Kolmogorov, ce qui explique l'introduction des constantes de Nualart- Pardoux de première espèce (1.15), et ce avec un nombre borné de paramètres, puisque le nombre de contractions est bornée par p. Il y a de plus Cn^2 quantités qui apparaissent dans la somme définissant $d\sigma$. D'autre part, nous avons si $p>2$

$$(1.39) \qquad \frac{2^{(n+1)p}n^2}{(n+1-p)!} \leq \frac{2^{np^2}}{(n-p^2)!}$$

En particulier d est continue pour la famille de normes définissant l'espace de Nualart-Pardoux.

◇

D'autre part, $d^2=0$ immédiatement, puisque nous utilisons (1.37).

Nous pouvons poser :

DEFINITION I. 4. : Le groupe de cohomologie de Nualart-Pardoux entier sur l'espace des chemins est $\mathrm{Ker}\, d/\mathrm{Im}\, d = H^\infty(P)$ restreint aux formes C^∞ au sens de Nualart-Pardoux. Le groupe de cohomologie de Bismut-Nualart-Pardoux d'ordre p est $\mathrm{Ker}\, d/\mathrm{Im}\, d = H^p(P)$. Im d est l'image des formes C^∞ au sens de Nualart-Pardoux d'ordre $p-1$ et Ker d est le noyau de d appliquée aux formes C^∞ au sens de Nualart-Pardoux d'ordre p.

Introduisons un autre espace fonctionnel : sur T_xM, nous considérons le mouvement brownien issu de 0 $\gamma_{x,flat}$ de loi $P_{x,flat}$. Sur la famille de tous les mouvements plats, nous choisissons la mesure $dx \otimes dP_{x,flat}$. Nous avons un calcul différentiel : l'espace tangent d'un chemin plat issu de γ_0 est l'espace des chemins $H_t = H_0 + \int_0^t h_s ds$ dans $T_{\gamma_0}(M)$ d'énergie finie. La norme hilbertienne est

$$(1.40) \qquad \| H \|^2_{flat} = \| H_0 \|^2 + \int_0^t \| h_s \|^2 ds$$

Il y a une notion de dérivée dans la direction H. C'est la traditionnelle H dérivée pour les chaos dans l'espace de Fock et la dérivation en l'espace des paramètres en H_0 : nous prenons la dérivée en l'espace des paramètres des chaos, et nous pouvons calculer de manière aisée l'adjoint de la dérivation en l'espace des paramètres. L'opération de dérivation est donc fermable.

Nous pouvons répéter les précédentes considérations, et ce sur l'espace limite. Une forme σ peut être écrite localement comme $\sum \sigma_J \wedge dx_J$ où σ_J est une forme pure en l'espace des chemins browniens plats. Supposons que σ_J est de degré n en le chemin brownien. Nous avons :

$$(1.41) \qquad \sigma(H_1,..,H_n) = \int_{[0,1]^n} \sigma(s_1,..,s_n) h_1(s_1)..h_n(s_n) ds_1...ds_n$$

Soient $\sigma(s_1, .., s_n; t_1, .., t_r)$ les noyaux de σ. Les constantes de Kolmogorov (ou de Nualart-Pardoux) de σ sont définies de la manière suivante :

$$\| \sigma(s_1, .., s_n; t_1 .., t_l) - \sigma(s'_1, .., s'_n; t'_1 .., t'_l) \|_{L^p} \leq C_{p,r}(flat) \sum \sqrt{| s_i - s'_i |} + \sqrt{| t_i - t'_i |} \tag{1.42}$$

si $s_1, .., s_n, t_1, ..t_l$ sont dans la même composante connexe du complémentaire des diagonales que $s'_1, ., s'_n, t'_1, .t'_l$ ($\sigma(s_1, .., s_n; t_1, .., t_l)$ est l'un des noyaux de $\nabla^r(s_1, .., s_n)$ où $l \leq r$ car nous devons prendre des dérivées en le point de départ). De plus :

$$\sup \| \sigma(s_1, .., s_n; t_1, .., t_l) \|_{L^p} = C'_{p,r}(flat) \tag{1.43}$$

Nous posons pour une n forme :

$$\| \sigma \|_{p,r} (flat) = \frac{2^{np}}{(n-p)!n!} \sum_O \sum_J \sum_{l \leq r} (C_{p,l}(\sigma_J)(flat) + C'_{p,l}(\sigma_J)(flat)) \tag{1.44}$$

où la première somme est prise sur l'ensemble de la partition de l'unité de la variété qui permet de décrire en coordonnées locales l'espace tangent. Quand la partition de l'unité et le système de coordonnées locales changent, les normes sont équivalentes. Pour une collection de formes σ_n de degré n, l'espace de Nualart-Pardoux $N.P_{p,r}(flat)$ est défini par la norme :

$$\| \sigma \|_{p,r} (flat) = \sum \| \sigma_n \|_{p,r} (flat) \tag{1.45}$$

Une forme est dite C^∞ au sens de Nualart-Pardoux si elle est un élément de tous les espaces $N.P_{p,r}(flat)$. De plus, si $p_1 > p_2, r_1 > r_2$

$$N.P_{p_1,r_1}(flat) \subset N.P_{p_2,r_2}(flat) \tag{1.46}$$

Comme dans le cas du mouvement brownien courbe, l'espace des formes C^∞ est stable par produit extérieur et par produit intérieur avec un champ de vecteurs C^∞ au sens de Nualart-Pardoux. De plus l'espace des champs de vecteurs est stable par crochets de Lie.

THEOREME I. 5 : La dérivée extérieure pour le modèle limite d est continue pour la famille de normes définissant l'ensemble des formes C^∞ au sens de Nualart-Pardoux.

PREUVE : C'est la même que celle du théorème I.3. De plus, il y a une simplification . Il n'y a pas en effet d'intégrales stochastiques qui apparaissent.

DEFINITION I.6 : $H^\infty(flat)$ est $\mathrm{Ker}\, d/\mathrm{Im}\, d$, d étant définie sur l'espace des formes C^∞ au sens de Nualart-Pardoux sur le modèle limite.

L'intérêt du modèle limite est que l'on peut intégrer les formes fermées, ou du moins leur partie de dimension infinie. Rappelons en effet que la dérivée de Lie suivant un champ de vecteurs est $di_X + i_X d$, et permet d'étudier comment une forme se comporte sous l'action d'un flot. La linéarité du mouvement brownien plat permet de généraliser en un certain sens cette dérivée de Lie quand l'analogue de l'action du flot est donnée en terme d'espérance conditionnelle par rapport au passé.

Ainsi si dF est la H-dérivée d'une fonctionnelle par rapport au mouvement Brownien, elle est fermée, et on peut l'intégrer par la formule de Clark-Ocone. La linéarité du mouvement brownien plat permet d'étendre cette formule au cas des formes et de montrer que :

THEOREME I.7. (Clark-Poincaré) : $H^\infty(flat) = H(M)$.

PREUVE : Soit σ_N une forme sur le modèle limite qui est seulement fonction de γ_0 et de $\gamma_{t_k,flat} - \gamma_{t_{k-1},flat}, 0 < t_1 < .. < t_N = 1$. Ses noyaux sont constants sur $[t_{k-1}, t_k]$. Considérons la partie $[t_{N-1}, t_N]$ de la forme σ_N. Utilisons la formule de Clark ([Nu]) et la formule d'Ito appliquée à $x_t = E_{F_t}\sigma_N(H_t^1 - H_{t_{N-1}}^1, .., H_t^j - H_{t_{N-1}}^j)$, si F_t est la σ algèbre engendrée par le mouvement brownien plat avant t. x_t peut être décomposée en deux termes : le premier est issu de la différentiation de l'un des H_t^i et est égal à

$$\sum \int_{t_{N_1}}^t E_{F_s}\sigma_N(H_s^1 - H_{t_{N-1}}^1, .., h_s^i, .., H_s^j - H_{t_{N-1}}^j)ds \tag{1.47}$$

Le second provient de la formule de Clark-Ocone et est égal à

$$\int_{t_{N-1}}^t E_s \nabla_{\delta\gamma_{s,flat}}, \sigma_N(H_s^1 - H_{t_{N-1}}^1, .., H_s^j - H_{t_{N-1}}^j) \tag{1.48}$$

Nous ajoutons et soustrayons le même terme

$$\begin{aligned}\sum(-1)^{i-1} \int_{t_{N-1}}^t & E_{F_s} \nabla_{H_s^i - H_{t_{N-1}}^i} \sigma_N(\delta\gamma_{s,flat}, \\ & H_s^1 - H_{t_{N-1}}^1, .., H_s^{i-1} - H_{t_{N-1}}^{i-1}, H_s^{i+1} - H_{t_{N-1}}^{i+1}, .., H_s^j - H_{t_{N-1}}^j)\end{aligned} \tag{1.49}$$

Nous effectuons cette opération dans la formule précédente afin qu'une dérivée extérieure apparaisse si nous travaillons en coordonnées locales. Nous prenons l'intégrale d'Itô $\delta\gamma_{s,flat}$ car nous utilisons la formule de Clark-Ocone. Si nous considérons une forme dépendant de $\gamma_{t_N,flat} - \gamma_{t_{N-1},flat}$ mais qui ne contient pas de termes différentiels en $\gamma_{t_N,flat} - \gamma_{t_{N-1},flat}$, nous avons une formule analogue, mais nous n'avons pas à étudier la dépendance dans le temps t de H_t^j.

Introduisons l'opérateur suivant : si σ est une forme de noyau $\sigma(s_1, .., s_n)$:

$$E_{F_t}\sigma = E_{F_t}\sigma(s_1, .., s_n)1_{s_1 \le t}..1_{s_n \le t} \tag{1.50}$$

Nous déduisons le fait suivant : si σ est une forme qui dépend d'un nombre fini de coordonnées, nous avons la formule d'homotopie suivante pour $s < t$:

$$E_{F_t}\sigma - E_{F_s}\sigma = d\int_s^t E_{F_u}\sigma(\delta\gamma_{u,flat}, .) + \int_s^t E_{F_u} d\sigma(\delta\gamma_{u,flat}, .) \tag{1.51}$$

Par densité, cette formule d'homotopie est valide pour toute forme C^∞. En particulier, si $d\sigma = 0$

$$\sigma - E_{F_0}\sigma = d\int_0^1 E_{F_u}\sigma(\delta\gamma_{u,flat}, .) = d\sigma' \tag{1.52}$$

Montrons maintenant que si σ est une forme C^∞ au sens de Nualart-Pardoux, σ' est encore C^∞ au sens de Nualart-Pardoux. (1.48) montre dans ce cas que

$H^\infty(flat) = H(M)$. Si $\sigma(s_1,..,s_n)$ est un noyau de σ, le noyau correspondant de σ' est :

$$\begin{aligned}\sigma'(s_1,..,s_{n-1}) &= \\ (1.53) \qquad &= \int_0^1 E_{F_s} < \sigma(s, s_1,..,s_{n-1}), \delta\gamma_{s,flat},. > 1_{s_1\leq s}..1_{s_n \leq s} = \\ &= \int_{\sup s_i}^1 E_{F_s} < \sigma(s,s_1,..,s_{n-1}), \delta\gamma_{s,flat}. >\end{aligned}$$

Les noyaux de $\nabla^r E_{F_s}\sigma(s,s_1,..,s_{n_1})$ sont $E_{F_s}\sigma(s,s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l)$ avec $t_1,..,t_l \leq s$. Cela se voit sur des formes qui ne dépendent que des accroissements $\gamma_{t_{i+1},flat} - \gamma_{t_i,flat}$ du mouvement Brownien. On peut même prendre des polynômes en ces accroissements par utilisation du théorème de Stone-Weierstrass. De plus :

$$(1.54) \qquad \begin{aligned}&\| E_{F_s}\sigma(s,s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l) - E_{F_s}\sigma(s,s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l) \|_{L^p}^p \leq \\ &\leq C_p \| \sigma(s,s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l) - \sigma(s,s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l) \|_{L^p}^p\end{aligned}$$

De plus :

$$(1.55) \qquad | (\sqrt{\sup s_i} - \sqrt{\sup s'_i} | \leq \sum \sqrt{| s_i - s'_i |}$$

La partie la plus difficile est après usage de l'inégalité de Burkholder d'estimer la quantité suivante quand $s_1,..,s_{n-1},t_1,..,t_l$ est dans la même composante connexe du complémentaire des diagonales que $s'_1,..,s'_{n-1},t'_1,..,t'_l$:

$$\begin{aligned}&E[(\int_0^1 \| E_{F_s}\sigma(s,s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l) - \\ (1.56) \qquad &E_{F_s}\sigma(s,s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l \|^2 ds)^{p/2}] \leq \\ &\leq E[\int_0^1 \| E_{F_s}(\sigma(s,s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l) - \\ &E_{F_s}(\sigma(s,s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l)) \|^p ds]\end{aligned}$$

pour $p > 2$. $[0,1]$ peut être décomposé en deux familles de $n+l$ petits intervalles déterminés par $(s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l)$ et par $(s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l)$. Supposons pour simplifier que $s_1 < s_2 < .. < s_n < t_1 < .. < t_l$. Nous décomposons l'intégrale sur $[0,1]$ en intégrales sur des intervalles déterminés par les temps de la subdivision. Nous obtenons , en appliquant le principe général donné dans le théorème I.2 :

$$\begin{aligned}&\| \int_0^1 E_{F_s} < \sigma(s,s_1,..,s_n;t_1,..,t_l), \delta\gamma_{s,flat}. > - \\ &E_{F_s} < \sigma(s,s'_1,..,s'_n;t'_1,..,t'_l), \delta\gamma_{s,flat}. > \|_{L^p} \leq \\ (1.57) \qquad &\leq \sum \| \int_{s_i}^{s_{i+1}} E_{F_s} < \sigma(s,s_1,..,s_{n-1};t_1,..,t_l), \delta\gamma_{s,flat},. > - \\ &- \int_{s'_i}^{s'_{i+1}} E_{F_s} < \sigma(s,s'_1,..,s'_{n-1};t'_1,..,t'_l), \delta\gamma_{s,flat}. > \|_{L^p} + termes\end{aligned}$$

Si dans une intégrale $[s_i, s_{i+1}] \cap [s'_i, s'_{i+1}] = \emptyset$, nous avons une borne supérieure en $C'_{2p,r}(\sqrt{s_{i+1} - s_i} + \sqrt{s'_{i+1} - s'_i}$ qui est plus petite que la quantité$C'_{2p,r}(\sqrt{| s_i - s'_i |} + \sqrt{| s_{i+1} - s'_{i+1} |}$. Si l'intersection de $[s_i, s_{i+1}]$ et de $[s'_i, s'_{i+1}]$ n'est pas vide, nous avons une estimation du terme correspondant en $(C_{2p,r} + C'_{2p,r})(\sqrt{| s_{i+1} - s'_{i+1} |} + \sqrt{| s_i - s'_i |})$. Nous déduisons une borne des constantes de Kolmogorov de σ' en $Cn(C'_{2p,r}(\sigma) + C_{2p,r}(\sigma)$ et par suite le résultat.
$\diamond$

REMARQUE : On peut voir la formule à la base du théorème dans R^2. On considère la 1 forme $\sigma\ f(\gamma_{t,flat})H^1_t$. Son noyau est $\sigma(t) = 1_{[0,t]} f(\gamma_{t,flat})e_1$ ((e_1, e_2) désigne la base canonique de R^2). On applique la formule de Clark-Ocone et la formule d'Itô :

$$f(\gamma_{t,flat})H^1_t = \int_0^t E[f'(\gamma_{t,flat})\,|F_s]\delta\gamma_{s,flat}H^1_s + \int_0^t E[f(\gamma_{t,flat}\,|\,F_s]dH^1_s$$

$$= \int_0^t E[f'(\gamma_{t,flat})\,|\,F_s]\delta\gamma_{s,flat}H^1_s - \int_0^t E[f'(\gamma_{t,flat})\,|\,F_s]H_s\delta\gamma^1_{s,flat} \tag{1.58}$$

$$+ \int_0^t E[f'(\gamma_{t,flat})\,|\,F_s]H_s\delta\gamma^1_{s,flat} + \int_0^t E[f(\gamma_{t,flat})\,|\,F_s]dH^1_s$$

On reconnaît dans la somme des deux premiers termes $\int_0^t \int_0^s E[d\sigma(s,u)\,|\,F_s]\delta\gamma_s dH^1_u$ et dans la somme des deux dernières la H -dérivée de $\int_0^t E[\sigma(s)\,|\,F_s]\delta\gamma_{s,flat}$.

COHOMOLOGIE DE BISMUT-NUALART-PARDOUX DE L'ESPACE DES LACETS ET COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD

Considérons une fonction F sur l'espace des chemins, qui est C^∞. Nous pouvons la restreindre sur l'espace des lacets et sur l'espace des lacets pointés ([L$_3$]. Théorème III.10]). Rappelons comment on procède. Nous considérons une suite F_N de fonctions cylindriques qui tend dans tous les espaces de Sobolev sur l'espace des chemins vers F. Nous considérons si p est un entier pair la mesure m sur $M \times M$:

$$f \to E_{Path}[| F_N - F_M |^p f(\gamma_0, \gamma_1)] \tag{2.1}$$

La densité de cette mesure moyennée sur la diagonale est $E_{Loop}[| F_N - F_M |^p]$ et en (x,x), c'est $p_1(x,x)E_{L_x(M)}[| F_N - F_M |^p]$. Pour obtenir des estimations de cette densité quand $N, M \to \infty$, nous prenons le champ de vecteurs sur l'espace des chemins $\tau_t(X_0(\gamma_0)(1-t) + t\tau^{-1}X_1(\gamma_1))$ où τ_1 est l'holonomie entre γ_0 et γ_1. Nous déduisons une formule d'intégration par partie :

$$\nu[< df, X_0(\gamma_0), X_1(\gamma_1) >| F_N - F_m |^p] \leq \| f \|_\infty \| F_N - F_M \|_{W_{q,1}(\nu)} \tag{2.2}$$

où $W_{q,r}(\nu)$ est la norme de Sobolev sur l'espace des chemins de [L$_3$]. Nous prenons une norme L^p avec r derivées; cela signifie que nous choisissons la norme Hilbert-Schmidt de d^r_∇, et nous intégrons dans L^p cette norme Hilbert-Schmidt aléatoire. Il est possible d'appliquer ceci aux fonctionnelles cylindriques car τ_t appartient à tous les espaces de Sobolev (Voir [L3]).

En itérant, nous déduisons que :

$$\nu[X_0^n(\gamma_0)X_1^m(\gamma_1)f \mid F_N - F_M \mid^p] \leq \| f \|_\infty \| F_N - F_M \|_{W_{q,n+m}(\nu)} \tag{2.3}$$

où X_0^n est l'itération de n champs de vecteurs au point de départ et X_1^m est l'itération de m champs de vecteurs au point d'arrivée. q dépend seulement de p et de $n+m$. Ainsi F_N sur l'espace des lacets est une suite de Cauchy dans tous les $L^p(\mu)$ et dans tous les $L^p(\mu_x)$.

Nous pouvons effectuer une analyse des normes L^p d'un noyau $k(s_1, .., s_n)$ en utilisant la connection ∇ : $\nabla \tau_t H_t = \tau_t \nabla H_t$. Nous déduisons que :

$$\| k(s_1, .., s_n) \|_{L^p(\mu)} \leq \| k(s_1, .., s_n) \|_{W_{q,r}(\nu)} \tag{2.4}$$

$$\| k(s_1, .., s_n) \|_{L^p(\mu_x)} \leq \| k(s_1, .., s_n) \|_{W_{q',r'}(\nu)} \tag{2.4)'$$

avec q, r, q', r' dépendant seulement de p.

Rappelons que si σ est une p-forme sur $L(M)$, nous pouvons définir sa norme $L^2_\gamma(norm) = \| \sigma \|^2_\gamma$ pour la structure d'espace de Hilbert (1.2) et sa norme $L^p(\mu)$ égale à $E_{path}[\| \sigma_\gamma \|^p]^{1/p}$. Les espaces de Hilbert (1.1) et (1.2) sont les mêmes, et nous pouvons prendre pour l'espace des chemins muni de la structure riemannienne (1.2) la base orthonormée formée de $\frac{\cos ns}{\sqrt{Cn^2+1}}, \frac{\sin ns}{\sqrt{Cn^2+1}}$ et d'un nombre fini d'orthogonaux ([J.L1]). Nous avons lorsque σ est issue d'une forme pure sur l'espace des chemins avec la structure Hilbertienne (1.1) :

$$\| \sigma \|^2_\gamma \leq \frac{C^n}{n!} \int_{[0,1]^n} \| \sigma(s_1, .., s_n) \|^2 \, ds_1..ds_n \tag{2.5}$$

En effet, $\|\sigma\|^2_\gamma$ est égal à sa norme Hilbert-Schmidt divisé par $n!$ pour la norme (1.2) du fait de l'antisymétrie. D'autre part, les dérivées de $\frac{\cos ns}{\sqrt{Cn^2+1}}$ et de $\frac{\sin ns}{\sqrt{Cn^2+1}}$ sont constituées d'un multiple de $\sin ns$ ou de $\cos ns$ par une quantité bornée. Dans le même esprit que [J.L1], nous définissons la norme L_p d'une collection de n formes par :

$$\| \sigma \|_p = \sum \frac{2^{np}}{(n-p)!} \| \sigma_n \|_{L^p(\mu)} \tag{2.6}$$

De plus, par (1.12), (2.4) et (2.6) :

$$\| \sigma_n \|_{L^p(\mu)} \leq K(n+1)^{r(p,q)} \| \sigma_n \|_{N,P,q,r,} \tag{2.7}$$

où K dépend seulement de p, q, r pour $q > p, r$ indépendant de n. C ne dépend pas de p, q, r et dépend seulement de C dans (2.5). Nous avons pris les normes de Nualart-Pardoux sur l'espace des chemins. Nous déduisons une estimation des normes L^p d'une forme sur l'espace des lacets à partir de ses normes de Nualart-Pardoux sur l'espace des chemins. En effet :

$$\| \sigma \|_p \leq C \| \sigma \|_{N,P,q,r} \tag{2.8}$$

car $C^n 2^{np}(n+1)^{r(p,q)} \leq C2^{nq}$ si $q > p$.

De plus l'image par restriction des formes qui sont C^∞ au sens de Nualart-Pardoux sur l'espace des chemins est une algèbre de formes $\Lambda_{rest,L}$ ou Λ_{rest_x} pour l'espace des lacets pointés, incluse dans tous les espaces L^p de formes.

Puisque $d\sigma$ est un tenseur et puisque les normes de Nualart-Pardoux de $d\sigma$ peuvent être estimées à partir des normes de Nualart-Pardoux de σ sur l'espace des chemins, nous pouvons définir d dans l'espace Λ_{rest,L_x} et dans l'espace $\Lambda_{rest,L}$. $d^2 = 0$ sur ces espaces et d applique ces espaces sur eux-mêmes.

Soit $\tilde{\omega}_n = \omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1}$ un élément de $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n} \otimes \Omega(M)$. $\Omega_.(M)$ est l'espace des formes sur M de degré non nul. Nous posons :

$$\sigma(\tilde{\omega}) = \omega_0(\gamma_0) \wedge \int_{0<s_1<..s_n<1} \omega_1(d\gamma_{s_1}, .) \wedge .. \wedge \omega_n(d\gamma_{s_n}, .) \wedge \omega_{n+1}(\gamma_1) \tag{2.9}$$

Rappelons que ([J.L$_1$]) que $\sigma(\tilde{\omega})$ est de degré $\deg \omega_0 + \deg \omega_{n+1} + \sum_{i=1}^n (\deg \omega_i - 1)$. Montrons sur un exemple comment fonctionne $\sigma(\tilde{\omega})$ quand $\omega_0 = 1$, $\omega_{n+1} = 1$ et quand ω_1 est de degré 2 ainsi que ω_2.

$$\sigma(\tilde{\omega}) = \int_{0<s<t<1} \omega_1(d\gamma_s, X_s)\omega_2(d\gamma_t, Y_t) - \int_{0<s<t1} \omega_1(d\gamma_s, Y_s)\omega_2(d\gamma_t, X_t) \tag{2.10}$$

Du fait de l'antisymétrie, il y a de plus en plus de sommes qui apparaissent quand la longueur de l'intégrale itérée croît et que le degré croît. De plus comme $X_s = \tau_s H_s$ et que H_s est à variation finie, ces intégrales ne sont qu'en apparence anticipatives et on peut calculer en particulier le noyau de $\sigma(\tilde{\omega})$.

Une forme de Chen n'est pas une forme cylindrique. Soit e_t l'application évaluation $\gamma \to \gamma_t$. Soient $\sigma_1, .., \sigma_n$ n formes sur la variété. Une forme cylindrique est égale par définition à $e_{t_1}^* \sigma_1 \wedge ... \wedge e_{t_n}^* \sigma_n$, et ne contient pas d'intégrales stochastiques.

Sur $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n} \otimes \Omega(M)$, nous introduisons la norme de Sobolev $C_{2,k}$ associée à l'opérateur $(dd^* + d^*d + 2)^k$. Si l'ensemble des ω_j constitue une base de vecteurs propres associée à $(dd^* + d^*d + 2)$, nous obtenons une base de l'espace de Hilbert $C_{2,k}$ en posant si $\tilde{\omega} = \sum \alpha_{i_0, i_1, .., i_{n+1}} \omega_{i_0} \otimes \omega_{i_1} ... \otimes \omega_{i_{n+1}}$

$$\| \tilde{\omega} \|_{2,k}^2 = \sum \alpha_{i_0, .., i_{n+1}}^2 \lambda_{i_0}^{2k} ... \lambda_{i_{n+1}}^{2k} \tag{2.11}$$

(λ_i est la valeur propre associée à la forme propre ω_i). Rappelons l'inégalité de Garding pour $\Omega(M)$:

$$\| \omega \|_{k,\infty} \leq \| \omega \|_{2,k'} \tag{2.12}$$

pour un certain $k' > k$ ([Gi]).

THEOREME II. 1. : Soit $\tilde{\omega}_n$ une suite de $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n} \otimes \Omega(M)$. $\tilde{\omega}_n$ n'est pas forcément un produit. Si pour tout k la série entiere :

$$\phi_{k,\tilde{\omega}}(z) = \sum z^n \frac{\| \tilde{\omega}_n \|_{2,k}}{\sqrt{n!}} \tag{2.13}$$

possède un rayon de convergence infini, la forme correspondante $\sum \sigma(\tilde{\omega}_n)$ est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux sur l'espace des chemins.

PREUVE : Supposons que $\tilde{\omega}_n = \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_n$ n'a pas de partie initiale et finale. Ecrivons que $\tau_t H_t = \tau_t(H_0 + \int_0^t h_s ds)$. Nous omettrons de décrire la contribution du terme H_0 : il y a au plus Cn^d éléments dans cette dernière et ils sont tous du même type que la contribution des termes obtenus, quand on considère seulement la contribution des termes en h, avec seulement quelques modifications mineures. Après avoir fait ce choix, le noyau de $\sigma(\tilde{\omega}_n)$ est la somme d'au plus $(\deg \omega_1 + .. + \deg \omega_n - n)! n^C$ noyaux du type $\int_{0<u_1..<u_n<1, u_1>\sup s^1,..,u_n>\sup s^n} \omega_1(d\gamma_{u_1}, \tau_{u_1}, .)...\omega_n(d\gamma_{u_n}, \tau_{u_n} .) = I_n(s)$. $(\deg \omega_1 + ... + \deg \omega_n - n)!$ est issu de l'antisymétrie d'une forme après avoir distribué les différents termes qui apparaissent dans un produit extérieur. Rappelons en effet que $\sigma \wedge \sigma'(X_1, .., X_r, X_{r+1}, .., X_{r+r'})$ est somme d'au plus $(r + r')!$ produits de σ, une r forme, appliquée à r vecteurs choisis de maniere ordonnée au hasard dans $(X_1, .., X_r, X_{r+1}, ..X_{r+r'})$ et de σ' appliquée aux r' vecteurs restants, modulo des signes qui sont sans importance quand on veut faire des estimations. Cela nous conduit à considérer s^i, l'ensemble des h^j où ω_i est prise. Il ne reste plus qu'à écrire $\omega_1(d\gamma_s, \tau_s \int_0^s h_u^1 du, .., \tau_s \int_0^s h_u^k du) = \int_{[0,s]^k} \omega(d\gamma_s, \tau_s h_{u_1}^1, .., \tau_s h_{u_k}^k) du_1..du_k)$ pour en déduire la formule précédente. Si nous ordonnons les s^i, il subsiste au moins $n!$ termes $I_n(s)$ mais cela est sans conséquence pour le calcul des normes de Nualart-Pardoux.

Les noyaux de $\nabla^k I_n(s)$ sont des intégrales itérées $I_n(s,t)$ où nous introduisons un nombre fini d'intégrales stochastiques auxiliaires entre $\sup s^i$ et $\sup s^{i+1}$. Pour montrer cela, nous utilisons que les dérivées covariantes du transport parallèle sont des intégrales stochastiques itérées avec des temps gelés, et que le produit de deux intégrales de Stratonovitch itérées avec des temps gelés est une somme d'intégrales itérées de Stratonovitch. Si on prend la dérivée d'ordre k d'une intégrale itérée de longueur n, nous obtenons au plus n^C intégrales itérées de Stratonovitch avec des termes gelés. On peut en effet appliquer la règle de Leibniz et le fait qu'un produit d'une intégrale itérée de longueur n par une intégrale itérée de longueur C est au plus la somme de $n^{C'}$ intégrales itérées de longueur $n + C$. Il y a au plus n^k termes qui apparaissent quand on dérive k fois. Quand nous intégrons dans $I_n(s,t)$, les quantités intégrées sont des polynômes en les dérivées covariantes des formes ω_i, en les dérivées covariantes du tenseur de courbure R, de l'holonomie et de son inverse (Cf [L$_3$] , theorème IV. 5 et theorème IV. 7). Après avoir effectué toutes ces opérations, nous obtenons un polynôme homogène en les ω_i (modulo leurs dérivées covariantes). Nous appliquons le théorème IV.5 de [L$_3$] et le théorème IV.7. Nous classons les s_i, t_i et les u_i et nous décomposons chaque $I_n(t,s)$ en une somme d'au plus $C^{n+1} n^{\deg \omega_1 + .. + \deg \omega_n - n}$ intégrales itérées avec des termes gelés en $sup\, s^i$ et t^{s^i}. Utilisons la formule de Stirling : $n^{\deg \omega_1 + .. + \deg \omega_n - n} < C^{n+1}(\deg \omega_1 + .. + \deg \omega_n - n - p)!$. Pour cela, nous estimons $exp[(Log n - Log K)K]$ en étudiant l'extremum de $K \to (Log n - Log K)K$ et nous montrons qu'il est borné par $exp[Cn]$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\deg \omega_1 + .. + \deg \omega_n - n - p)!} \| I_n(t,s) - I_n(t',s') \|_{L^p} \\
(2.14) \quad &\leq C(p) C^n \frac{\prod \| \omega_i \|_{k,\infty}}{\sqrt{n!}} \left(\sum \sqrt{| \sup s^i - \sup s'^i |} + \sum \sqrt{| t_i - t'_i |}\right)
\end{aligned}
$$

Rappelons brièvement comment on montre cette dernière propriété. On écrit :

$$I_n(t) = \Pi I_i(t_i, t_{i+1}) \tag{2.15}$$

après avoir décidé que tous les termes gelés sont écrits t_i et satisfont à $t_i \leq t_{i+1}$, ce qui est sans incidence pour calculer les constantes de Nualart- Pardoux. On utilise pour cela le fait que l'on manipule des intégrales itérées de produits. I_i est de longueur n_i et $\sum n_i \in [n-C, n+C]$. Par la formule de Stirling, $\Pi \frac{1}{n_i!} \leq \frac{C^n}{n!}$. Il suffit puisqu'on a un produit de I_i de montrer que $\|I_i(t_i, t_{i+1}) - I_i(t'_i, t'_{i+1})\|_{L^p} \leq \frac{C^{n_i+1}}{\sqrt{n_i!}} \Pi \|\omega\|_{k,\infty}$ où les ω dans le produit sont ceux qui figurent dans l'intégrale itérée. On utilise encore une fois que I_i est une intégrale itérée de produits pour conclure, en se ramenant soit au cas $t_i = t'_i$ soit au cas $t'_{i+1} = t_{i+1}$, et en classant les temps d'intégration qui sont dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}] \cap [t_i, t'_{i+1}]$ ou non. La conclusion découle du lemme de Schwartz ([J.L₁]) et de la formule de Stirling ([L₃]). Si il n'y a pas d'intégrales entre t_i et t_{i+1}, on utilise le fait qu'on a un polynôme de semimartingales en t_i et en t_{i+1}. Mais d'un autre côté :

$$\sqrt{| \sup s^i - \sup s'^i |} \leq 2 \sum_{j \in s^i} \sqrt{| s_j - s'_j |} \tag{2.16}$$

ce qui achève de prouver (2.14).

De plus :

$$\sup_{s,t} \| I_n(s,t) \|_{L^p} \leq C^n(p) \frac{\prod \| \omega_i \|_{k,\infty}}{\sqrt{n!}} \tag{2.17}$$

Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \| \sigma(\tilde{\omega}) \|_{N,p,r} &\leq n^d C(p)^n \frac{\prod \| \omega_i \|_{k,\infty}}{\sqrt{n!}} \leq \\ &\leq C(p)^n \frac{\prod \| \omega_i \|_{k,\infty}}{\sqrt{n!}} \leq C(p)^n \frac{\| \tilde{\omega} \|_{2,k'}}{\sqrt{n!}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Si nous prenons $\tilde{\omega}_n = \sum \alpha_{i_0,..,i_{n+1}} \omega_0 \otimes .. \otimes \omega_{n+1}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \| \sigma\tilde{\omega}_n \|_{N,P,p,r} &\leq \\ &\leq \frac{C(p)^n}{\sqrt{n!}} \sum | \alpha_{i_0,..,i_{n+1}} | \lambda_{i_0}^k .. \lambda_{i_{n+1}}^k \leq \\ &\leq \frac{C(p)^n}{\sqrt{n!}} \sum | \alpha_{i_0,..,i_{n+1}} | \lambda_{i_0}^{k+K_1} ... \lambda_{i_{n+1}}^{k+K_1} \lambda_{i_0}^{-K_1} .. \lambda_{i_{n+1}}^{-K_1} \leq \\ &\leq \frac{C(p)^n}{\sqrt{n!}} \| \tilde{\omega}_n \|_{2,k+K_1} (\sum \lambda_{i_0}^{-2K_1} ... \lambda_{i_{n+1}}^{-2K_1})^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{C(p)^n (\sum \lambda_i^{-2K_1})^{n/2}}{\sqrt{n!}} \| \tilde{\omega}_n \|_{2,k+K_1} \end{aligned} \tag{2.19}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs elliptiques, on peut choisir K_1 tel que $\sum \lambda_i^{-2K_1} < \infty$. Le théorème en découle.
◇

REMARQUE : Nous avons démontré que l'application intégrale itérée est continue de l'espace fonctionnel donné par la famille de normes (2.13) sur l'espace des formes C^∞ au sens de Nualart-Pardoux donné par la famille de normes (1.17).

Nous avons le même théorème pour l'espace des lacets libres. Nous prenons $\tilde{\omega}_n \in \Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n}$. Si $\tilde{\omega}_n$ est un produit, la seule différence est que nous avons pris des dérivées en le point final dans ω_i dans (2.18).

Nous prenons ici si $\tilde{\omega}$ est un produit :

$$\sigma(\tilde{\omega}) = \omega_0(\gamma_0) \wedge \int_{0<s_1<..<s_n<1} \omega_1(d\gamma_{s_1},.) \wedge ... \wedge \omega_n(d\gamma_{s_n},.) \tag{2.20}$$

Nous avons :

THEOREME II. 2 : Considérons une suite $\tilde{\omega}_n$ d'éléments de $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n}$. Si pour tout k, la série entière

$$\phi_{k,\tilde{\omega}}(z) = \sum z^n \frac{\| \tilde{\omega}_n \|_{2,k}}{\sqrt{n!}} \tag{2.21}$$

possède un rayon de convergence infini, l'intégrale de Chen correspondante est un élément de $\Lambda_{rest,L}$. De plus l'application intégrale itérée est continue de l'espace défini par la famille de normes (2.19) sur l'espace des formes L^p sur l'espace des lacets libres.

Si $\tilde{\omega}_n$ est un élément de $\Omega_.(M)^{\otimes n}$ (Il n'y a pas de forme en le point de départ), nous pouvons obtenir le même théorème pour l'espace des lacets pointés. Nous posons

$$\sigma(\tilde{\omega}_n) = \int_{0<s_1...<s_n<1} \omega_1(d\gamma_{s_1},.) \wedge ... \wedge \omega_n(d\gamma_{s_n},.) \tag{2.22}$$

THEOREME II.3 : Considérons une suite $\tilde{\omega}_n$ d'éléments de $\Omega_.(M)^{\otimes n}$. Si pour tout k la série entiere :

$$\phi_{k,\tilde{\omega}}(z) = \sum z^n \frac{\| \tilde{\omega}_n \|_{2,k}}{\sqrt{n!}} \tag{2.23}$$

possède un rayon de convergence infini, la somme correspondante d'intégrales itérées est un élément de Λ_{rest,L_x}. De plus l'application intégrale itérée est continue de l'espace défini par la famille de normes (2.23) sur l'espace des formes qui sont dans tous les L^p.

Introduisons un élément $\tilde{\omega} = \omega_0 \otimes \omega_1 \otimes \otimes .. \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1}$ de $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n} \otimes \Omega(M)$. Le bord de Hochschild b_p est défini par :

$$b_p\tilde{\omega} : b_{0,p}\tilde{\omega} + b_{1,p}\tilde{\omega} \tag{2.24}$$

avec

$$\begin{aligned} b_{0,p}\tilde{\omega} =& d\omega_0 \otimes \omega_1 ... \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1} - \\ &- \sum_{1\leq j\leq n+1} (-1)^{\epsilon_{i-1}} \omega_0 \otimes \omega_1 .. \otimes d\omega_i \otimes .. \otimes \omega_{n+1} \end{aligned} \tag{2.25}$$

où $\epsilon_i = \deg \omega_0 + \sum_{1\leq j<i} \deg \omega_j - 1$. $b_{1,p}$ prend ses valeurs dans $\Omega \otimes \Omega.(M)^{\otimes n} \otimes \Omega(M)$:

$$\begin{aligned} b_{1,p}\tilde{\omega} =& \omega_0 \wedge \omega_1 \otimes \omega_2 \dots \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1} - \\ &- \sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{\epsilon_i} \omega_0 \otimes \omega_1 \dots \otimes \omega_i \wedge \omega_{i+1} \dots \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Soit la famille de normes $\sum z^n \frac{\|\tilde{\omega}_n\|_{2,k}}{\sqrt{n!}}$.

THEOREME II.4. : $b_{0,p}$ et $b_{1,p}$ sont continus pour les normes précédentes.

PREUVE : Soit $\tilde{\omega}_n = \sum \alpha_{j_0,..,j_{n+1}} \omega_{j_0} \otimes .. \otimes \omega_{j_{n+1}}$. d commute avec $dd^* + d^*d$. De plus $d\omega_j$ est un vecteur propre associé à $dd^* + d^*d + 2$ avec la valeur propre λ_j. Mais un vecteur propre n'est pas forcément unique. Aussi écrivons-nous :

$$d\omega_{j_i} = \sum \gamma_{j_i,k} \omega_k \tag{2.27}$$

De plus $\| d\omega_{j_i} \|_{K,\infty} \leq C \| \omega_{j_i} \|_{K+1,\infty} \leq C \lambda_{j_i}^r$ pour r dependant seulement de K par l'inégalité de Garding. D'un autre côté, nous avons clairement :

$$\| d\omega_{j_i} \|_{2,K/2} \leq C \| d\omega_{j_i} \|_{K,\infty} \tag{2.28}$$

Nous déduisons de plus :

$$\sum \gamma_{j_i,k}^2 \lambda_k^K \leq \lambda_{j_i}^r \tag{2.29}$$

pour C ne dépendant que de K et pour $r \to \infty$ quand $K \to \infty$. D'un autre côté :

$$\begin{aligned} b_{0,p}\tilde{\omega}_n &= \sum \alpha_{j_0,..,j_{n+1}} \\ \sum_i (sign)\, \omega_{j_0} \otimes .. \otimes \omega_{j_{i-1}} & \otimes (\sum_k \gamma_{j_i,k}\omega_k) \otimes \omega_{j_{i+1}} \dots \otimes \omega_{j_{n+1}} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Nous distribuons et nous déduisons que :

$$b_{0,p}\tilde{\omega}_n = \sum \omega_{i_0} \otimes .. \otimes \omega_{i_j} \otimes .. \otimes \omega_{i_{n+1}} \sum_{l,j_l} (sign)\, \alpha_{i_0,..,i_{l-1},j_l,i_{l+1},..,i_{n+1}} \gamma_{j_l,i_l} \tag{2.31}$$

De plus :

$$\begin{aligned} &\| b_{0,p}\tilde{\omega}_n \|_{2,K}^2 = \\ &= \sum \lambda_{i_0}^{2K} \dots \lambda_{i_{n+1}}{}^{2K} \Big(\sum_{l,j_l} (sign)\, \alpha_{i_0,..,i_{l-1},j_l,i_{l+1},..,i_{n+1}} \gamma_{j_l,i_l}\Big)^2 \\ &\leq \sum \lambda_{i_0}^{2K} .. \lambda_{i_{n+1}}{}^{2K} (n+1) \sum_l \Big(\sum_{j_l} (sign)\, \alpha_{i_0,..i_{l-1},j_l,i_{l+1},..i_{n+1}} \gamma_{j_l,i_l}\Big)^2 \\ &\leq \sum \lambda_{i_0}^{2K} .. \lambda_{i_{n+1}}^{2K} (n+1) \sum_l \Big(\sum_{j_l} \alpha_{i_0,..,i_{l-1},j_l,i_{l+1},..,i_{n+1}}^2 \lambda_{j_l}^{K_1}\Big)\Big(\sum_{j_l} \gamma_{j_l,i_l}^2 \lambda_{j_l}^{-K_1}\Big) \\ &\leq C \sum \alpha_{i_0,..,i_{n+1}} \lambda_{i_0}^{K_2} \dots \lambda_{i_{n+1}}^{K_2} \sum_l \Big(\sum_{j_l,k} \gamma_{j_l,k}^2 \lambda_{j_l}^{-K_1} \lambda_k^{2K}\Big) \end{aligned} \tag{2.32}$$

pour $K_2 > K_1$ car $1 \leq \lambda_i$. Nous utilisons (2.29) et nous choisissons K_1 assez grand pour que $\sum_j \lambda_j^{r-K_1} < \infty$. Nous déduisons que :

$$\| b_{0,p}\tilde{\omega}_n \|_{2,K}^2 \leq C \| \tilde{\omega}_n \|_{2,K_2} \tag{2.33}$$

pour K_2 assez grand indépendant de n.

Etudions la seconde opération. Posons :

$$\omega_1 \wedge \omega_j = \sum \gamma_{i,j,k}\omega_k \tag{2.34}$$

La norme $\| \ . \ \|_{K,\infty}$ de $\omega_i \wedge \omega_j$ peut être estimée par la norme $\| \ . \ \|_{K,\infty}$ de chaque terme. Nous en déduisons après avoir utilisé l'inégalité de Garding ([Gi]) :

$$\sum_k \gamma_{i,j,k}^2 \lambda_k^K \leq C\lambda_i^r \lambda_j^r \tag{2.35}$$

pour C independant de i, j et pour $r \to \infty$ quand $K \to \infty$. D'un autre côté, nous avons :

$$\begin{aligned} b_{1,p}\tilde{\omega}_n &= \sum \alpha_{j_0,..,j_{n+1}} \\ \sum_i (sign)\, \omega_{j_0} \otimes ... \otimes \omega_{j-1} &\otimes (\sum_k \gamma_{j_i,j_{i+1},k}\omega_k \otimes \omega_{j+2}.. \otimes \omega_{n+1}) \\ &= \sum \omega_{i_0} \otimes ...\otimes \omega_{i_n} \sum_{l,l',j} (sign)\, \alpha_{i_0,..,i_{j-1},l,l',i_{j+2},..,i_{n+1}} \gamma_{l,l',i_j} \end{aligned} \tag{2.36}$$

De plus :

$$\begin{aligned} &\| b_{1,p}\tilde{\omega}_n \|_{2,K}^2 \leq \\ \sum \lambda_{i_0}^{2K}\lambda_{i_1}^{2K}..\lambda_{i_{n+1}}^{2K} n &\sum_j (\sum\nolimits_{l,l'} \alpha_{i_0,..,i_{j-1},l,l',i_{j+2},..,i_{n+1}} \gamma_{l,l',i_j})^2 \\ &\leq C \sum \lambda_{i_0}^{2K}\lambda_{i_1}^{2K}..\lambda_{i_{n+1}}^{2K} n \sum_j (\sum_{l,l'} \alpha_{i_0,..,i_{j-1},l,l',i_{j+2},..i_{n+1}}^2 \lambda_l^{K_1}\lambda_{l'}^{K_1}) \\ &\quad (\sum_{l,l'} \gamma_{l,l',i_j}^2 \lambda_l^{-K_1}\lambda_{l'}^{-K_1}) \end{aligned} \tag{2.37}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz car $1 < \lambda_i$. Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} &\| b_{1,p}\tilde{\omega}_n \|_{2,K}^2 \leq \\ &\leq \sum \lambda_{i_0}^{K_2}\lambda_{i_1}^{K_2}..\lambda_{i_{n+1}}^{K_2} \alpha_{i_0,..,i_{n+1}}^2 \sum_{i,j,k} \gamma_{i,j,k}^2 \lambda_k^{2K}\lambda_i^{-K_1}\lambda_j^{-K_1} \\ &\leq C \| \tilde{\omega}_n \|_{2,K_2}^2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

pour C et K_2 choisis assez grand indépendamment de n.

$\diamond$

Si nous prenons seulement $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n}$,$b_{0,p}$ n'est pas modifié mais $b_{1,p}$ est transformé. Il n'y a pas de ω_{n+1} dans (2.24) et le dernier terme est transformé en $(-1)^{(\deg \omega_n - 1)\epsilon_{n-1}}(\omega_n \wedge \omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_{n-1})$. Nous prenons la même famille de normes qu'avant. Les opérateurs différentiels modifiés sont appellés b_0 et b_1. Nous obtenons le théorème suivant dont la preuve est la même que celle du précédent :

THEOREME II.5 : b_0 et b_1 sont continus pour la famille de normes (2.19).

Nous pouvons faire la même chose pour $\Omega_.(M)^{\otimes n}$. Nous ne prenons pas de dérivées dans la première composante et dans b_1 le terme en $\omega_n \wedge \omega_0 \otimes \omega_1 .. \otimes \omega_{n-1}$. Nous obtenons deux opérateurs différentiels $b_{0,x}$ et $b_{1,x}$. Nous considérons le même ensemble de normes que précédemment.

THEOREME II.6 : $b_{0,x}$ et $b_{1,x}$ sont continus pour la famille de normes (2.21).

Considérons une fonction C^∞ f . Soit $S_i(f)$ l'opérateur défini de la manière suivante : entre ω_i et ω_{i+1}, nous introduisons f dans un produit $\tilde{\omega}_n$. Le noyau algébrique de l'application intégrale de Chen itérée est constitué des combinaisons linéaires finies de $[b, S_i(f)]\tilde{\omega}_n$, b étant le bord de Hochschild associé à chaque espace algébrique ([G.J.P]). D_{ent} est la clôture de cet espace défini algébriquement pour la famille de normes utilisée dans chacun des trois cas. Nous notons suivant les indications de [Co] $N_{ent}(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M))$ le quotient du premier espace par D_{ent}. $N_{ent}(\Omega(M))$ désigne le quotient du second espace par D_{ent}. Dans le troisième cas, nous obtenons $N_{ent}(R, \Omega, (M), R)$. Dans tous les cas, nous prenons la topologie quotient.

Nous avons :

THEOREME II.7 : le diagramme de complexes suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} N_{ent}(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M)) & \rightarrow & N_{ent}(\Omega(M)) & \rightarrow & N_{ent}(R, \Omega(M), R) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cap N_{p,r}(P) & \rightarrow & \Lambda_{rest,L} & \rightarrow & \Lambda_{rest,L_x} \end{array}$$

Chaque application le définissant est continue, exceptée pour l'application restriction entre $\Lambda_{rest,L}$ et Λ_{rest,L_x}. Les applications verticales sont constituées des intégrales de Chen itérées stochastiques.

PREUVE : La seule chose à prouver est que c'est un diagramme de complexes. Il est suffisant de montrer cette propriété pour des sommes finies. Dans le cas des lacets C^∞, c'est un résultat de [G.J.P]. Il reste à appliquer le théorème de positivité de [B.L] (Le lecteur peut trouver dans [L_3] une preuve stochastique directe). Rappelons que l'application restriction entre $N_{ent}(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M))$ et $N_{ent}(\Omega(M))$ est définie par :

(2.39) $\omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_{n+1} \rightarrow (-1)^{\deg \omega_{n+1}(\deg \omega_0 + .. + \deg \omega_n - n)} \omega_{n+1} \wedge \omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_n$

$\diamond$

Si la cohomologie stochastique de l'espace des chemins est $H(M)$, le théorème suivant montrerait que la premiere application verticale dans le théorème II.7 est un isomorphisme :

THEOREME II.8. : Le groupe de cohomologie de $N_{ent}(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M))$ est égal au groupe de cohomologie $H(M)$ de M.

PREUVE : Définissons $\alpha : \Omega(M) \rightarrow N_{ent}(\Omega(M), \omega(M), \Omega(M))$ par la formule $\alpha\omega = \omega \otimes 1$. $\sigma\alpha = \beta$ où β associe à la forme ω sur M la forme $\omega(\gamma_0)$ sur l'espace des chemins de M. La preuve est très proche de celle de [G.J.P] avec une argumentation analytique en plus. Nous utilisons l'application contraction de $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes n} \otimes \Omega(M)$ sur $\Omega(M) \otimes \Omega_.(M)^{\otimes(n+1)} \otimes \Omega(M)$: $s(\omega_0 \otimes \omega_1 .. \otimes \omega_{n+1}) = \omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_{n+1} \otimes 1$. Si ω_{n+1} est une 0 forme, $s(\omega_0 \otimes \otimes .. \otimes \omega_{n+1}) = 0$. s est compatible avec les noyaux définissant $N(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M))$ et est clairement continu pour la famille de normes définissant $N(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M))$. De plus :

$$\begin{aligned} b_{0,p}s(\tilde{\omega}) &= b_{0,p}(\omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_{n+1} \otimes 1) = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n+1} (sign)\, \omega_0 \otimes .. \otimes \omega_{i-1} \otimes d\omega_i \otimes \omega_{i+1} .. \omega_{n+1} \otimes 1 = s b_{o,p} \tilde{\omega} \end{aligned} \tag{2.40}$$

où $\tilde{\omega} = \omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_{n+1}$. D'un autre côté,

$$\begin{aligned} b_{1,p}s(\tilde{\omega}) &= b_{1,p}(\omega_0 \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_{n+1} \otimes 1) = \\ &= \sum_{1 \leq n} (sign) \omega_0 \otimes .. \otimes \omega_{i_1} \otimes \omega_i \wedge \omega_{i+1} \otimes \omega_{i+2} \otimes \omega_{n+1} \otimes 1 + \\ &+ (sign)\, \omega_0 \otimes .. \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1} = s b_{1,p}(\tilde{\omega}) + (sign) \tilde{\omega} \end{aligned} \tag{2.41}$$

quand $n > 0$.

Quand $n = 0$,

$$\begin{aligned} b_{1,p}s(\omega_0 \otimes \omega_1) &= b_{1,p}(\omega_0 \otimes \omega_1 \otimes 1) = \\ &= \omega_0 \wedge \omega_1 \otimes 1 + (sign) \omega_0 \otimes \omega_1 = \\ &= s b_{1,p}(\omega_0 \otimes \omega_1) + (sign)\, \tilde{\omega} + (sign)\, \alpha \eta(\omega_0 \otimes \omega_1) \end{aligned} \tag{2.42}$$

où $\eta(\omega_0 \otimes \omega_1) = \omega_0 \wedge \omega_1$

Dans (2.42), nous introduisons le signe qui apparaît dans (2.41) dans s. De manière plus précise, $\tilde{s}(\tilde{\omega}) = (-1)^{\deg \omega_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} (\deg \omega_i - 1)} s(\tilde{\omega})$. Nous obtenons :

$$b_{0,p} \tilde{s} + \tilde{s} b_{0,p} = 0 \tag{2.43}$$

$$b_{1,p} \tilde{s} + \tilde{s} b_{1,p} = 1 + \alpha \tilde{\eta} \tag{2.44}$$

where $\tilde{\eta}(\omega_0 \otimes \omega_1) = (-1)^{deg \omega_0} \omega_0 \wedge \omega_1 \otimes 1$.

Considérons $\tilde{\omega}_\infty$ un élément de $N_{ent}(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M))$ tel que $b\tilde{\omega}_\infty = 0$. $\tilde{s}\tilde{\omega}_\infty$ est un élément de $N_{ent}(\Omega(M), \Omega(M), \Omega(M))$ et

$$\tilde{\omega}_\infty = b \tilde{s} \tilde{\omega}_\infty + \alpha \tilde{\eta} \tilde{\omega}_\infty \tag{2.45}$$

De plus $\tilde{\omega}_\infty$ et $\alpha \tilde{\eta} \tilde{\omega}_\infty$ sont dans la même classe de cohomologie, ce qui prouve le résultat car $\alpha \tilde{\eta} = (sign)$ sur $\Omega(M)$.

APPENDICE

THEOREME A.1. : Soit F une fonctionnelle sur le modèle limite qui est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux. Elle est C^∞ au sens de Nualart-Pardoux sur l'espace des chemins.

PREUVE : Soit $\sigma_n = \sigma(\gamma_{u_1,flat}, .., \gamma_{u_n,flat}), 0 \leq u_1, .., < u_n = 1$ pour une subdivision dyadique de longueur 2^k. Soit $F_n = E[F \mid \sigma_n]$. C'est une fonctionnelle qui dépend seulement d'un nombre fini de variables. De plus les noyaux de F_n

sont $\frac{1}{\prod(u_{k_i+1}-u_{k_i})}\int_{\prod[u_{k_i},u_{k_i+1}]} E[k(t_1,..,t_r) \mid \sigma_n]dt_1..dt_n$ où s_i est un élément de $[u_{k_i}, u_{k_i+1}]$ (k désigne l'un des noyaux de F) . Soit $F_n = F_n(\gamma_0, \gamma_{u_{i+1},flat} - \gamma_{u_i,flat}) = F_n(\gamma_0, \int_{u_i}^{u_{i+1}} \tau_s^{-1} d\gamma_s) = G_n(\gamma)$. G_n et F_n ne sont pas C^∞ au sens de Nualart-Pardoux. Mais G_n est C^∞ au sens de [L3] : $G_n \to F$. Pour montrer que G_n est une suite de Cauchy sur l'espace des chemins, nous allons considérer le cas le plus compliqué : dans la dérivée d'ordre r de G_n, nous ne prenons que les dérivées covariantes de τ_s^{-1}. Nous trouvons une somme d'expressions algébriques en les noyaux de F_n dans le cas plat et en les dérivées de $\int_{u_i}^{u_{i+1}} \tau_s^{-1} d\gamma_s$. Nous savons par [L3] comment se comportent les dérivées de l'holonomie au temps s : ce sont des intégrales itérées avec des temps d'intégration gelés plus petits que s. Entre deux temps gelés, nous intégrons des expressions algébriques en τ,τ^{-1} et en les dérivées covariantes du tenseur de courbure. Ce sont des intégrales de Stratonovitch non anticipatives. Un produit d'intégrales itérées de Stratonovitch est une somme d'intégrales itérées de Stratonovitch. Ainsi les noyaux considérés associés à G_n sont des intégrales de Stratonovitch : entre deux temps gelés, nous intégrons des expressions universelles en τ, τ^{-1} et en les dérivées covariantes du tenseur de courbure, qui ne sont pas anticipatives, et une expression linéaire dans les noyaux de F_n, terme anticipatif mais constant par morceaux. Soit H_n cette expression. Soit $H_{n'}$ la même expression quand le pas de la subdivision décroit. Soit $(H_n - H_{n'})(t_1,..,t_k)$ la différence de tels noyaux. $E[(H_n - H_{n'})(t_1,..,t_k)^p]$ pour un entier pair est la somme d'espérance d'intégrales itérées avec les mêmes temps gelés : les termes anticipatifs sont des polynômes de degré r en les noyaux de $F_n - F_{n'}$, qui sont anticipatifs mais constants par morceaux. Les termes non anticipatifs sont des polynômes en τ,τ^{-1} et les dérivée covariantes du tenseur de courbure ([L3]). Nous convertissons les intégrales de Stratonovitch en intégrales d'Itô. Si il y a r_j temps à intégrer entre $[t_j, t_{j+1}]$ dans $(H_n - H_{n'})$, il reste après cette conversion au moins $r_j p/2$ intégrales à manipuler entre t_j et t_{j+1} dans l'espérance. Nous intégrons par partie en $\delta\gamma_u$ pour le dernier temps u où une intégrale d'Itô apparaît. Modulo les termes anticipatifs, c'est presque une divergence, mais il y a une contribution du tenseur de Ricci qui apparaît dans les formules d'intégrations par parties de Bismut ([L3]).

Pour surmonter cette difficulté, nous écrivons l'espace tangent sous la forme de Bismut. Nous notons par D l'opération de différentiation covariante d'un champ de vecteurs le long d'un chemin courbe. Un vecteur le long d'un chemin sous la forme de Bismut est solution de :

$$DX_s = -1/2 S_{X_s} ds + \tau_s h_s ds \tag{a.1}$$

où S est le tenseur de Ricci. De plus $X_t = \tau_t^B(H_0 + \int_0^t \tau_s^{B-1} \tau_s h_s ds)$ et $\tau_t^B = \tau_t O_t$ où

$$dO_t = -1/2 \tau_t^{-1} S_{\tau_t O_t} dt \tag{a.2}$$

Cela nous montre qu'il y a une relation entre les champs de vecteurs écrits dans la forme de Bismut et ceux écrits dans la forme de [J.L1] ([L3]) : si F est une fonction C^∞ sur l'espace des chemins courbes, les noyaux de F écrits pour l'espace tangent dans la forme de [J.L1] et dans la forme de Bismut sont reliés : si les premiers satisfont aux conditions de Nualart-Pardoux, les seconds aussi et réciproquement. Leurs familles de normes au sens de Nualart-Pardoux sont équivalentes. Cela provient du fait que les noyaux d'une solution d'équation différentielle stochastique satisfont aux conditions de Nualart-Pardoux puisqu'ils sont donnés par des intégrales itérées. Ceci se justifie de la manière suivante : soit $d^r_{\nabla,B}F$ la dérivée d'ordre r au sens de Bismut. Supposons par récurrence que ses dérivées covariantes au sens de [J.L1] satisfont aux conditions de Nualart-Pardoux, le temps de la dérivée de Bismut inclus, et que ses normes de Nualart-Pardoux soient estimées par les normes de Nualart-Pardoux au sens de cet article. Utilisons la relation algébrique existante entre $\nabla d^r_{\nabla,B}F$ et $d^{r+1}_{\nabla,B}F$ donnée par (a.1) et (a.2). Cela permet de conclure par induction.

Après avoir effectué au plus rp integrations par parties puisqu'il y a au plus des produits de rp termes anticipatifs, nous trouvons que notre espérance est égale à l'espérance d'intégrales itérées sans termes d'Itô anticipatifs et en les noyaux de $F_n - F_{n'}$ avec des contractions possibles pour les termes qui sont issus des formules d'intégrations par parties : les deux genres de noyaux apparaissent. Nous augmentons le nombre de dérivées par rp. Dans les intégrales itérées, il y a des termes non anticipatifs en τ_t, τ_t^{-1},O_t, O_t^{-1}, les dérivées covariantes du tenseur de Ricci et du tenseur de courbure.

Il reste à passer à la limite : nous voyons que des demi-limites sur les diagonales apparaissent quand nous passons à la limite. Pour passer à la limite, il y a deux procédures dans l'intégrale approximée au lieu d'une comme dans [L3] : π_n est la procédure d'espérance conditionnelle du noyau de F et χ_n est la procédure de moyennisation. Soit $\operatorname{Ker} F$ un noyau de F. Le noyau associé de F_n est $\pi_n\chi_n \operatorname{Ker} F$. Nous avons :

$$(a.3) \qquad \pi_n\chi_n\operatorname{Ker} F - \pi_{n'}\chi_{n'}\operatorname{Ker} F = \pi_n(\chi_n - \chi_{n'})\operatorname{Ker} F + (\pi_n - \pi_{n'})\chi_{n'}\operatorname{Ker} F$$

$\pi_n\operatorname{Ker} F$ satisfait aux conditions de Nualart-Pardoux avec de meilleures constantes que l'original $\operatorname{Ker} F$. Nous pouvons appliquer le lemme de Kolmogorov. Notons par U le produit de deux fois la même composante connexe du complémentaire des diagonales dans le cube constitué par les paramètres. Nous avons :

$$(a.4) \qquad \| \sup_U \frac{| E[k(t_1,..,t_k) \mid \sigma_n] - E[k(t'_1,..,t'_k) \mid \sigma_n] |}{\sum(| t_i - t'_i |)^\alpha} \|_{L^p} < \infty$$

pour un certain $\alpha > 0$.

Les normes L^p précédentes sont plus petites que les normes L^p obtenues quand nous ne prenons pas l'espérance conditionnelle. Nous avions obtenu une expression polynomiale en les noyaux de $F_n - F'_n$; nous la décomposons en une expression polynomiale en $(\pi_n - \pi_{n'})\chi_n\operatorname{Ker} F$ et en $(\chi_n - \chi_{n'})\pi_n\operatorname{Ker} F$. Le premier type de termes tend vers zero uniformément dans tous les L^p par utilisation du lemme de Kolmogorov et de $(a.4)$ quand $n \to \infty$ et $n' \to \infty$. Cela est aussi vrai pour le second terme. Cela nous montre que nous avons une suite de Cauchy dans les espaces de Sobolev à la manière de [L3].

Si nous prenons la procédure de moyennisation, les expressions précédentes convergent vers les intégrales de Stratonovitch obtenues quand nous faisons formellement le changement d'espace tangent dû à la formule de Bismut ([Bi1]) :

$$(a.5) \qquad d\tilde{h}_s = \int_0^s \tau_u^{-1} R(d\gamma_u, X_u)\tau_u.d\gamma_{s,flat} + h_s ds$$

qui découle du fait que $\nabla d\gamma_{s,flat} = (\nabla\tau_s^{-1})d\gamma_s + \tau_s^{-1}\nabla d\gamma_s$ et que $\nabla_X d\gamma_s = \tau_s H'_s ds$ si $X_s = \tau_s H_s$. Mais $E[k(s_1,..,s_r) \mid \sigma_n] - k(s_1,..,s_r)$ tend uniformément vers 0 dans tous les L^p, par application du lemme de Kolmogorov. Ainsi les expressions limites sont les intégrales de Stratonovitch obtenues quand nous prenons des sommes de Riemann sans conditionner.
$\diamond$

Le lemme suivant permet de démontrer complètement le théorème.

LEMME A.2. : Soit $F(s,t,u,\tilde{s})$ une variable aléatoire qui vérifie les conditions de Nualart-Pardoux, les paramètres inclus. Alors l'intégrale de Stratonovitch $\int_s^t < \tau_u F(s,t,u,\tilde{s}), d\gamma_u >$ satisfait aux conditions de Nualart-Pardoux.

PREUVE : Puisque $F(s,t,u,\tilde{s})$ vérifie les conditions de Nualart- Pardoux, nous pouvons appliquer la règle de dérivation suivant un paramètre. Ainsi il suffit pour montrer notre propriété de prouver que les intégrales de Stratonovitch satisfont aux conditions de Nualart-Pardoux sans avoir à considérer leurs dérivées. Ecrivons après avoir appliqué le principe général du théorème I.2 :

$$\begin{aligned}
&\int_s^t < \tau_u F(s,t,u,\tilde{s}), d\gamma_u > - \int_{s'}^{t'} < \tau_u F(s',t',u,\tilde{s}'), d\gamma_u >= \\
(a.6)\qquad &= \sum_i \int_{\tilde{s}_i}^{\tilde{s}_{i+1}} < \tau_u F(s,t,u,\tilde{s}), d\gamma_u > - \int_{\tilde{s}'_i}^{\tilde{s}'_{i+1}} < \tau_u F(s,t,u,\tilde{s}), d\gamma_u > \\
&= \sum_i A_i
\end{aligned}$$

Nous avons divisé les intervalles d'intégration $[s,t]$ et $[s',t']$ en petits intervalles d'intégration comme dans (1.53), les $\tilde{s}_i$ et les $\tilde{s}'_i$ étant les éléments de $\tilde{s}$ intérieurs à $[s,t]$ (respectivement à $[s',t']$) et nous avons supposé qu'ils étaient rangés par ordre croissant pour simplifier.

Il y a deux cas, comme dans ce qui suit (1.53), pour estimer la norme L^p de A_i. Le premier est quand $[\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}] \cap [\tilde{s}'_i, \tilde{s}'_{i+1}] = \emptyset$. Nous intégrons par parties et nous obtenons pour calculer $E[A_i^p]$ des intégrales de polynômes de degré p en les noyaux de Bismut de $F(s,t,u,\tilde{s})$ et de $F(s',t',u,\tilde{s})$, et la longueur de chacune de ces intégrales est au moins $p/2$. Les mêmes contributions auxiliaires en le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et le transport parallèle apparaissent. Nous obtenons dans ce cas une estimation de la norme L^p de A_i en les termes des constantes de Nualart-Pardoux de F de seconde espèce (1.12) et en les termes de $\sqrt{\mid \tilde{s}_{i+1} - \tilde{s}_i \mid} + \sqrt{\mid \tilde{s}'_{i+1} - \tilde{s}'_i \mid}$ qui est plus petite que $\sqrt{\mid \tilde{s}'_{i+1} - \tilde{s}_{i+1} \mid} + \sqrt{\mid \tilde{s}'_i - \tilde{s}_i \mid}$.

Le deuxieme cas est quand l'intersection de $[\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}]$ et de $[\tilde{s}'_i, \tilde{s}'_{i+1}]$ est non vide. Si nous intégrons la différence des noyaux sur l'intersection des deux intervalles, les conditions de Nualart-Pardoux en $(s,t,u,\tilde{s})$ et en $(s',t',u,\tilde{s}')$ sont globalement vérifiées. Nous obtenons après l'usage de formules d'intégrations par parties adéquates une estimation de la norme L^p de la différence d'intégrales considérée en $\sum_j \sqrt{\mid \tilde{s}_j - \tilde{s}_{j+1} \mid} + \sqrt{\mid t - t' \mid} + \sqrt{\mid s - s' \mid}$ fois les constantes de Nualart-Pardoux de F de la première espèce (1.11). Si nous intégrons en dehors de l'intersection de ces deux intervalles, nous obtenons une borne en les termes de

$\sqrt{|\tilde{s}'_{i+1} - \tilde{s}_{i+1}|} + \sqrt{|\tilde{s}'_i - \tilde{s}_i|}$ et des constantes de Nualart-Pardoux de la deuxième espèce (1.12) de F.
$\diamond$

Le lemme A.2 permet de démontrer le théorème suivant après utilisation de la formule de changement de variable de Bismut (a.5) :

THEOREME A.3 : Soit une forme de degré fini sur le modèle limite qui satisfait aux conditions de Nualart-Pardoux. Alors elle satisfait aux conditions de Nualart-Pardoux sur le modèle courbe.

PREUVE : En effet ses noyaux courbes sont donnés en suivant les considérations de la premiere partie par des intégrales de Stratonovitch itérées en ses noyaux plats.
$\diamond$

BIBLIOGRAPHIE

[Ar.M] Airault H., Malliavin P : Quasi sure analysis. Publication Université Paris VI.

[Ar.Mi] Arai A., Mitoma I. : De Rham-Hodge-Kodaira decomposition in infinite dimension. Math. Ann. 291 (1991), 51-73.

[At] Atiyah M. : Circular symmetry and stationary phase approximation. pp. 43-59. Colloque en l'honneur de L.Schwartz. Astérisque 131 (1985).

[B.L] Ben Arous G., Léandre : Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale (II) : P.T.R.F. 90 (1991), 377-402.

[B.V] Berline N., Vergne M. : Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. Duke Math. Jour. 50 (1983), 539-548.

[Bi_1] Bismut J.M. : Large deviations and the Malliavin Calculus. Progress in Math. 45. Birkhaüser. (1984).

[Bi_2] Bismut J.M. : Index theorem and equivariant cohomology on the loop space. C.M.P. 98 (1985), 213-237.

[Bi_3] Bismut J.M. : Localisation formulas, superconnections and the index theorem for families. C.M.P. 103 (1986), 127-166.

[Ch] Chen K.T. : Iterated path integrals of differential forms and loop space homology. Ann. Math. 97 (1983), 213-237.

[Co] Connes A. : Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of Θ-summable Fredholm modules. K-theory 1 (1988), 519-548.

[Dr.R] Driver B., Röckner M. : Construction of diffusion on path and loop spaces of compact riemannian manifold. C.R.A.S. 315. Série I. (1992),603 -608.

[El_1] Elworthy K.D. : Stochastic differential equations on manifolds. L.M.S. Lectures Notes Serie 20. Cambridge University Press (1982).

[El_2] Elworthy K.D. : Geometric Aspects of diffusions on manifolds. pp 277-427. In Ecole d'été de Saint-Flour 1987. P.L. Hennequin édit. Lecture Notes in Math. 1362. Springer (1989).

[E.L] Emery M., Léandre R. : Sur une formule de Bismut. pp 448-452. Séminaire de Probabilités XXIV. Lecture Notes in Maths. 1426. Springer (1990).

[F.M] Fang S., Malliavin P. : Stochastic Calculus on Riemannian manifold. Preprint.

[Ge_1] Getzler E. : Dirichlet form on a loop space. Bull. Sciences. Math. 2. 113 (1989), 157-174.

[Ge$_2$] Getzler E. : Cyclic homology and the path integral of the Dirac operator. Preprint.
[G.J.P] Getzler E., Jones J.D.S. Petrack S. : Differential forms on a loop space and the cyclic bar complex. Topology 30 (1991), 339-373.
[Gi] Gilkey P.B. : Invariance theory, the heat-equation and the Atiyah-Singer theorem. Math. Lect. Series. 11. Publish and Perish.
[Gr] Gross L. : Potential theory on Hilbert space. J.F.A. 1 (1967), 123-181.
[H.K] Hoegh-Krohn R. : Relativistic quantum statistical mechanics in 2 dimensional space time. C.M.P. 38 (1974), 195-224.
[I.W$_1$] Ikeda N., Watanabe S. : Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland (1981).
[J.L$_1$] Jones J., Léandre R. : L^p Chen forms over loop spaces. pp 104-162. In Stochastic Analysis. M.Barlow. N.Bingham edit. Cambridge University Press (1991).
[J.L$_2$] Jones J., Léandre R. : A stochastic approach to the Dirac operator over the free loop space. In preparation.
[J.P] Jones J., Petrack S. : The fixed point theorem in equivariant cohomology. Preprint.
[K$_1$] Kusuoka S. : De Rham cohomology of Wiener-Riemannian manifolds. Preprint.
[K$_2$] Kusuoka S. : More recent theory of Malliavin Calculus. Sugaku.5.2. (1992), 155-173.
[L$_1$] Léandre R. : Applications quantitatives et qualitatives du calcul de Malliavin. pp 109-133. Proc. Col. Franco-Japonais. M. Métivier. S. Watanabe édit. Lectures Note Math. 1322. Springer. (1988). English translation. pp 173-197. Geometry of Random motion. R. Durrett. M. Pinsky edit. Contemporary Math. 73. (1988).
[L$_2$] Léandre R. : Integration by parts formulas and rotationally invariant Sobolev Calculus on free loop spaces. In infinite dimensional problems in physics. XXVIII winter school of theoretical physics. Gielerak R. Borowiec A. edit. Journal of Geometry and Physics. 11 (1993), 517-528.
[L$_3$] Léandre R. : Invariant Sobolev Calculus on the free loop space. Preprint.
[L$_4$] Léandre R. : Loop space of a developable orbifold. To be published in the proceedings of the symposium over the brownian sheet. E.Merzbach. J.P.Fouque edts.
[L$_5$] Léandre R. : Brownian motion over a Kähler manifold and elliptic genera of level N. To be published in Stochastic analysis and Applications in Physics. L.Streit edt.
[L.R]Léandre R., Roan S.S. : A stochastic approach to the Euler-Poincaré number of the loop space of a developable orbifold. To be published In Journal of Geometry and Physics.
[Nu] Nualart D. : Non causal stochastic integral and calculus. p80-129. In stochastic Analysis. A. Korezlioglu. S. Ustunel edits. Lectures Notes. Math 1316. (1988).
[N.P] Nualart D., Pardoux.E : Stochastics calculus with anticipating integrands. Pro. The. Rela. Fields. 78 (1988), 535-581.
[Ra] Ramer R. : On the de Rham complex of finite codimensional forms on infinite dimensional manifolds. Thesis. Warwick University. 1974.
[Sh] Shigekawa I. : De Rham-Hodge-Kodaira's decomposition on an abstract Wiener space. J. Math. Kyoto. Uni. 26 (1986), 191-202.

[Sm] Smolyanov O.G. : De Rham currents and Stoke's formula in a Hilbert space. Soviet Math. Dok. 33. 3 (1986), 140-144.
[Sm.W] Smolyanov O.G., v.Weizsäcker H. : Differentiable families of measures. Jour. Funct.Ana.118.2. (1993),454-474.
[T] Taubes C. : S^1 actions and elliptic genera. C.M.P. 122 (1989), 455-526.
[Ug] Uglanov Y : Surface integrals and differential equations on an infinite dimensional space. Sov. Math. Dok. 20.4. (1979), 917-920.
[Wa] Watanabe S. : Stochastic analysis and its application. Sugaku.5.1 (1992),51-71.

Léandre Rémi
I.R.M.A. Département de mathématiques
Université Louis Pasteur
Rue Descartes. 67084. Strasbourg
FRANCE