CATHERINE RAINER

Projection d'une diffusion sur sa filtration lente

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 228-242
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__228_0>

Projection d'une diffusion sur sa filtration lente.

Catherine RAINER

Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, tour 56, 3e étage, 4, place Jussieu, Paris 75252 Cedex 05.

1 Introduction.

Soient $(\mathcal{F}_t)$ une filtration vérifiant les conditions habituelles et H un fermé $(\mathcal{F}_t)$-optionnel. Posons,

$$\forall t \geq 0, G_t = \sup\{s \leq t, s \in H\}, \ D_t = \inf\{s > t, s \in H\}.$$

On appelle 'filtration lente associée à $(\mathcal{F}_t)$ et à H', $(\mathcal{H}_t)$, la filtration $(\mathcal{F}^+_{G_t})$ rendue continue à droite, où, pour toute variable positive L, $\mathcal{F}^+_L$ (resp. $\mathcal{F}^-_L$) désigne la tribu engendrée par les variables Z_L, (Z_t) décrivant les processus $(\mathcal{F}_t)$-progressifs (resp. prévisibles).

Dans cet article, $(\mathcal{F}_t)$ est engendrée par une diffusion réelle à l'échelle naturelle, (X_t), et H est l'ensemble de ses zéros. Nous nous proposons de calculer la projection optionnelle de (X_t) sur la filtration $(\mathcal{H}_t)$, $({}^OX_t)$, dans le cas où (X_t) est une martingale à valeurs dans un ouvert de $I\!R$ contenant zéro.
Cette projection est bien connue, quand (X_t) est un mouvement brownien : c'est la première martingale d'Azéma, $\mu_t = (\text{sgn}X_t)\sqrt{\frac{\pi}{2}(t - G_t)}$.
Dans le cas général, on montrera que

$${}^OX_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1_{\{X_t>0\}}}{N_+(]t,+\infty])} - \frac{1_{\{X_t<0\}}}{N_-(]t,+\infty])}\right),$$

où N_+ (resp. N_-) est la mesure de Lévy des excursions positives (resp. négatives) de (X_t) en dehors de zéro. On clôt ce travail en donnant la formule explicite de $({}^OX_t)$ pour les diffusions réelles les plus usuellles.

2 Notations, préliminaires.

On note J un intervalle de la forme $]a,b[$ ou $[0,b[$, avec $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (X_t), (\theta_t), (P^x)_{x\in J})$ une diffusion réelle (c'est-à-dire un processus de Markov fort, réel, continu) à valeurs dans J. On suppose que (X_t) est régulière (en posant $T_y = \inf\{s > 0, X_s = y\}$, on a, $\forall x \in \overset{\circ}{J}, \forall y \in J, P^x[T_y < +\infty] > 0$), que le point 0 est régulier pour (X_t) ($P^0[T_0 = 0] = 1$), et que (X_t) est à l'échelle naturelle et à temps de vie infinie.

Tout au long de ce travail, on se place sous la probabilité $P = P^0$.

Le processus (X_t) est une semi-martingale continue et admet un temps local (L_t) en zéro selon Tanaka. Comme (X_t) est aussi un processus de Markov et que zéro est régulier pour (X_t), (L_t) est une fonctionnelle additive. Rappelons que, pour $J =]a,b[$, (X_t) est une martingale locale pure, et pour $J = [0,b[$, $(X_t - L_t)$ est une martingale locale pure ([RoWi] p.277). On supposera dans la suite que (X_t) (resp. $(X_t - L_t)$) est une vraie martingale. Une condition nécessaire et suffisante pour que celà soit réalisé est donnée dans l'annexe à la fin de ce travail.

Soit H l'ensemble des zéros de (X_t) : $H = \{t \geq 0, X_t = 0\}$. Le processus (X_t) étant continu, H est un ensemble $(\mathcal{F}_t)$-prévisible.
On note $(\mathcal{H}_t)$ la filtration lente associée à $(\mathcal{F}_t)$ et à H; elle contient la filtration naturelle engendrée par le couple $(G_t, (\text{sgn} X_t))$.
La proposition suivante donne une décomposition de $\mathcal{H}_T$ en tout temps d'arrêt borné T :

Propriété 2.1 *Pour tout T $(\mathcal{H}_t)$-temps d'arrêt borné, on a*

$$\mathcal{H}_T|_{\{X_T \neq 0\}} = (\mathcal{F}_{G_T}^- \vee \sigma\{X_T > 0\})|_{\{X_T \neq 0\}}.$$

DÉMONSTRATION: Supposons d'abord que $P[X_T = 0] = 0$. On a alors, d'après [ARY] (ou [R] pour $J = [0,b[$), pour tout $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt, donc en particulier pour tout $(\mathcal{H}_t)$-temps d'arrêt T,

$$\mathcal{F}_{G_T}^+ = \mathcal{F}_{G_T}^- \vee \sigma\{X_T > 0\}.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{H}_T = \mathcal{F}_{G_T}^+$.
Il est clair que $\mathcal{F}_{G_T}^+ \subset \mathcal{H}_T$.
Inversement, on montre que, pour toute filtration $(\mathcal{G}_t)$ engendrée par un processus (Z_t), la tribu strictement antérieure à un $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt S se décompose en

$$\mathcal{G}_S^- = \sigma\{S\} \vee \sigma\{Z_s 1_{\{s<S\}}, s \geq 0\}.$$

On a donc ici

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_T &= \textstyle\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{T+\varepsilon}^- \\
&= \textstyle\bigcap_{\varepsilon>0} \sigma\{T+\varepsilon\} \vee \sigma\{Z_{G_s} 1_{\{s<T+\varepsilon\}}, s \geq 0, (Z_t)(\mathcal{F}_t)\text{-progressif}\} \\
&= \textstyle\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_T^- \vee \sigma\{Z_{G_s} 1_{\{T \leq s < T+\varepsilon\}}, s \geq 0, (Z_t)(\mathcal{F}_t)\text{-progressif}\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, sur $\Lambda_\varepsilon = \{T + \varepsilon < D_T\}$, (Z_{G_t}) est constant entre T et $T+\varepsilon$ et égal à $\lim_{v \nearrow T} Z_{G_v} 1_{v<T}$, ce qui est $\mathcal{H}_T^-$-mesurable; donc, pour tout $s \geq 0, Z_{G_s} 1_{\{T \leq s < T+\varepsilon\}}$ est $\mathcal{H}_T^-$-mesurable. On en déduit que, sur $\bigcup_{\varepsilon>0} \Lambda_\varepsilon \overset{ps}{=} \Omega$, $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_T^-$.
Or, vu le système de générateurs de $\mathcal{H}_T^-$, il est clair que $\mathcal{H}_T^- \subset \mathcal{F}_{G_T}^+$.

Pour T temps d'arrêt borné quelconque, il suffit de poser

$$T' = \begin{cases} T & \text{si } X_T \neq 0, \\ \xi + 1, \text{ avec } \xi = \sup_{\omega \in \Omega} T(\omega), & \text{si } X_T = 0. \end{cases}$$

Le temps T' est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt borné vérifiant

$$P[X_{T'} = 0] = 0 \text{ et } \{X_T = 0\} \overset{ps}{=} \{T' = T\} \in \mathcal{F}_T'.$$

On se ramène alors facilement au cas précédent. □

3 De la théorie des excursions.

On adopte les notations suivantes : on note G l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à H; on pose, pour tout $t \geq 0, \kappa_t = (\liminf_{s \searrow t} \mathrm{sgn} X_s)(D_t - G_t)$; puis $\mathbb{R}' = \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}, \mathbb{R}'_{+(-)} = \mathbb{R}^*_{+(-)} \cup \{+(-)\infty\}$, et, pour tout espace E, $\mathcal{B}(E)$ sa tribu borélienne. Pour tout espace mesurable $(K, \mathcal{K})$ et toute filtration $(\mathcal{G}_t)$, on note $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ la tribu prévisible sur $(\mathcal{G}_t)$ et $\mathcal{P}_b(\mathcal{G}, K)$ l'espace des applications bornées de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times K$ dans $\mathbb{R}$ mesurables par rapport à $\mathcal{P}(\mathcal{G}) \times \mathcal{K}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Lemme 3.1 *([DMe] p.294) Soit E l'espace des fonctions continues e de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nulles en zéro, telles que, en posant*

$$\sigma(e) = \inf\{t > 0, e(t) = 0\},$$

$\sigma(e)$ soit strictement positif et e nulle sur $[\sigma(e), +\infty[$. On munit E de la tribu $\mathcal{E}$ engendrée par l'application coordonnée sur E. Pour tout $g \in G$, soit e_g l'excursion de (X_t) débutant en l'instant g.
Il existe alors une mesure ν positive σ-finie sur $\mathcal{E}$ et une fonctionnelle additive (λ_t) continue portée par H, telles que la mesure aléatoire ponctuelle

$$\Pi(., dt, de) = \sum_{g \in G} \varepsilon_{g, e_g}(dt, de)$$

ait pour projection prévisible duale dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$ la mesure $\nu(de)d\lambda_t$.

Le couple (ν, λ_t) vérifie la propriété suivante :

$$\forall \Phi \in \mathcal{P}_b(\mathcal{F}, E), \quad E[\sum_{g \in G} \Phi(g, ., e_g)] = E[\int_{\mathbb{R}_+ \times E} \Phi(s, ., e)\nu(de)d\lambda_s]. \tag{1}$$

Soit $(\tau_t = \inf\{s \geq 0, L_s > t\})$ l'inverse continu à droite de (L_t). Posons

$$\tau_t^{+(-)} = \int_0^{\tau_t} 1_{\{X_s \in \mathbb{R}_{+(-)}\}} ds.$$

Soient N_+ (resp. N_-) la mesure de Lévy associée à (τ_t^+) (resp. (τ_t^-)), et N la mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}')$ définie par

$$N|_{\mathbb{R}'_+}(dx) = N_+(dx), \ N|_{\mathbb{R}'_-} = N_-(-dx).$$

On pose finalement, $\forall x \in \mathbb{R}'_+, N^{+(-)}(x) = N_{+(-)}(]x, +\infty])$.
(Pour $J = [0, b[$, le processus (τ_t^-) ainsi que la mesure N_- sont identiquement nuls.)

Proposition 3.2 $\forall \Phi \in \mathcal{P}_b(\mathcal{H}, \mathbb{R}')$,

$$E[\sum_{g \in G} \Phi(g, \kappa_g)] = E[\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}'} \Phi(s, x)N(dx)dL_s]. \tag{2}$$

DÉMONSTRATION: Remarquons d'abord que, (λ_t) étant une fonctionnelle additive continue portée par H, elle est proportionnelle à (L_t). Quitte à remplacer le couple (ν, λ) par $(\frac{1}{a}\nu, a\lambda)$ pour un $a > 0$, on peut donc supposer que $\lambda_t = L_t$.
Soit N° la mesure sur $\mathbb{R}'$ définie par :

$$N^\circ(dx) = \nu\{(\sigma(e) \times \mathrm{sgn}(e)) \in dx\}.$$

On déduit de la formule (1) que N° vérifie,

$$\forall \Phi \in \mathcal{P}_b(\mathcal{H}, I\!R'), \quad E[\sum_{g \in G} \Phi(g, \kappa_g)] = E[\int_{R_+ \times R'} \Phi(s,x) N^\circ(dx) dL_s]. \tag{3}$$

Cette équation peut également s'écrire

$$E[\sum_{\tau_{s-}^+ \neq \tau_s^+} \Phi(\tau_{s-}^+, \tau_s^+ - \tau_{s-}^+)] + E[\sum_{\tau_{s-}^- \neq \tau_s^-} \Phi(\tau_{s-}^-, -(\tau_s^- - \tau_{s-}^-))]$$
$$= E[\int_{R_+ \times R'_+} \Phi(\tau_{s-}^+, x) N^\circ(dx) ds] + E[\int_{R_+ \times R'_-} \Phi(\tau_{s-}^-, x) N^\circ(dx) ds].$$

On en déduit que $N^\circ = N$. □

D'après Knight [Kn] p.71,77 (voir aussi Kotani-Watanabe [KoWa]), N^+ et N^- sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et leur support est vide ou contient tout $I\!R_+^*$.

4 Des martingales remarquables.

Il est connu depuis [A] p.452 que le processus

$$\left(\overline{M}_t = \frac{1}{(N^+ + N^-)(t - G_t)} 1_{H^c}(t) - L_t \right)$$

est une martingale locale dans la filtration engendrée par (G_t). Dans ce paragraphe, nous allons construire deux processus associés au fermé marqué $(H, (\mathrm{sgn} X_t))$ qui sont des martingales dans la filtration $(\mathcal{M}_t)$ et dans la filtration $(\mathcal{H}_t)$.
Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$M_t = \frac{1}{2} \left(\frac{1_{\{X_t > 0\}}}{N^+(t - G_t)} - \frac{1_{\{X_t < 0\}}}{N^-(t - G_t)} \right).$$

Proposition 4.1 *Le processus $(M_t^+ - \frac{1}{2} L_t)$ est une $(\mathcal{H}_t)$-martingale. Si $J =]a, b[$, (M_t) est une $(\mathcal{H}_t)$-martingale.*

DÉMONSTRATION: Il suffit de montrer que $(M_t^+ - \frac{1}{2} L_t)$ est une martingale.
Posons. $H_+ = \{s \geq 0, X_s \leq 0\}$. L'ensemble H_+ est un fermé $(\mathcal{F}_t)$-optionnel. Soit G_+ l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à H_+; posons $G_t^+ = \sup\{s \leq t, X_s \leq 0\}, D_t^+ = \inf\{s > t, X_s \leq 0\}$; notons $(\mathcal{A}_t)$ la filtration $(\mathcal{F}_{G_t^+}^-)$ rendue continue à droite.
Pour $J = [0, b[$, $(\mathcal{A}_t) = (\mathcal{H}_t)$. Si $J =]a, b[$, on a toujours, $\forall t \geq 0, G_t \leq G_t^+$, donc $\mathcal{F}_{G_t}^- \subset \mathcal{A}_t$ ([DMaMe] p.142) et $\{X_t > 0\} = \{G_t^+ < t\} \in \mathcal{A}_t$; donc, d'après la décomposition 2.1 , $(\mathcal{H}_t) \subset (\mathcal{A}_t)$.
On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{P}_b(\mathcal{F}, I\!R'_+)$,

$$\begin{aligned} E[\sum_{g\in G_+}\varphi(g,D_g^+-g)] &= E[\sum_{g\in G}\Phi(g,\kappa_g)], \quad \text{avec } \Phi(s,u)=\varphi(s,u)1_{\{u>0\}} \\ &= E[\int_{R_+\times R'_+}\varphi(s,x)N_+(dx)dL_s]. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer la formule de conditionnement [DMaMe] p.190 :
pour toute fonction f bornée, pour tout T $(\mathcal{A}_t)$-temps d'arrêt borné, donc, en particulier pour tout T $(\mathcal{H}_t)$-temps d'arrêt borné,

$$E[f(G_T^+,D_T^+-G_T^+)|\mathcal{A}_T]1_{\{G_T^+<T\}} = \int_{T-G_T^+}^{+\infty}\frac{f(G_T^+,x)}{N^+(T-G_T^+)}N_+(dx)1_{\{G_T^+<T\}}. \tag{4}$$

Sur $\{G_T^+<T\}=\{X_T>0\}$, on a $G_T^+=G_T$ et $D_T^+=D_T$. La formule (4) s'écrit donc aussi

$$E[f(G_T,D_T-G_T)|\mathcal{A}_T]1_{\{X_T>0\}} = N_T^+(f) \equiv 1_{\{X_T>0\}}\int_{]T-G_T,+\infty]}\frac{f(G_T,x)}{N^+(T-G_T)}N_+(dx).$$

En remarquant que $N_T^+(f)$ est $\mathcal{H}_T$-mesurable, on en déduit la formule de projection

$$E[f(G_T,D_T-G_T)|\mathcal{H}_T]1_{\{X_T>0\}} = N_T^+(f). \tag{5}$$

Considérons maintenant $k\in I\!R_+$ tel que T soit majoré par k et appliquons (5) à la fonction $f(s,y)=1_{\{|y|>k-s,y>0\}}$:

$$\begin{aligned} E[1_{\{D_T-G_T>k-G_T,X_T>0\}}|\mathcal{H}_T] &= \frac{1_{\{X_T>0\}}}{N^+(T-G_T)}\int_{]T-G_T,+\infty]}1_{\{y>k-G_T\}}N_+(dy) \\ &= 1_{\{X_T>0\}}\frac{N_+(k-G_T)}{N^+(T-G_T)}. \end{aligned} \tag{6}$$

(Puisque $k-G_T\geq T-G_T>0$ sur $\{X_T>0\}$, l'expression $N^+(k-G_T)$ a un sens et n'est pas nulle.)
Multiplions les termes de gauche et de droite de (6) par $1/N^+(k-G_T)$. On a alors

$$E[\frac{1_{\{D_T-G_T>k-G_T,X_T>0\}}}{N^+(k-G_T)}] = E[\frac{1_{\{X_T>0\}}}{N^+(T-G_T)}] \equiv 2E[M_T^+]. \tag{7}$$

Par ailleurs, on peut écrire le membre de gauche de (7) comme une somme (dont un seul des termes est non nul), puis appliquer la formule (2) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E[\frac{1_{\{D_T-G_T>k-G_T,X_T>0\}}}{N^+(k-G_T)}] &= E[\sum_{g\in G}\frac{1_{\{g<T,|\kappa_g|>k-g,\kappa_g>0\}}}{N^+(k-g)}] \\ &= E[\int_{R_+\times R'_+}\frac{1_{\{s<T,x>k-s\}}}{N^+(k-s)}N_+(dx)dL_s] \\ &= E[L_T]. \end{aligned} \tag{8}$$

En regroupant les relations (7) et (8) on obtient

$$E[M_T^+] = \frac{1}{2}E[L_T], \tag{9}$$

donc

$$E[M_T^+-\frac{1}{2}L_T] = 0 = E[M_0-\frac{1}{2}L_0], \tag{10}$$

et $(M_t^+-\frac{1}{2}L_t)$ est une martingale. □

5 La projection optionnelle de (X_t) sur $(\mathcal{H}_t)$.

Il est raisonnable d'élargir à des processus plus généraux la définition de la projection optionnelle qui est définie pour les processus positifs ou bornés, de la façon suivante :

Définition 5.1 *Soit $(\mathcal{G}_t)$ une filtration vérifiant les conditions habituelles, et (Z_t) un processus tel que, pour tout T $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt borné, Z_T soit intégrable. Alors la projection $(\mathcal{G}_t)$-optionnelle de (Z_t), $({}^OZ_t)$, est l'unique processus $(\mathcal{G}_t)$-optionnel vérifiant,*

$$\forall T\ (\mathcal{G}_t)\text{-temps d'arrêt borné, } {}^OZ_T = E[Z_T|\mathcal{G}_T].$$

(Deux processus optionnels coïncidant en tout temps d'arrêt borné sont indistinguables; $({}^OX_t)$ est donc bien défini à l'indistinguabilité près et coïncide avec la projection optionnelle pour (X_t) positif ou borné).

Pour la démonstration du théorème principal, nous avons besoin de la formule de balayage d'Azéma-Yor [Y1]. Rappelons-la :

Lemme 5.2 *(cf. [Y1] p.427) Soient $(\mathcal{G}_t)$ une filtration satisfaisant les conditions habituelles, H un fermé aléatoire $(\mathcal{G}_t)$-optionnel et (U_t) une $(\mathcal{G}_t)$-semimartingale s'annulant sur H. Alors, pour tout (Z_t) processus $(\mathcal{G}_t)$-prévisible borné, on a*

$$U_t Z_{G_t} = U_0 Z_0 + \int_0^t Z_{g_s} dU_s,$$

avec $g_t = \sup\{s < t, s \in H\}$.

Théorème 5.3 *La projection optionnelle de (X_t) sur $(\mathcal{H}_t)$ est égale à (M_t) :*

$${}^OX_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1_{\{X_t>0\}}}{N^+(t-G_t)} - \frac{1_{\{X_t<0\}}}{N^-(t-G_t)}\right).$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de montrer que $({}^OX_t^+) = (M_t^+)$, ou que, pour T $(\mathcal{H}_t)$-temps d'arrêt borné,

$$E[X_T^+|\mathcal{H}_T] = M_T^+.$$

D'après 2.1, la restriction de $\mathcal{H}_T$ sur $\{X_T \neq 0\}$ est engendrée par les variables $\Phi(G_T, 1_{\{X_T>0\}})$, avec $\Phi \in \mathcal{P}_b(\mathcal{F}, \{1,0\})$. Sur $\{X_T > 0\}$, ces variables s'écrivent $\Phi(G_T, 1)$ et sont donc égales à des variables de la forme Z_{G_T}, avec (Z_t) $(\mathcal{F}_t)$-prévisible borné. Le problème revient donc à montrer que,

$$\forall (Z_t)\ (\mathcal{F}_t)\text{-prévisible borné, } E[X_T^+ Z_{G_T}] = E[M_T^+ Z_{G_T}].$$

C'est là qu'intervient le lemme de balayage 5.2 : (X_t^+) est une $(\mathcal{F}_t)$-semimartingale s'annulant sur H, et $(X_t^+ - \frac{1}{2}L_t)$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. On a donc

$$E[X_T^+ Z_{G_T}] = E[\int_0^T Z_{g_s} dX_s^+] = E[\int_0^T Z_{g_s} d(\frac{1}{2}L_s)].$$

Par ailleurs, si (Z_t) est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible, $(Z'_t) = (Z_{g_t})$ est $(\mathcal{H}_t)$-prévisible ([DMaMe] p.155) et vérifie $(Z'_{g_t}) = (Z_{g_t})$. Le processus (M_t^+) est une $(\mathcal{H}_t)$-semimartingale s'annulant sur H. D'après 4.1, $(M_t^+ - \frac{1}{2}L_t)$ est une $(\mathcal{H}_t)$-martingale. On a donc, en utilisant de nouveau la formule de balayage 5.2,

$$E[M_T^+ Z_{G_T}] = E[\int_0^T Z_{g_s} dM_s^+] = E[\int_0^T Z_{g_s} d(\frac{1}{2}L_s)].$$

D'où le résultat. □

6 Exemples.

Nous présentons maintenant quelques exemples de diffusions réelles, dont on peut calculer explicitement la projection optionnelle sur $(\mathcal{H}_t)$. On note toujours (X_t) la diffusion, $({}^oX_t)$ sa projection optionnelle sur $(\mathcal{H}_t)$, et (M_t) le processus défini par :

$$\forall t \geq 0, M_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1_{\{X_t>0\}}}{N^+(t-G_t)} - \frac{1_{\{X_t<0\}}}{N^-(t-G_t)}\right).$$

On pose $\overline{N} = N_+ + N_-$.
Le plus souvent, connaissant les mesures de Lévy N_+ et N_-, on peut en déduire la projection $({}^oX_t)$. Or on remarquera que, dans certains cas, cette dernière se calcule directement et fournit alors l'expression des mesures de Lévy.

6.1 Le mouvement brownien et le module du mouvement brownien .

Si (X_t) est un mouvement brownien réel issu de zéro, la mesure de Lévy de ses zéros est connue :

$$\overline{N}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} dx.$$

Le mouvement brownien étant symétrique, on en déduit que

$$N_+(dx) = N_-(dx) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} dx,$$

et ensuite que

$${}^oX_t = M_t = (\mathrm{sgn} B_t)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t-G_t}.$$

Si (X_t) est le module d'un mouvement brownien (B_t), (X_t) a les mêmes zéros que (B_t), donc, à une constante multiplicative près, la même mesure de Lévy des zéros. Son temps local étant le double de celui de (B_t), on a

$$N_+(dx) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2/3}, N_-(dx) = 0$$

et

$${}^oX_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t-G_t}.$$

Remarque : On retrouve ici deux résultats déjà connus ([A] p.462) :
si (B_t) est un mouvement brownien, H l'ensemble de ses zéros, $(\mathcal{G}_t)$ la filtration naturelle engendrée par le processus (G_t), et $(\mathcal{M}_t)$ celle engendrée par $(G_t, (\mathrm{sgn} B_t))$, alors,

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad E[|B_t||\mathcal{G}_t] &= \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\sqrt{t - G_t}, \\ E[B_t|\mathcal{M}_t] &= (\mathrm{sgn} B_t)\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\sqrt{t - G_t}. \end{aligned}$$

6.2 Les carrés de Bessel.

Soit (B_t) un mouvement brownien, δ un réel strictement compris entre 0 et 2. L'équation différentielle stochastique

$$Y_t = 2\int_0^t \sqrt{Y_s}\, dB_s + \delta t$$

admet une solution unique qui est forte, appelée **carré de Bessel de dimension** δ (cf. [ReY] p.409).
La fonction $s : x \mapsto x^{1-\delta/2}$ est une fonction d'échelle pour (Y_t) (cf. [ReY] p.412). Le processus $(X_t = s(Y_t))$ est alors une diffusion réelle à l'échelle naturelle. Son espace d'état est $\mathbb{R}_+$, (X_t) est régulière en tout point de $\mathbb{R}_+$, et 0 est régulier pour (X_t). Le processus $(X_t - L_t)$ est une martingale.

Proposition 6.2.1 *On a*

$$^{\mathcal{O}}X_t = M_t = 2^{1-\frac{\delta}{2}}\Gamma(2 - \frac{\delta}{2})(t - G_t)^{1-\frac{\delta}{2}},$$

où Γ *est la fonction Gamma.*

DÉMONSTRATION: Le processus

$$(m_u = \frac{1}{\sqrt{1 - G_1}} Y^{\frac{1}{2}}_{G_1 + u(1-G_1)},\ 0 \leq u \leq 1)$$

est le méandre du processus de Bessel de dimension δ, $(m_u)_{u \leq 1}$ est indépendant de $\mathcal{H}_1$, et m_1 suit la loi de Rayleigh : $\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho$ (cf. [Y2], p.42). On a donc, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} E[X_t|\mathcal{H}_t] &= (t - G_t)^{1-\frac{\delta}{2}} E[m_1^{2-\delta}] = (t - G_t)^{1-\frac{\delta}{2}} \int_0^\infty \rho^{3-\delta} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \\ &= 2(t - G_t)^{1-\frac{\delta}{2}}\Gamma(2 - \frac{\delta}{2}). \end{aligned}$$

Puisque le processus figurant au membre de droite de cette dernière égalité est càdlàg, on en déduit une égalité entre processus. □

On en déduit l'expression de la mesure de Lévy des zéros de (X_t) :

Corollaire 6.2.2 *La mesure de Lévy des zéros de* (X_t) *est donnée par :*

$$N_+(dx) = \frac{1 - \frac{\delta}{2}}{\Gamma(2 - \frac{\delta}{2})}(2x)^{\frac{\delta}{2}-2} dx, \quad N_-(dx) = 0.$$

6.3 Le mouvement brownien avec drift.

Soit (B_t) un mouvement brownien et α un réel. Le processus

$$(Y_t = B_t - \alpha t, t \geq 0)$$

est appelé un **mouvement brownien avec drift** $-\alpha$. C'est une diffusion réelle avec espace d'état $\mathbb{R}$, régulière sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto s(x) = \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha x} - 1)$ est une fonction d'échelle pour (Y_t), et le processus $(X_t) = (s(Y_t))$ est une martingale.

Proposition 6.3.1

$${}^{O}X_t = M_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\psi(\alpha(\mathrm{sgn}X_t)\sqrt{t - G_t}),$$

avec $\psi(x) = \frac{1}{\alpha}xe^{\frac{x^2}{2}}(1 + xe^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy)^{-1}$.

DÉMONSTRATION: Soit Q une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\forall t \geq 0, Q|_{\mathcal{F}_t} = e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}} P|_{\mathcal{F}_t}.$$

On a alors également,

$$\forall t \geq 0, P|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\alpha B_t + \frac{\alpha^2 t}{2}} Q|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\alpha Y_t - \frac{\alpha^2 t}{2}} Q|_{\mathcal{F}_t}.$$

Pour toute variable V intégrable, $\mathcal{F}_t$-mesurable, et toute tribu $\mathcal{K}$ incluse dans $\mathcal{F}_t$, on a

$$E[V|\mathcal{K}] = E_Q[Ve^{-\alpha Y_t - \frac{\alpha^2 t}{2}}|\mathcal{K}]/E_Q[e^{-\alpha Y_t - \frac{\alpha^2 t}{2}}|\mathcal{K}],$$

donc en particulier

$$\begin{aligned} E[X_t|\mathcal{H}_t] &= E_Q[s(Y_t)e^{-\alpha Y_t - \frac{\alpha^2 t}{2}}|\mathcal{H}_t]/E_Q[e^{-\alpha Y_t - \frac{\alpha^2 t}{2}}|\mathcal{H}_t] \\ &= E_Q[\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}}\mathrm{sh}(\alpha Y_t)|\mathcal{H}_t]/E_Q[e^{-\alpha Y_t - \frac{\alpha^2 t}{2}}|\mathcal{H}_t]. \end{aligned} \tag{11}$$

Or, d'après le théorème de Girsanov, $(Y_t) = (B_t - < B, \alpha B >_t)$ est un Q-mouvement brownien. Les deux espérances conditionnelles de la droite de l'expression (11) sont alors connues (voir [AY] p.93) :

$$E_Q[\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}}\mathrm{sh}(\alpha Y_t)|\mathcal{H}_t] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{sgn}Y_t)\sqrt{t - G_t}e^{-\frac{\alpha^2 G_t}{2}}.$$

et

$$E_Q[e^{-\alpha Y_t - \frac{\alpha^2 t}{2}}|\mathcal{H}_t] = h(\alpha(\mathrm{sgn}Y_t)\sqrt{t - G_t})e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}},$$

$$\text{avec } h(x) = 1 + xe^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy,$$

En regroupant ces deux expressions on trouve bien,

$$\forall t \geq 0, E[X_t|\mathcal{H}_t] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\psi(\alpha(\mathrm{sgn}X_t)\sqrt{t - G_t}); \tag{12}$$

et puisque les deux processus figurant à gauche et à droite de la relation (12) sont càdlàg, on en déduit une égalité entre processus. □

En comparant le résultat de la proposition 6.3.1 avec la forme générale de (M_t), on trouve l'expression de N^- et N^+ et de $N(dx)$:

Corollaire 6.3.2

$$\begin{aligned} 1.\forall x \geq 0, \quad & N^+(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\alpha^2 x}{2}} + \alpha \textstyle\int_{-\infty}^{\alpha\sqrt{x}} e^{-y^2/2}dy\right) \\ & N^-(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{\alpha^2 x}{2}} - \alpha \textstyle\int_{-\infty}^{-\alpha\sqrt{x}} e^{-y^2/2}dy\right) \\ 2.Sur\ \mathbb{R}, \quad & N(dx) = \tfrac{|x|^{-3/2}}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2|x|}{2}}dx. \end{aligned}$$

Remarques 6.3.3 1. En posant $\alpha = 0$, on retrouve bien sûr les mesures associées au mouvement brownien.
2. La mesure de Lévy $N(dx)$ est symétrique sur $\mathbb{R}$: $N(dx) = N(-dx)$ (seuls $N(\{+\infty\})$ et $N(\{-\infty\})$ diffèrent). Or, d'après Williams [Wi] p.746, la loi du mouvement brownien avec drift, tué en G_∞, son dernier temps d'atteinte de 0, est stable par retournement de temps; plus précisement, pour toute fonctionnelle f on a

$$E[f(Y_u, u \leq G_\infty)|G_\infty = t] = E[f(P_u, u \leq t)],$$

où $(P_u, u \leq t)$ est un pont brownien de zéro à zéro de longueur t, et

$$P[G_\infty \in dt] = \frac{\alpha e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}dt.$$

Cette dernière remarque n'a donc rien d'étonnant.

6.4 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

L'équation différentielle stochastique (e.d.s.)

$$dY_t = dB_t + \lambda Y_t dt, \ \lambda \in \mathbb{R}, Y_0 = y$$

admet une unique solution, appelée **processus d'Ornstein-Uhlenbeck**. Cette solution s'écrit

$$Y_t = e^{\lambda t}(y + \int_0^t e^{-\lambda s}dB_s).$$

En particulier elle est forte.
La formule générale des fonctions d'échelle pour diffusions vérifiant une e.d.s. (cf. [RoWi] p.270) donne ici comme fonction d'échelle $s(x) = \int_0^x e^{-\lambda u^2}du$. Si $y = 0$, on vérifie que $(X_t) = (s(Y_t))$ est une martingale qui a les mêmes zéros, le même signe et le même temps local selon Tanaka en zéro que (Y_t).
La mesure de Lévy de l'inverse de ce temps local est donnée par l'expression

$$\overline{N}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\lambda|^{3/2}e^{-\frac{\lambda x}{2}}(\mathrm{sh}(|\lambda|x))^{-3/2}dx.$$

(cf. Truman-Williams [TWi] et Carmona-Yor [CY]).
Le processus (X_t) ayant même loi que $(-X_t)$, $N(dx)$ est symétrique et vérifie :

$$N_+(dx) = N_-(dx) = \frac{1}{2}\overline{N}(dx).$$

La projection optionnelle de (X_t) sur $(\mathcal{H}_t)$ est donc

$$^{o}X_t = M_t = \frac{\mathrm{sgn}Y_t}{2\sqrt{2\pi}}|\lambda|^{-3/2}\left(\int_{t-G_t}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x}{2}}(\mathrm{sh}(|\lambda|x))^{-3/2}dx\right)^{-1}.$$

Annexe : Quand (X_t) est-elle une vraie martingale ?

Soit (X_t) une diffusion réelle à l'échelle naturelle à valeurs dans un intervalle ouvert $J =]a, b[, -\infty \leq a < b \leq +\infty$, pour laquelle tous les points de J sont réguliers. Soit m sa mesure de vitesse. Le processus (X_t) est une martingale locale dans sa filtration naturelle.

Théorème 1 *a) On a, pour tout $c \in J$, pour tout $t \geq 0$, $E^c[|X_t|] < +\infty$.*
b) Le processus (X_t) est une martingale si et seulement si la mesure de vitesse m vérifie

$$\lim_{x\to+\infty}\int^x ym(dy) = \lim_{x\to-\infty}\int_x |y|m(dy) = \infty. \tag{13}$$

Pour démontrer ceci, rappelons quelques résultats classiques sur les diffusions réelles que l'on peut relire dans [RoWi] p.291-295 : (Pour l'étude des diffusions à valeurs dans un inter valle, on pourra aussi consulter S. Méléard [S].)

pour $c \in J$ fixé, posons, pour tout $\lambda > 0$,

$$\forall y \in J,\ \Psi_\lambda^-(y) = \begin{cases} E^y[\exp(-\lambda T_c)] & \text{si } c \leq y, \\ 1/E^c[\exp(-\lambda T_y)] & \text{si } y \leq c; \end{cases}$$

$$\forall y \in J,\ \Psi_\lambda^+(y) = \begin{cases} E^y[\exp(-\lambda T_c)] & \text{si } y \leq c, \\ 1/E^c[\exp(-\lambda T_y)] & \text{si } c \leq y; \end{cases}$$

avec $T_y = \inf\{s \geq 0, X_s = y\}$. ($\Psi_\lambda^-$ et Ψ_λ^+ varient avec c.)
Les fonctions Ψ_λ^- et Ψ_λ^+ sont strictement convexes, continues, strictement monotones, positives et finies sur J et vérifient l'équation différentielle

$$f" = 2\lambda fm \text{ ou}, \forall x, y \in J, x < y, (Df)(y-) - (Df)(x-) = \int_{[x,y[} 2\lambda f dm. \tag{14}$$

où D est le symbole de dérivation.
La résolvante $(R_\lambda, \lambda > 0)$ de (X_t) : $R_\lambda\varphi(x) = E^x[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\varphi(X_t)dt]$, vérifie

$$R_\lambda\varphi(x) = \int_J m(dy)r_\lambda(x,y)\varphi(y), \tag{15}$$

$$\text{avec } r_\lambda(x,y) = \begin{cases} k_\lambda\Psi_\lambda^+(x)\Psi_\lambda^-(y) & \text{pour } x \leq y \in J, \\ k_\lambda\Psi_\lambda^-(x)\Psi_\lambda^+(y) & \text{pour } y \leq x \in J, \end{cases}$$

où

$$k_\lambda \equiv \frac{1}{2}\left(\Psi_\lambda^-(x)D\Psi_\lambda^+(x-) - \Psi_\lambda^+(x)D\Psi_\lambda^-(x+)\right) \tag{16}$$

est une constante, le Wronskien, qui ne dépend pas de x.

On a finalement,

- si $b < +\infty, \lim_{y\to b} \int^y (b-x)m(dx) = +\infty$ (les conditions (13) du théorème sont donc vérifiées si les bornes sont finies),

- si $b = +\infty$, on a l'équivalence

$$\lim_{y\to+\infty} \Psi_\lambda^-(y) > 0 \Longleftrightarrow \lim_{y\to+\infty} \int^y xm(dx) < +\infty.$$

Des rélations similables sont vraies bien sûr aussi pour a. Dans la suite on notera $\Psi^{-(+)}, R, r, k$ pour $\Psi_\lambda^{-(+)}, R_\lambda, r_\lambda, k_\lambda$.

Démonstration du théorème :
Pour tout $\lambda > 0$, soit e_λ une variable exponentielle de paramètre 1, indépendante de (X_t). Pour que (X_t) vérifie *a)* il suffit que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\forall c \in J, E^c[|X_{e_\lambda} - c|] < +\infty; \tag{17}$$

Si ceci est vérifié, (X_t) est une martingale si et seulement si, de plus, pour tout $\lambda > 0$,

$$\forall c \in J, E^c[X_{e_\lambda}] = c. \tag{18}$$

Les deux relations (17) et (18) sont équivalentes respectivement à, pour tout $c \in J$ fixé,

$$RI_{+,c}(c) - RI_{-,c}(c) < +\infty, \tag{19}$$

puis

$$RI_{+,c}(c) + RI_{-,c}(c) = c, \tag{20}$$

où $I_{+,c}$ et $I_{-,c}$ sont les fonctions définies par

$$I_{+,c}(x) = x1_{\{x>c\}}, I_{-,c}(x) = x1_{\{x\leq c\}}.$$

A l'aide de (14) et de (15), on peut calculer $RI_+(c)$ et $RI_-(c)$:

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{k}RI_+(c) &= \lim_{x\to b}\textstyle\int_c^x y\Psi^-(y)m(dy) = \lim_{x\to b}\int_c^x yD^2\Psi^-(dy)\\ &= \lim_{x\to b}\left([yD\Psi^-(y+)]_c^x - \textstyle\int_c^x D\Psi^-(y+)dy\right)\\ &= \Psi^-(c) - cD\Psi^-(c+) + \lim_{x\to b}\left(xD\Psi^-(x+) - \Psi^-(x)\right),\end{aligned}$$

et

$$\tfrac{2}{k}RI_-(c) = -\Psi^+(c) + cD\Psi^+(c-) - \lim_{x\to a}\left(xD\Psi^+(x-) - \Psi^+(x)\right).$$

Dans les deux membres de droite, les termes relatifs à c sont finis, donc (19) équivaut à

$$\lim_{x\to b}\left(xD\Psi^-(x+) - \Psi^-(x)\right) + \lim_{x\to a}\left(xD\Psi^+(x-) - \Psi^+(x)\right) < +\infty. \tag{21}$$

La fonction Ψ^- (resp. Ψ^+) étant décroissante (resp. croissante) et positive, $\lim_{x\to b}\Psi^-(x)$ et $\lim_{x\to a}\Psi^+(x)$ existent et sont finies. $D\Psi^-$ est croissante négative; donc, si $b < +\infty$, $\lim_{x\to b} D\Psi^-(x+) < +\infty$; si $b = +\infty$, un raisonnement d'analyse élémentaire montre que, si Ψ^- décroît vers une limite finie, alors $\lim_{x\to+\infty} xD\Psi^-(x+) = 0$.
De la même façon, on montre que les termes relatifs à la borne a sont également finis.
La condition (21) est donc toujours vérifiée, d'où la première partie du théorème.

On a $\Psi^-(c) = \Psi^+(c) = 1$, et

$$D\Psi^+_\lambda(c-) - D\Psi^-_\lambda(c+) = \Psi^-_\lambda(c)D\Psi^+_\lambda(c-) - \Psi^+_\lambda(c)D\Psi^-_\lambda(c+) = 2k.$$

On a vu que, si $b = +\infty$, alors $\lim_{x\to b} xD\Psi^-(x+) = 0$.
De même, si $b < +\infty$, d'après (16) et (14), on a, pour tout $x > c$,

$$\begin{aligned} D\Psi^-(x+)\Psi^+(x) + 2k &= \Psi^-(x)D\Psi^+(x-) \\ &= \Psi^-(x)\left(D\Psi^+(c-) + 2\int_{[c,x[}\Psi^+(y)m(dy)\right) \\ &= \Psi^-(x)D\Psi^+(c-) + 2k^{-1}R1_{[c,x[}. \end{aligned}$$

Quand x tend vers b, $D\Psi^-(x+)$ tend vers zéro, parce que le membre de droite admet une limite finie et que $\lim_{x\to b}\Psi^+(x) = \lim_{x\to b} 1/E^c[\exp(-T_x)] = +\infty$.
Donc $\lim_{x\to b} xD\Psi^-(x+) = 0$.
Substituons maintenant les valeurs trouvées dans (20). Il reste alors, pour établir b), à montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_{x\to+\infty}\int^x ym(dy) = \lim_{x\to-\infty}\int_x ym(dy) = \infty$;
ii) $\forall c \in J$, $\lim_{x\to b}\Psi^-(x) - \lim_{x\to a}\Psi^+(x) = 0$.

- Commençons par supposer i) vérifié.
  Si $b < +\infty$, on a

  $$\int_x^b 2\Psi^-(y)m(dy) = D\Psi^-(b+) - D\Psi^-(x+) < +\infty \text{ et } \int^b (b-y)m(dy) = +\infty$$

  Donc $\lim_{x\to b}\Psi^-(x) = 0$.

  Si $b = +\infty$, alors $\lim_{x\to b}\int^x ym(dy) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to b}\Psi^-(x) = 0$.
  Tout celà étant également vrai pour la borne a, ça implique ii).

- Si $\lim_{x\to b}\int^x ym(dy) < +\infty$, alors $b = +\infty$ et $\lim_{x\to b}\Psi^-(x) > 0$.
  Donc si $\lim_{x\to a}\int_x ym(dy) = +\infty$, ii) ne peut pas être vérifiée.
  Si $\lim_{x\to b}\int^x ym(dy) < +\infty$ et $\lim_{x\to a}\int_x ym(dy) < +\infty$, alors b et a sont infinis et, pour tout $c \in J$,

  $$\lim_{x\to+\infty} E^x[\exp(-T_c)] = \lim_{x\to b}\Psi^-(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} E^x[\exp(-T_c)] = \lim_{x\to a}\Psi^-(x) > 0.$$

  Supposons que, pour un c fixé, ces deux limites soient égales. Soit $c' > c$. On a alors, en appliquant la propriété de Markov forte en T_c,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} E^x[\exp(-T_{c'})] &= \lim_{x\to-\infty} E^x[\exp(-T_c)]E^c[\exp(-T_{c'})] \\ &= \lim_{x\to+\infty} E^x[\exp(-T_c)]E^c[\exp(-T_{c'})] \\ &< \lim_{x\to+\infty} E^x[\exp(-T_c)] \leq \lim_{x\to+\infty} E^x[\exp(-T_{c'})],\end{aligned}$$

La relation ii) ne peut donc pas être vérifiée pour tout $c \in J$. □

Je remercie J. Azéma, J. Bertoin et M. Yor pour leurs bons conseils.

Références

[A] AZÉMA J. (1985): Sur les fermés aléatoires, Sém. Prob. XIX, LNM 1123, p.397-495, Springer Verlag.

[ARY] AZÉMA J., RAINER C., YOR M. (1995): Une propriété des martingales pures, dans ce volume.

[AY] AZÉMA J., YOR M. (1989): Etude d'une martingale remarquable, Sém. Prob. XXIII, LN 1372, p.88-130, Springer Verlag.

[CY] CARMONA PH., YOR M. (1991): Processus d'Ornstein-Uhlenbeck : mesure de Lévy de l'inverse du temps local en zéro (note non publiée).

[DMaMe] DELLACHERIE C., MAISONNEUVE B., MEYER P.A. (1992): Probabilités et Potentiel, chap.XVII à XXIV, Hermann.

[DMe] DELLACHERIE C., MEYER P.A. (1987): Probabilités et Potentiel, chap. XXII-XVI, Hermann.

[Kn] KNIGHT F.B. (1980): Characterization of Lévy measures of inverse local times of gap diffusion, Sem. on Stoch. Proc. 1980, Birkhäuser, p. 53-78.

[KoWa] KOTANI S., WATANABE S. (1981): Krein's spectral theory of strings and generalized diffusion processus, LNM 923, "Funct. Ana. in Markov processes", Springer Verlag.

[M] MÉLÉARD S. (1986): Applications du calcul stochastique à l'étude de processus de Markov réguliers sur [0, 1], Stochastics 19 (1986), p.41-82.

[R] RAINER C. (1994): Fermés marqués, filtrations lentes et équations de structure, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI.

[ReY] REVUZ D., YOR M. (1991): Continuous Martingales and Brownian Motion, Grundlehren der math. Wiss. 293, Springer Verlag.

[RoWi] ROGERS L.C.G., WILLIAMS D. (1987): Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol.2, Wiley and Sons.

[TWi] TRUMAN A., WILLIAMS D. (1990): Generalised Arc-Sine Law and Nelson's Stochastic Mechanics of One-Dimensional Time-Homogeneous Diffusions, in: Diffusion processes and related problems in Analysis, Vol 1., Birkhäuser.

[Wi] WILLIAMS D. (1974): Path decomposition and continuity of local time for one dimensional diffusions I. Proc. London Math. Soc.(3), 28, p.738-768.

[Y1] YOR M. (1979): Sur le balayage des semimartingales continues, Sém. Prob. XIII, LNM 721, Springer Verlag. p.453-471.

[Y2] YOR M. (1992): Some Aspects of Brownian Motion, Part 1, Some Special functionals, Lectures in Maths. ETH Zürich, Birkhäuser.