

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO

Un contre-exemple touchant à l'indépendance

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 100-103

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__100_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__100_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Un contre-exemple touchant à l'indépendance

par J. DE SAM LAZARO

Laboratoire AMS, URA CNRS 1378

Université de Rouen

76821 Mont Saint Aignan Cedex

1 Dans la préparation d'un travail déjà ancien que nous publiâmes en collaboration avec M. YOR (L.N. in Math. n°649, pp.302-306, 1977) nous fûmes amenés à nous poser la question suivante

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$, H_1 et H_2 des sous-ensembles denses de $L^1(\mathcal{B}_1)$ et $L^1(\mathcal{B}_2)$ respectivement. On suppose que pour tous $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ le produit $h_1 h_2$ est intégrable et $E[h_1 h_2] = E[h_1]E[h_2]$. Pouvons nous affirmer que les tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes ?

L'objet de cette note est de répondre (par la négative) à cette question.

Remarque. Si H_1 et H_2 étaient denses dans $L^2(\mathcal{B}_1)$ et $L^2(\mathcal{B}_2)$ respectivement, alors les tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ seraient indépendantes, ceci grâce à la continuité, pour tout $g \in L^2$, de l'application $h \mapsto E[gh]$ de L^2 dans $\mathbb{C}$.

2 Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est l'intervalle $[0, 1]$, $\mathcal{A}$ sa tribu borélienne, P la mesure de Lebesgue. Nous allons démontrer le résultat suivant

Proposition. Il existe deux sous-ensembles dénombrables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $L^1(\Omega)$, denses dans $L^1(\Omega)$, tels que $fg \in L^1(\Omega)$ et $E[fg] = E[f]E[g]$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $g \in \mathcal{G}$.

Pour démontrer cette proposition nous nous donnons une suite $\{e_1, e_2, \dots\}$ d'éléments de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega)$ dense dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$, et deux suites $(\varepsilon_n), (\varepsilon'_n)$ de réels > 0 décroissantes vers 0. Nous montrons alors qu'il existe deux suites $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots\}$, $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots\}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ telles que

(α) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - e_n\| < \varepsilon_n$, $\|g_n - e_n\| < \varepsilon'_n$

(β) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, le produit $f_n g_m \in L^1$ et $E[f_n g_m] = E[f_n]E[g_m]$

Il s'ensuivra que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont denses dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ et que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{G}$, on a $fg \in L^1_{\mathbb{R}}$ et $E[fg] = E[f]E[g]$. L'extension au cas complexe est alors immédiate.

La démonstration de la proposition sera basée sur le lemme suivant

Lemme. On se donne une famille finie $\{f_1, \dots, f_n\}$ d'éléments de $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$, un élément e de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega)$ et un réel $\varepsilon > 0$. On suppose que

(a) pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $f_i \notin L^2(\Omega)$

(b) les lois de probabilité des f_i et de e sont diffuses en dehors de 0

(c) Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il existe un ensemble $C_i \in \mathcal{A}$ tel que $\int_{C_i} f_i^2 dP = \infty$

et tel que pour tout $j \neq i$, f_j est bornée sur C_i .

Il existe alors $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ tel que

(α) $\|g - e\|_1 < \varepsilon$

(β) pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, le produit $gf_i \in L^1$ et $E[f_i g] = E[f_i]E[g]$

(γ) il existe $B_0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ tels que $\int_{B_0} |g|^2 dP = \infty$, g soit bornée sur $\cup_1^n B_i$, et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\int_{B_i} f_i^2 dP = \infty$ et f_i soit bornée sur $\cup_{i \neq j} B_j$.

(δ) la loi de probabilité de g soit diffuse en dehors de 0.

Démonstration du lemme. L'hypothèse (c) implique qu'il existe n éléments dis-joints $C_1, \dots, C_n$ de $\mathcal{A}$ vérifiant : pour tout i , $\int_{C_i} f_i^2 dP = \infty$, f_i conserve le même signe sur C_i , les f_j sont bornées sur C_i pour $j \neq i$. De plus nous choisirons les C_i de façon que $\int_{C_i} |f_i| dP < \frac{\varepsilon}{2n+1}$, $\int_{C_i} |e| dP < \frac{\varepsilon}{2n+1}$ et $P(\bigcup_1^n C_i) < 1$. Finalement $\mathcal{A}$ étant non-atomique nous pouvons supposer que pour tout i , $C_i = A_i \cup B_i$, $A_i \cap B_i = \emptyset$, $\int_{A_i} f_i^2 dP = \int_{B_i} f_i^2 dP = \infty$.

Nous allons procéder à la construction de g . Quitte à remplacer f_i par $f_i - E[f_i]$ nous supposons que $E[f_i] = 0$.

Fixons un ensemble $B_0 \subseteq (\bigcup_1^n C_i)^c$ de mesure > 0 tel que les f_i soient bornées sur B_0 et définissons g sur B_0 de sorte que

$$\int_{B_0} |g| dP < \infty, \quad \int_{B_0} |g|^2 dP = \infty, \quad \int_{B_0} |g - e| dP < \frac{\varepsilon}{2n+1}$$

et que g soit diffuse sur B_0 , ce qui est possible, l'espace étant non-atomique. Sur le reste de $(\bigcup_1^n C_i)^c$, posons $g = e$. Il s'agit maintenant de définir g sur chaque ensemble C_i . Disons tout de suite que, pour tout i , $|g|$ sera égale à $|f_i|$ sur une partie de A_i et à 0 sur ce qui reste de A_i et sur B_i de sorte que

$$\|g - e\|_1 = \int_{B_0} |g - e| dP + \sum_{i=1}^n \int_{C_i} |g - e| dP < \frac{\varepsilon}{2n+1} + \sum_i \left(\int_{C_i} |f_i| dP + \int_{C_i} |e| dP \right) < \varepsilon.$$

Donnons nous une série convergente $\sum a_n$ avec $a_n > 0$ pour tout n et soit $0 < b_1 < b_2 < \dots$ une suite de réels vérifiant pour tout m

$$(1) \quad \sum_{j \neq i} \int_{A_j \cap \{|f_j| > b_m\}} |f_i f_j| dP < a_m \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Posons $J_i^{(1)} = \int_{(\bigcup_1^n C_j)^c} g f_i dP$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et commençons par définir, pour chaque i , g sur une partie de A_i de la façon suivante : supposons par exemple qu'on ait $J_1^{(1)} \leq 0$ et $f_1 \leq 0$ sur A_1 . Soient $c_1^{(1)}, d_1^{(1)}$ des réels tels que

$$b_1 < c_1^{(1)} < d_1^{(1)} \text{ et } \int_{A_1 \cap \{-d_1^{(1)} < f_1 < -c_1^{(1)}\}} f_1^2 dP = -J_1^{(1)}.$$

De tels réels $c_1^{(1)}$ et $d_1^{(1)}$ existent du fait que la loi de f_1 est diffuse et que $\int_{A_1} f_1^2 dP = \infty$. Posons

$$A_1^{(1)} = A_1 \cap \{-d_1^{(1)} < f_1 < -c_1^{(1)}\} \text{ et } g = f_1 \text{ sur } A_1^{(1)}.$$

On définit de même les paires $(c_1^{(2)}, d_1^{(2)})$, ..., $(c_1^{(n)}, d_1^{(n)})$, les parties $A_2^{(1)}, \dots, A_n^{(1)}$ de $A_2, \dots, A_n$, et g sur chaque $A_i^{(1)}$: g vaudra f_i si $J_i^{(1)} \leq 0$, $-f_i$ si $J_i^{(1)} \geq 0$. On aura pour $i \in \{1, \dots, n\}$, grâce à l'inégalité (1) ci-dessus,

$$\left| \int_{(\bigcup C_j)^c \cup (\bigcup_j A_j^{(1)})} g f_i dP \right| < a_1.$$

Ensuite posons $J_i^{(2)} = \int_{(\bigcup_j C_j)^c \cup (\bigcup_j A_j^{(1)})} g f_i dP$ et définissons des paires de réels $(c_2^{(1)}, d_2^{(1)}), \dots, (c_2^{(n)}, d_2^{(n)})$ vérifiant

$$d_1^{(j)} \vee b_2 < c_2^{(j)} < d_2^{(j)} \text{ et } \int_{A_j \cap \{c_2^{(j)} < |f_j| < d_2^{(j)}\}} f_j^2 = |J_j^{(2)}|.$$

Posons $A_j^{(2)} = A_j \cap \{c_2^{(j)} < |f_j| < d_2^{(j)}\}$ et définissons g sur $A_j^{(2)}$ par $g = f_j$ si $J_j^{(2)} \leq 0$, $-f_j$ si $J_j^{(2)} \geq 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Toujours en vertu de l'inégalité (1) on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\bigcup_j C_j)^c \cup (\bigcup_j A_j^{(1)}) \cup (\bigcup_j A_j^{(2)})} g f_i dP \right| < a_2, \\ & \int_{(\bigcup_j C_j)^c \cup (\bigcup_j A_j^{(1)}) \cup (\bigcup_j A_j^{(2)})} |g f_i| dP < a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Et ainsi de suite. À la $m^{\text{ième}}$ étape nous aurons construit, pour tout i, m parties disjointes $A_i^{(1)}, \dots, A_i^{(m)}$ de A_i vérifiant

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\bigcup_j C_j)^c \cup (\bigcup_{i=1, k=1}^{n, m} A_j^{(k)})} g f_i dP \right| < a_m, \\ (2) \quad & \int_{(\bigcup_j C_j)^c \cup (\bigcup_{i=1, k=1}^{n, m} A_j^{(k)})} |g f_i| dP < a_1 + \dots + a_m. \end{aligned}$$

Posons enfin $g = 0$ sur $A_i \setminus \bigcup A_i^{(k)}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. D'après (2), $g f_i$ est intégrable car la série $\sum a_m$ est convergente, et la première de ces inégalités implique que $E[g f_i] = 0$ car $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$. $\square$

Passons à la démonstration de la proposition. Soit $\{e_n\}$ une famille dénombrable d'éléments de $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Omega)$, dense dans $L_{\mathbb{R}}^1(\Omega)$, telle que chaque e_n ait une loi diffuse en dehors de 0 (il est facile de voir qu'une telle famille existe). Donnons nous deux suites $(\varepsilon_n), (\varepsilon'_n)$ de réels > 0 décroissant vers 0. Il existe $f_1 \in L_{\mathbb{R}}^1 \setminus L_{\mathbb{R}}^2$ de loi diffuse en dehors de 0 telle que $\|f_1 - e_1\|_1 < \varepsilon_1$. D'après le lemme, il existe $g_1 \in L_{\mathbb{R}}^1 \setminus L_{\mathbb{R}}^2$ de loi diffuse en dehors de 0 telle que

$$\|g_1 - e_1\|_1 < \varepsilon'_1, \quad g_1 f_1 \in L^1, \quad E[g_1 f_1] = E[f_1]E[g_1]$$

et deux parties disjointes A_1, B_1 de $[0, 1]$ vérifiant $\int_{A_1} f_1^2 dP = \int_{B_1} g_1^2 dP = \infty$, g_1 est bornée sur A_1 , f_1 est bornée sur B_1 .

Ensuite il existe $f_2 \in L_{\mathbb{R}}^1 \setminus L_{\mathbb{R}}^2$ diffuse en dehors de 0 vérifiant

$$f_1 f_2, g_1 f_2 \in L_{\mathbb{R}}^1, \quad E[f_1 f_2] = E[f_1]E[f_2], \quad E[g_1 f_2] = E[g_1]E[f_2], \quad \|f_2 - e_2\|_1 < \varepsilon_2.$$

De plus il existe $A, B, C \subseteq [0, 1]$ disjoints tels que

$$\int_A f_1^2 dP = \int_B g_1^2 dP = \int_C f_2^2 dP = \infty,$$

f_1 bornée sur $B \cup C$, g_1 bornée sur $A \cup C$, f_2 bornée sur $A \cup B$. Puis il existe $g_2 \in L_{\mathbb{R}}^1 \setminus L_{\mathbb{R}}^2$ diffuse en dehors de 0 telle que

$$g_2 g_1, g_2 f_1, g_2 f_2 \in L_{\mathbb{R}}^1, \quad E[g_1 g_2] = E[g_1]E[g_2], \quad E[g_2 f_i] = E[g_2]E[f_i]$$

pour $i = 1, 2$, $\|g_2 - e_2\|_1 < e'_2$, g_i^2 et f_i^2 étant d'intégrales infinies sur des ensembles disjoints sur lesquels les autres fonctions sont bornées. Et ainsi de suite... $\square$

Je remercie Jean-Paul THOUVENOT de son aide.