Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Marc Arnaudon

Barycentres convexes et approximations des martingales continues dans les variétés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 70-85

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1995__29__70_0>

Barycentres convexes
et approximations des martingales continues dans les variétés

Marc Arnaudon

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France.

Résumé

On majore le diamètre de l'ensemble des barycentres convexes d'une probabilité portée par un petit compact d'une variété avec connexion, par le moment d'ordre trois de la probabilité. Si le compact est un espace produit, on démontre que le projeté sur une composante de l'ensemble des barycentre convexes est l'ensemble des barycentres convexes de la loi marginale sur cette composante.

On utilise ces propriétés pour démontrer que les suites de martingales discrètes construites à partir de la valeur terminale d'une martingale continue convergent vers cette martingale continue lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, s'il existe une distance riemannienne convexe sur la variété. La convergence a lieu aussi dans tous les compacts suffisamment petits si la martingale continue a une variation quadratique dominée par un processus déterministe. On retrouve ainsi les résultats de convergence obtenus par Picard avec une définition différente des barycentres.

1. Introduction

Soient V un compact d'une variété W avec connexion ∇, et un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1}, P)$ vérifiant les conditions habituelles. Soit L une variable aléatoire à valeurs dans V. On sait (voir [E,M]), que si X est une martingale continue telle que $X_1 = L$, alors pour tout $t \leq 1$, X_t est dans l'ensemble de variables aléatoires $\mathbb{E}[L|\mathcal{F}_t]$, des espérances conditionnelles de L quand $\mathcal{F}_t$. Toute la difficulté du problème de construire X à partir de L réside dans le fait que cet ensemble n'est pas en général réduit à un singleton. Dans une première partie, on donne une majoration de la distance de deux éléments de cet ensemble, par le moment d'ordre 3 de L quand $\mathcal{F}_t$, sous certaines conditions de convexité de la variété.

Contrairement aux barycentres conditionnels de [P2] qui sont stables par produit, les produits d'espérances conditionnelles de [E,M] ne sont pas en général des espérances conditionnelles. On remédie à ce défaut en démontrant qu'avec des conditions de convexité sur une variété produit, si les lois conditionnelles par rapport aux sous-tribus de $\mathcal{F}$ existent, alors pour toute variable aléatoire (L, L') dans la variété produit, et pour tout élément X de $\mathbb{E}[L|\mathcal{F}_t]$, il existe X' dans $\mathbb{E}[L'|\mathcal{F}_t]$ tel que (X, X') soit dans $\mathbb{E}[(L, L')|\mathcal{F}_t]$. On utilise ce résultat pour démontrer que si L et L' sont proches, alors $\mathbb{E}[L|\mathcal{F}_t]$ et $\mathbb{E}[L'|\mathcal{F}_t]$ sont proches. En utilisant une méthode de Picard ([P2]), ce résultat nous conduit à démontrer que les suites de martingales discrètes construites à partir de la valeur terminale d'une martingale continue convergent vers la martingale continue lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

2. Majoration du diamètre des barycentres convexes, existence des barycentres convexes dans les variétés produits

2.1. Définitions et rappels

On considère toujours un compact V d'une variété W avec connexion ∇, et un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1}, P)$ vérifiant les conditions habituelles.

Une fonction f définie sur un ouvert W' de W sera dite convexe si pour toute géodésique $\gamma : I \to W'$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la fonction $f \circ \gamma$ est convexe sur I. Cette définition n'est intéressante que s'il existe suffisamment de géodésiques dans W', par exemple lorsque deux points de W' sont toujours reliés par une géodésique. Si au contraire W' n'est pas connexe, elle n'a pas beaucoup de sens.

On notera $\mathcal{C}(V)$ l'ensemble des fonctions convexes définies sur un voisinage ouvert de V.

DÉFINITION 2.1. — *On dira que le compact V vérifie la condition (i) s'il possède un voisinage ouvert W' tel que deux points de W' soient reliés par une géodésique incluse dans W' et une seule qui dépend de façon C^∞ des deux points, et si la géodésique qui relie deux points de V est incluse dans V.*

Si la condition (i) est réalisée, pour tous x, y dans V, le vecteur $\overrightarrow{xy} \in T_xW$ désignera le vecteur vitesse en x de la géodésique passant en x au temps 0 et en y au temps 1. L'application qui à (x, y) associe $\overrightarrow{xy}$ est de classe C^∞.

Tout point d'une variété avec connexion possède un voisinage compact qui vérifie la condition (i). Dans une variété riemannienne, une boule géodésique régulière (voir [K1] théorème 1.7) vérifie aussi (i).

Les définitions qui suivent sont dues à Émery et Mokobodzki [E,M].

DÉFINITION 2.2. — *Si μ est une probabilité sur V, on dira que $x \in V$ est un barycentre convexe de μ si pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(V)$, on a $f(x) \leq \mu(f)$. On notera $b(\mu)$ l'ensemble des barycentres convexes de μ.*

Si le compact V vérifie la condition (i), on appellera barycentre exponentiel d'une probabilité μ tout point e de V qui vérifie $\int_V \overrightarrow{ey}\,\mu(dy) = 0$.

D'après [E,M] proposition 2, tout barycentre exponentiel d'une probabilité μ est dans $b(\mu)$.

DÉFINITION 2.3. — *Si X est une variable aléatoire à valeurs dans V et si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on appellera espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ toute variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable Y à valeurs dans V telle que $f \circ Y \leq \mathbb{E}[f \circ X|\mathcal{G}]$ pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(V)$. On notera $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ l'ensemble (éventuellement vide) des espérances conditionnelles de X sachant $\mathcal{G}$.*

Si V vérifie (i), on appellera espérance conditionnelle exponentielle de X sachant $\mathcal{G}$ toute variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable Y à valeurs dans V telle que $\mathbb{E}[\overrightarrow{YX}|\mathcal{G}] = 0$. On utilisera la notation $\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]$ pour désigner une espérance conditionnelle exponentielle.

On dira que les espérances conditionnelles existent dans V si quelle que soit X variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans V, quelle que soit $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$, l'ensemble $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est non vide. On notera (i') cette propriété.

LEMME 2.4. — *Pour toute variable aléatoire X dans V, pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$, toute espérance conditionnelle exponentielle $\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]$ —s'il en existe— est un élément de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.*

Démonstration. — La preuve est analogue à celle de [E,M] proposition 2. Il faut montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(V)$, on a $f(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]$. Pour une telle fonction f, pour tout a dans V, on définit $\partial f(a)$ comme étant l'ensemble des $h \in T_a^*V$ tels que pour tout x dans V, on ait $f(x) - f(a) \geq h(\overrightarrow{ax})$. Nous pouvons remarquer que dans cette définition, on peut remplacer "pour tout x dans V" par "il existe un voisinage V_a de a, tel que pour tout x dans V_a", en vertu de la condition (i) et de la convexité de f sur les géodésiques. D'après [E,Z] corollaire 1, $\partial f(a)$ n'est pas vide. On définit ∂f comme étant la réunion des $\partial f(a)$, a parcourant V. L'ensemble ∂f est un borélien de T^*V dont on choisit une section borélienne $a \mapsto f'(a)$. On a alors pour tous a, x dans V, $f(x) - f(a) \geq f'(a)(\overrightarrow{ax})$, donc $f(x) - f(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]) \geq f'(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}])\left(\overrightarrow{\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]x}\right)$. Ceci implique que

$$\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] - f(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]) \geq \mathbb{E}\left[f'(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}])\left(\overrightarrow{\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]X}\right)|\mathcal{G}\right].$$

Par linéarité de $f'(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}])(\cdot)$, le terme de droite est égal à

$$f'(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}])\left(\mathbb{E}\left[\overrightarrow{\mathcal{E}[X|\mathcal{G}]X}|\mathcal{G}\right]\right).$$

Il est nul, et on a bien $\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] \geq f(\mathcal{E}[X|\mathcal{G}])$. □

DÉFINITION 2.5. — *On dira qu'une semi-martingale X à valeurs dans V est une $\mathcal{C}$-martingale si pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(V)$, le processus $f(X)$ est une sous-martingale réelle.*

D'après [E,Z] théorème 2, les martingales continues au sens usuel, que nous appellerons aussi ∇-martingales, sont des $\mathcal{C}$-martingales. La réciproque est fausse en général, et les $\mathcal{C}$-martingales ne sont pas toujours des processus continus. On les relie aux espérances conditionnelles en constatant qu'une semi-martingale est une $\mathcal{C}$-martingale si et seulement si pour tous $s, t \in [0,1]$ vérifiant $s \leq t$, on a $X_s \in \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$.

Soit L une variable aléatoire $\mathcal{F}_1$-mesurable à valeurs dans V. Lorsque la condition (i') est vérifiée, on peut construire des $\mathcal{C}$-martingales discrètes de valeur terminale donnée L, par rapport à toutes les subdivisions de $[0,1]$. Il suffit en effet, étant donnée une subdivision $(t_i)_{1\leq i\leq k}$, de prendre pour X_{t_i} un élément de $\mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}]$, et de faire une récurrence descendante. Les $\mathcal{C}$-martingales discrètes sont des $\mathcal{C}$-martingales pour la filtration discrétisée, égale à $\mathcal{F}_{t_i}$ sur l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$.

La condition (i') est réalisée dans les deux cas de figure présentés par les propositions 2.6 et 2.7.

PROPOSITION 2.6. — *Si le sous-ensemble compact V de W vérifie la condition (i), est de la forme $\{\phi \leq 0\}$, avec ϕ convexe de classe C^2 au voisinage de V, telle que $\{\varphi < 0\}$ ne soit pas vide, alors les espérances conditionnelles exponentielles existent dans V.*

Notons que Émery et Mokobodzki ont donné dans [E,M] une condition d'existence des barycentres exponentiels : il suffit que V soit de la forme $\{\varphi \leq 0\}$, avec φ convexe de classe C^2 au voisinage de V. La démonstration qui va suivre est inspirée de celle qui figure dans [E,M].

Démonstration. — Nous allons tout d'abord démontrer que le compact V est une variété à bord dont le bord est exactement égal à $\{\varphi = 0\}$. Pour cela, il suffit de démontrer que $d\varphi$ n'est pas nulle sur $\{\varphi = 0\}$. Soit o un point de V tel que $\varphi(o) < 0$. Si $x \in \{\varphi = 0\}$, alors la convexité de φ sur la géodésique reliant x et o permet d'écrire l'inégalité $\left\langle d\varphi, \overrightarrow{xo}\right\rangle \leq \varphi(o) - \varphi(x) < 0$. On en déduit que $d\varphi$ n'est pas nulle sur $\{\varphi = 0\}$. Nous allons maintenant établir que tout champ de vecteurs sur V qui est transverse au bord et dirigé vers l'extérieur admet au moins un zéro dans l'intérieur de V. La somme des indices aux points d'annulation des champs de vecteurs de V qui n'ont que des zéros isolés et qui sont transverses au bord, dirigés vers l'extérieur, est égale à la caractéristique d'Euler de V (théorème de Poincaré-Hopf [M] p. 35). Le champ de vecteurs $x \mapsto -\overrightarrow{xo}$ est égal à l'identité dans la carte exponentielle centrée en o, et est transverse au bord, dirigé vers l'extérieur. On en déduit que la caractéristique d'Euler de V est 1. Tout champ de vecteurs sur V, transverse au bord et dirigé vers l'extérieur, a donc au moins un zéro isolé s'il n'a pas de point d'accumulation de zéros.

Soient L une variable aléatoire à valeurs dans V, et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On peut supposer que L prend ses valeurs dans l'intérieur de V, car dans le cas contraire, on fait la même démonstration avec tous les $V_\varepsilon = \{\varphi \leq \varepsilon\}$.

Pour x dans un sous-ensemble dénombrable dense d'un voisinage de V, on choisit $\omega \mapsto v_x(\omega)$ dans la classe de variables aléatoires $\mathbb{E}\left[\overrightarrow{xL}|\mathcal{G}\right]$ telle que sur un sous-ensemble Ω' de Ω de probabilité 1, le champ de vecteurs $x \mapsto v_x$ soit de classe C^1, avec des dérivées uniformément bornées, indépendamment de ω. Pour $\omega \in \Omega'$, on peut donc prolonger $v.(\omega)$ à un champ de vecteurs de classe C^1 sur V tout entier. Montrons que, presque sûrement, v est transverse à l'hypersurface $\{\varphi = 0\}$, dirigé vers l'intérieur de V. On note $(\omega, t, x) \mapsto U_t(x)(\omega)$ le groupe à un paramètre issu de $v.(\omega)$. Il vérifie $\frac{d}{dt}U_t(x) = v_{U_t(x)}$ et $U_0(x) = x$. Si $U_t(x) \in V$, on a

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(U_t(x)\right) = \left\langle d\varphi(U_t(x)), \mathbb{E}\left[\overrightarrow{U_t(x)L}|\mathcal{G}\right]\right\rangle = \mathbb{E}\left[\langle d\varphi(U_t(x)), \overrightarrow{U_t(x)L}\rangle|\mathcal{G}\right].$$

Comme φ composée à la géodésique joignant $U_t(x)$ à L est convexe, on obtient

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(U_t(x)\right) \leq \mathbb{E}[\varphi(L)|\mathcal{G}] - \varphi(U_t(x)),$$

ce qui donne pour $t = 0$ et $x \in \partial V$,

$$\langle d\varphi(x), v_x\rangle \leq \mathbb{E}[\varphi(L)|\mathcal{G}] < 0.$$

On a montré que $-v$ était transverse sur le bord et dirigé vers l'extérieur. On en déduit que $v(\omega)$ s'annule dans l'intérieur de V, pour tout $\omega \in \Omega'$. Définissons $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = \{(\omega, x) \in \Omega' \times V, v_x(\omega) = 0\}$. C'est un ensemble mesurable par rapport au produit de $\mathcal{G}$ et de l'ensemble des boréliens de V, et une section $\mathcal{G}$-mesurable $\omega \mapsto \mathcal{E}[L|\mathcal{G}](\omega)$ est une espérance conditionnelle exponentielle de L par rapport à $\mathcal{G}$. $\square$

On obtient aussi la condition (i') avec des hypothèses géométriques plus faibles, mais en imposant des conditions sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

PROPOSITION 2.7. — *On suppose que pour toute probabilité μ sur V, l'ensemble des barycentres convexes de μ n'est pas vide, et qu'il existe des lois conditionnelles sur Ω relativement à n'importe quelle sous-tribu de $\mathcal{F}$.*

Alors les espérances conditionnelles existent dans V.

La démonstration de ce résultat figure dans [A]. Notons que dans la plupart des espaces canoniques, on a l'existence des lois conditionnelles par rapport à toutes les sous-tribus.

Lorsque deux points quelconques de V peuvent toujours être reliés par au moins une géodésique passant dans V, alors les barycentres convexes existent sur V. En effet, on commence par les construire pour des probabilités qui sont des sommes finies de masses de Dirac en remplaçant deux masses de Dirac par leur barycentre sur une géodésique, et en utilisant l'associativité. Si μ est une probabilité quelconque, on considère une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures du type précédent qui converge étroitement vers μ, et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de barycentres convexes associés à ces mesures. Une valeur d'adhérence de la suite (x_n) sera un barycentre convexe de μ.

En particulier, si V vérifie (i), alors les barycentres convexes existent sur V.

DÉFINITION 2.8. — *On notera (ii) la condition d'existence pour tout $(x, y) \in V \times V$ tel que $x \neq y$, d'une fonction $f \in \mathcal{C}(V)$ qui vérifie $f(x) < f(y)$.*

On notera (iii) la condition d'existence pour tous $a \in V$ et $\lambda \in T_a^*W$ d'une fonction f convexe de classe C^2 sur un voisinage de V telle que $df(a) = \lambda$ et $\operatorname{Hess} f(a) = 0$.

Si deux points de V sont toujours reliés par une géodésique incluse dans V, alors la condition (iii) implique la condition (ii). En effet, si on choisit deux points différents x et y dans V, la condition (iii) permet de construire une fonction convexe nulle en x, dont la restriction à une géodésique qui va de x à y a une dérivée égale à 1 au point x. Cette fonction devra être strictement positive en y.

On notera (ii') la condition d'existence pour tout x dans V d'une fonction $f \in \mathcal{C}(V)$ qui vérifie $f(x) = 0$ et $f > 0$ sur $V \backslash \{x\}$. Cette condition est plus forte que (ii). Pour la réciproque, il suffit d'ajouter une condition sur les fonctions f de la condition (ii) :

PROPOSITION 2.9. — *S'il existe un voisinage compact V' de V tel que pour tout $(x, y) \in V \times V$ vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(V')$ qui vérifie $f(x) < f(y)$, alors le compact V vérifie la condition (ii').*

Démonstration. — On fixe une métrique sur W qui ne nous servira qu'à définir des fonctions lipschitziennes de rapport 1. La connexion utilisée est toujours celle du début. Montrons tout d'abord que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(V')$, il existe un voisinage de V' dans lequel f est lipschtzienne. D'après [E,Z] (proposition 1), pour toute carte locale de domaine inclus dans le domaine de définition de f, la fonction f lue dans cette carte locale est localement lipschitzienne. On peut donc recouvrir le compact V' par un nombre fini de cartes locales dans lesquelles f est lipschitzienne. Elle est donc lipschitzienne dans la réunion des domaines de ces cartes, qui contient V'.

Soit $x \in V$. Pour tout y dans V différent de x, il existe une fonction $f_y \in \mathcal{C}(V')$ telle que $0 = f_y(x) < f_y(y)$. Quitte à multiplier f_y par une constante, nous pouvons imposer à f_y d'être lipschtzienne de rapport inférieur à 1 sur un voisinage de V'. Ceci nous permet de démontrer que la fonction $f = \sup_{y \in V \backslash \{x\}} f_y$ est bien définie sur V', lipschtzienne de rapport 1 et convexe sur l'intérieur de V'. Elle appartient donc à $\mathcal{C}(V)$, et vérifie $f(x) = 0$, $f > 0$ sur $V \backslash \{x\}$. □

Rappelons les résultats dont la démonstration figure dans [A], et qui relient la convexité du compact V à des propriétés vérifiées par les $\mathcal{C}$-martingales.

PROPOSITION 2.10. — *Si toutes les martingales réelles de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ sont continues et si le compact V vérifie la condition (ii), alors les $\mathcal{C}$-martingales de V sont continues.*

Si le compact V vérifie la condition (iii), alors les $\mathcal{C}$-martingales continues sont des ∇-martingales.

2.2. Les $\mathcal{C}$-martingales dans les variétés à géométrie convexe

DÉFINITION 2.11. — *On dira qu'une variété avec connexion W' a une géométrie convexe s'il existe une fonction convexe $\psi : W' \times W' \to \mathbb{R}$ de classe C^3, positive, qui s'annule exactement sur la diagonale, et telle que pour tout $a \in W'$, l'application $\psi_a = \psi(a, \cdot)$ ait une hessienne $\nabla d\psi_a$ strictement positive sur $W' \backslash \{a\}$.*

On dira qu'un compact V' d'une variété avec connexion a une géométrie convexe s'il possède un voisinage ouvert qui a une géométrie convexe.

Si la variété W' est suffisamment petite, alors d'après [E] lemme (4.59), elle a une géométrie convexe. D'autre part, Kendall a démontré (voir [K2] et [A]) que les boules géodésiques régulières dans les variétés riemanniennes ont une géométrie convexe.

PROPOSITION 2.12. — *Si le compact V a une géométrie convexe, alors il vérifie les conditions (ii) et (iii).*

Avant de démontrer la proposition, nous allons construire une famille de fonctions convexes sur V. Fixons une métrique riemannienne quelconque g sur W, et soit δ la distance riemannienne associée. La notation $\operatorname{Hess} f$ désignera ∇df (∇ est la connexion donnée au début, et n'est pas la connexion associée à la métrique g).

LEMME 2.13. — *On suppose que le compact V a une géométrie convexe. Alors il existe deux constantes strictement positives c_δ et C_δ, et une famille de fonctions $(h_a)_{a\in V}$ de classe C^2 sur V, telles que l'on ait pour tous a, x dans V,*

$$c_\delta\delta^3(a,x) \leq h_a(x) \leq C_\delta\delta^3(a,x) \quad et \quad c_\delta\delta(a,x)g(x) \leq \operatorname{Hess} h_a(x) \leq C_\delta\delta(a,x)g(x).$$

Démonstration du lemme 2.13. — On note Δ la diagonale de $V \times V$, et on définit une fonction η de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, positive, de classe C^∞ sur $V \times V\backslash\Delta$, et qui coïncide avec δ sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de Δ. On peut supposer, quitte à remplacer ψ par ψ^ν avec ν entier supérieur à 2, que pour tout $a \in V$, la hessienne $\operatorname{Hess}\psi_a(a)$ est nulle. Montrons que si A est un réel positif suffisamment grand, les fonctions $h_a(x) = \eta(a,x)^3 + A\psi(a,x)$ conviennent. Ce sont des fonctions de classe C^2 avec des dérivées jusqu'à l'ordre 2 qui s'annulent en a. Elles satisfont le premier encadrement. Notons η_a la fonction $\eta(a,\cdot)$.

Nous allons tout d'abord établir la minoration de $\operatorname{Hess} h_a(x)$. Quitte à réduire $\mathcal{V}$, on peut supposer qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout $(a,x) \in \mathcal{V}$, on ait $\operatorname{Hess}\eta_a^2(x) \geq c'g(x)$. Comme

$$\operatorname{Hess}\eta_a^3(x) = \frac{3}{2}\eta_a(x)\operatorname{Hess}\eta_a^2(x) + 3\eta_a(x)d\eta_a(x)\otimes d\eta_a(x)$$

lorsque $x \neq a$, on déduit que sur $\mathcal{V}$, on a $\operatorname{Hess}\eta_a^3(x) \geq \frac{3}{2}c'\delta(a,x)g(x)$, et donc pour tout A positif, $\operatorname{Hess}(\eta_a^3(x) + A\psi_a(x)) \geq \frac{3}{2}c'\delta(a,x)g(x)$.

Pour obtenir la minoration sur le complémentaire de $\mathcal{V}$, il suffit sur ce compact de minorer δ par une constante strictement positive α, de minorer $\operatorname{Hess}\psi_a(x)$ par $\beta g(x)$ avec $\beta > 0$, et $\operatorname{Hess}\eta_a^3(x)$ par $-Mg(x)$ avec $M \geq 0$. Si on choisit $A \geq \dfrac{\alpha + M}{\beta}$, on obtient l'inégalité désirée.

Nous allons établir la majoration de $\operatorname{Hess} h_a(x)$ avec une constante A vérifiant l'inégalité ci-dessus. La majoration de $\operatorname{Hess}\eta_a^3(x)$ découle de l'expression écrite plus haut. Pour la majoration de $\operatorname{Hess}\psi_a(x)$ il suffit de constater que pour tout $a \in V$, on a $\operatorname{Hess}\psi_a(a) = 0$. Comme l'application $(a,x) \mapsto \psi_a(x)$ est de classe C^3, on déduit qu'il existe une constante C' telle que pour tout $(a,x) \in V \times V$, on ait $\operatorname{Hess}\psi_a(x) \leq C'\delta(a,x)g(x)$. On obtient ensuite la majoration désirée pour $\operatorname{Hess} h_a(x)$. $\square$

Démonstration de la proposition 2.12. — On suppose que V est un compact à géométrie convexe. Pour obtenir la condition (ii), il suffit d'associer au couple (x,y) la fonction ψ_x.

Démontrons que la condition (iii) est réalisée. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de la diagonale Δ de $V \times V$, et une application $(a,x) \mapsto w_a(x) \in T_aW$ définie sur $V \times V$, de classe C^∞, tels que $(a,x) \mapsto \exp_a^{-1}(x)$ soit définie et de classe C^∞ sur $\mathcal{V}$, et les deux applications coïncident sur cet ensemble. Comme pour tout $a \in V$, l'application $x \mapsto w_a(x)$ a une hessienne nulle en a, il existe une constante K telle que pour tout (a,x), pour tout $\lambda \in T_a^*W$, on ait $-K\|\lambda\|\delta(a,x)g(x) \leq \mathrm{Hess}(\lambda \circ w_a)(x)$. Pour obtenir une fonction f convexe telle que $df(a) = \lambda$ et $\mathrm{Hess}\, f(a) = 0$, il suffit de poser

$$f(x) = (\lambda \circ w_a)(x) + \frac{K\|\lambda\|}{c_\delta} h_a(x).$$

On obtient ainsi la condition (iii). $\square$

Contrairement aux conditions (ii) et (iii), qui sont réalisées dès que le compact V est suffisamment petit, la condition (i') d'existence des espérances conditionnelles peut ne pas être réalisée localement, par exemple s'il y a des petits trous dans le compact V. Au contraire, si cet ensemble est grand et s'il n'y a plus assez de fonctions convexes, alors (i') est toujours réalisée, l'ensemble des espérances conditionnelles est trop grand et il y a trop de $\mathcal{C}$-martingales (par exemple dans une variété compacte connexe sans bord, toutes les semi-martingales sont des $\mathcal{C}$-martingales).

2.3. Majoration du diamètre des barycentres convexes dans les variétés à géométrie convexe

On supposera dans cette partie que le compact V a une géométrie convexe, et qu'il vérifie la condition (i). On supposera aussi que toute probabilité μ sur V a un barycentre exponentiel e_μ. Notons que Kendall [K1] a démontré qu'il était unique en géométrie convexe.

PROPOSITION 2.14. — *Sous les conditions écrites ci-dessus, pour toute distance riemannienne δ sur V, il existe une constante C telle que pour toute probabilité μ sur V, pour tout v dans V, on ait l'inégalité*

$$|b(\mu)| \leq C \int_V \delta^3(v,y)\mu(dy),$$

où $|b(\mu)|$ désigne le diamètre de $b(\mu)$ pour la distance δ.

On pourrait démontrer, en se plaçant dans une petite boule géodésique d'une sphère et en prenant des probabilités portées par trois points, que cette estimation est optimale : si on remplace le moment d'ordre 3 dans l'inégalité par un moment d'ordre supérieur, l'inégalité devient fausse en général.

Démonstration de la proposition. — Considérons une métrique riemannienne g sur V, et la distance δ associée. On note S^*W l'ensemble des formes linéaires sur V de norme 1 pour g. Les applications exp et les vecteurs $\overrightarrow{xy}$ seront toujours calculés avec la connexion ∇ (et non pas avec g). En raison de la compacité de V, il existe une constante c_1 strictement positive, telle que pour tous $x, y \in V$, on ait l'inégalité $c_1\delta(x,y) \leq \sup_{\lambda \in S_x^*W} \lambda(\overrightarrow{xy})$.

Reprenant les notations du lemme 2.13, on pose toujours $h_a(x) = \eta(a,x)^3 + A\psi(a,x)$. En raison de la compacité de V, il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tout $a \in V$, $\lambda \in S_a^*W$, les fonctions $x \mapsto \lambda(\overrightarrow{ax}) + C'h_a(x)$ soient convexes.

Soit μ une probabilité sur V. Nous allons tout d'abord démontrer la proposition avec $v = e_\mu$. Soient x un élément de $b(\mu)$ et $\lambda \in S_{e_\mu}^*W$. On a

$$\lambda(\overrightarrow{e_\mu x}) + C'h_{e_\mu}(x) \le \int_V \mu(dy)\left(\lambda(\overrightarrow{e_\mu y}) + C'h_{e_\mu}(y)\right).$$

On a $\displaystyle\int_V \mu(dy)\left(\lambda(\overrightarrow{e_\mu y})\right) = \lambda\left(\int_V \mu(dy)\overrightarrow{e_\mu y}\right) = 0$ puisque e_μ est le barycentre exponentiel de μ. D'autre part, $C'h_{e_\mu}(x) \ge 0$, donc on obtient

$$\lambda(\overrightarrow{e_\mu x}) \le C' \int_V \mu(dy)h_{e_\mu}(y).$$

L'inégalité est encore valable avec à gauche le supremum sur $\lambda \in S_{e_\mu}^*W$, ce qui permet ensuite d'obtenir $c_1\delta(e_\mu, x) \le C' \int_V \mu(dy)\left(h_{e_\mu}(y)\right)$. D'après la définition des h_a, pour tous a, x, on a $h_a(x) \le C_\delta\delta^3(a,x)$. En posant $C = \dfrac{2C'C_\delta}{c_1}$, on obtient bien l'inégalité $|b(\mu)| \le C \displaystyle\int_V \delta^3(e_\mu, y)\mu(dy)$.

Si v est un élément quelconque de V, il suffit d'établir qu'il existe une constante C' indépendante de μ telle que $\int_V \delta^3(e_\mu,y)\mu(dy) \le C'\int_V \delta^3(v,y)\mu(dy)$. En raison de la convexité de h_v, on a $h_v(e_\mu) \le \int_V h_v(y)\mu(dy)$, que l'on peut transformer en $\delta^3(v,e_\mu) \le \frac{C_\delta}{c_\delta}\int_V \delta^3(v,y)\mu(dy)$, car $C_\delta\delta^3(a,x) \ge h_a(x) \ge c_\delta\delta^3(a,x)$ pour tous $a, x \in V$. De l'inégalité $\delta^3(e_\mu, y) \le 4(\delta^3(e_\mu, v) + \delta^3(b,y))$ pour tout $y \in V$, on déduit

$$\int_V \delta^3(e_\mu,y)\mu(dy) \le 4\frac{C_\delta}{c_\delta}\int_V \delta^3(v,y)\mu(dy) + 4\int_V \delta^3(v,y)\mu(dy).$$

Ceci achève la démonstration. □

PROPOSITION 2.15. — *Sous les conditions écrites au début de la partie 2.3, pour toute métrique riemannienne δ sur V, il existe une constante C, telle que quelles que soient la sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, la variable aléatoire L à valeurs dans V telle que $\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]$ existe, quels que soient les éléments X et Y de $\mathbb{E}[L|\mathcal{G}]$, quelle que soit la variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable Z à valeurs dans V on ait l'inégalité*

$$\delta(X,Y) \le C\mathbb{E}[\delta^3(Z,L)|\mathcal{G}].$$

Démonstration. — Le principe est identique à celui de la démonstration précédente. On va tout d'abord démontrer que

$$\delta\left(\mathcal{E}[L|\mathcal{G}], Y\right) \le C\mathbb{E}\left[\delta^3\left(\mathcal{E}[L|\mathcal{G}], L\right)|\mathcal{G}\right].$$

Pour tout λ appartenant à S^*V, de projeté a sur V, on a l'inégalité

$$\lambda\left(\overrightarrow{aY}\right) + C'h_a(Y) \le \mathbb{E}\left[\lambda\left(\overrightarrow{aL}\right) + C'h_a(L)|\mathcal{G}\right].$$

Les applications $\lambda \mapsto \lambda\left(\overrightarrow{aY}\right) + C'h_a(Y)$ et $\lambda \mapsto \lambda\left(\overrightarrow{aL}\right) + C'h_a(L)$ sont uniformément lipschitziennes. L'inégalité ci-dessus est encore valable en remplaçant λ par un processus Λ étagé $\mathcal{G}$-mesurable, à valeurs dans S^*V, et en remplaçant a par le processus projeté de Λ. La propriété de Lipschitz permet, en passant à la limite sur les processus étagés, d'écrire l'inégalité avec tout processus Λ $\mathcal{G}$-mesurable, à valeurs dans S^*V, et en particulier avec les processus Λ de processus projeté sur V égal à $\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]$. L'inégalité s'écrit alors

$$\Lambda\left(\overrightarrow{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]Y}\right) + C'h_{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]}(Y) \leq \mathbb{E}\left[\Lambda\left(\overrightarrow{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]L}\right) + C'h_{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]}(L)|\mathcal{G}\right].$$

Le terme de droite du membre de gauche est positif, et le terme de gauche du membre de droite est nul puiqu'il est égal à $\Lambda\left(\mathbb{E}\left[\overrightarrow{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]L}|\mathcal{G}\right]\right)$, donc on obtient l'inégalité

$$\Lambda\left(\overrightarrow{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]Y}\right) \leq C'\mathbb{E}\left[h_{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]}(L)|\mathcal{G}\right].$$

La suite de cette partie de la démonstration est identique au cas déterministe. On minore à gauche le supremum sur Λ par $c_1\delta(\mathcal{E}[L|\mathcal{G}], Y)$, et on majore $h_{\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]}(L)$ par $C_\delta\delta^3(\mathcal{E}[L|\mathcal{G}], L)$.

Il reste à démontrer l'inégalité en remplaçant à droite $\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]$ par Z quelconque $\mathcal{G}$-mesurable. Une fois que l'on aura prouvé que

$$h_Z(\mathcal{E}[L|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[h_Z(L)|\mathcal{G}],$$

on pourra se ramener au cas déterministe. Cette dernière inégalité se prouve comme précédemment. Elle est vraie si on remplace Z par un processus étagé $\mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans V, puis pour tout processus $\mathcal{G}$-mesurable car h est lipschitzienne en tant que fonction de deux variables. □

2.4. Existence de barycentres convexes dans les variétés produits

Dans cette partie, nous allons démontrer que le projeté de l'ensemble des barycentres convexes d'une probabilité sur un espace produit est exactement l'ensemble des barycentres de la loi marginale. L'utilité de cette propriété apparaîtra dans la partie 3 au cours du calcul de la distance entre une martingale continue et une $\mathcal{C}$-martingale discrète.

La notation V' désignera un compact d'une variété W' munie d'une connexion ∇'. La variété $W \times W'$ sera munie de la connexion produit. Notons que si les compacts V et V' vérifient la condition (i), alors le compact $V \times V'$ vérifie aussi la condition (i).

PROPOSITION 2.16. — *On suppose que les ensembles V et V' vérifient la condition (i). Soit μ une probabilité sur $V \times V'$, de lois marginales μ^V et $\mu^{V'}$, et soit x un élément de $b(\mu^V)$. Alors il existe un élément y de $b(\mu^{V'})$, tel que (x, y) soit dans $b(\mu)$.*

Démonstration. — On écrit μ sous la forme $\mu^V(dv)Q(v,dv')$, et on considère le sous-ensemble $b(Q)$ de $V \times V'$ des barycentres convexes de Q, défini par

$$b(Q) = \left\{(v,v') \in V \times V', \forall f \in \mathcal{C}(V'), f(v') \leq \int_{V'} Q(v,du')f(u')\right\}.$$

Si $v \mapsto h(v)$ est une section borélienne de $b(Q)$, un élément y tel que (x,y) soit dans $b\left(\mu^V(dv)\delta_{h(v)}(dv')\right)$ répond à la question (δ_a désigne ici la masse de Dirac au point a). En effet, pour toute fonction f convexe sur un voisinage de $V \times V'$, on a $f(x,y) \leq \int_V \mu^V(dv)f(v,h(v))$ et $f(v,h(v)) \leq \int_{V'} Q(v,dv')f(v,v')$ donc $f(x,y) \leq \int_V \mu^V(dv)\int_{V'} Q(v,dv')f(v,v')$. Il suffit donc de démontrer la proposition avec μ de la forme $\mu^V(dv)\delta_{h(v)}(dv')$.

Dans un premier temps, nous supposerons que h est une application continue, et ensuite nous ferons la démonstration avec h quelconque. Nous utiliserons les notations de [E,M], que nous rappelons brièvement. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si p est une probabilité sur $W^n = \{0,1\}^n$ et si y est une variable aléatoire définie sur W^n et à valeurs dans V, le barycentre géodésique itéré de (y,p) est le point $\beta_n(y,p)$ de V défini de la façon suivante. Pour $\varepsilon \in \{0,1\}$, on note p_ε la probabilité sur W^{n-1} égale à la loi conditionnelle de $(\omega_2,\ldots,\omega_n)$ sachant que $\omega_1 = \varepsilon$. Les variables y_ε sur W^{n-1} sont définies par $y_\varepsilon(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}) = y(\varepsilon,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$.

Pour $n = 0$, $\beta_0(y,1)$ est la valeur de la variable aléatoire constante y.

Pour $n > 0$, $\beta_n(y,p)$ est le point $\gamma(p\{\omega_1 = 1\})$ de V, où $\gamma : [0,1] \mapsto V$ est la géodésique telle que $\gamma(0) = \beta_{n-1}(y_0,p_0)$ et $\gamma(1) = \beta_{n-1}(y_1,p_1)$.

Notons que dans [E,M], les barycentres géodésiques itérés sont des ensembles, alors qu'ici ce sont des points. La différence provient du fait que notre hypothèse (i) est plus forte que celle de [E,M], et qu'elle garantit que les ensembles définis dans [E,M] sont des singletons.

Cas où h est continu. D'après [E,M] théorème 1, il existe une suite $(y_k,p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec y_k une variable aléatoire définie sur un $W^{n(k)}$, à valeurs dans V, et p_k probabilité sur $W^{n(k)}$, telle que $\mu_k^V = y_k(p_k)$ converge étroitement vers μ^V et x soit le barycentre géodésique itéré de chaque (y_k,p_k). On définit pour chaque k la probabilité $\mu_k = \mu_k^V(dv)\delta_{h(v)}(dv')$. Elle est encore égale à $(y_k,h(y_k))(p_k)$. Le barycentre géodésique itéré de (y_k,p_k) est de la forme (x,z_k) avec z_k dans V', car les géodésiques de $V \times V'$ sont les produits des géodésiques de V et de V'. Par conséquent, (x,z_k) est un barycentre convexe de μ_k. La continuité de h implique que μ_k converge étroitement vers μ lorsque k tend vers l'infini. Cela implique qu'une valeur d'adhérence (x,y) de la suite $((x,z_k)_{k\in\mathbb{N}})$ soit un barycentre convexe de μ.

Cas où h est quelconque. Il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues telle que μ^V-presque sûrement, h_n converge vers h (c'est une conséquence du théorème de Lusin). On définit les probabilités μ_n sur $V \times V'$ par $\mu_n = \mu^V(dv)\delta_{h_n(v)}(dv')$. Il est facile de voir que les μ_n convergent étroitement vers μ. Pour chaque n, en utilisant le résultat du paragraphe précédent, on peut trouver $y_n \in V'$ tel que (x,y_n) soit un barycentre convexe de μ_n. Une valeur d'adhérence (x,y) de la suite $((x,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un barycentre convexe de μ. $\square$

DÉFINITION 2.17. — *On notera* $(iv'(V,\ V'))$ *la condition suivante : pour tout couple de variables aléatoires* (L, L') *à valeurs dans* $V \times V$, *pour toute sous-tribu* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}$, *pour tout élément* X *de* $\mathbb{E}[L|\mathcal{G}]$, *il existe un élément* X' *de* $\mathbb{E}[L'|\mathcal{G}]$ *tel que* (X, X') *appartienne à* $\mathbb{E}[(L, L')|\mathcal{G}]$

PROPOSITION 2.18. — *Si les compacts* V *et* V' *vérifient la condition* (i), *et s'il existe des lois conditionnelles sur* Ω *relativement à n'importe quelle sous-tribu de* $\mathcal{F}$, *alors la condition* $(iv'(V,\ V'))$ *de la définition 2.17 est réalisée.*

Démonstration. — D'après [A] lemme 2.5, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{C}(V)$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction f de $\mathcal{C}(V)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_V |f - f_n| < \varepsilon$.

Soit $Q(\omega, dvdv')$ la loi conditionnelle de (L, L') sachant $\mathcal{G}$. Alors $Q(\omega, dv) = \int_{V'} Q(\omega, dvdv')$ est la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{G}$. Puisque X est dans $\mathbb{E}[L|\mathcal{G}]$, pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(V)$, on a presque sûrement $f(X) \leq \int_V Q(\omega, dv) f(v)$. Comme il existe une suite de fonctions de $\mathcal{C}(V)$ dense pour la norme uniforme, on a l'inégalité presque sûre pour toute f : il existe Ω' de probabilité 1 tel que $\forall\, \omega \in \Omega'$, $f(X(\omega)) \leq \int_V Q(\omega, dv) f(v)$, ce qui veut dire que $X(\omega)$ est dans $b(Q(\omega, dv))$. On en déduit d'après la proposition 2.16 qu'il existe $y \in V'$ tel que $(X(\omega), y) \in b(Q(\omega, dvdv'))$. Notons $b' = \{(\omega, y) \in \Omega' \times V', (X(\omega), y) \in b(Q(\omega, dvdv'))\}$. Nous venons de démontrer que cet ensemble a des coupes en ω non vides. D'après [A] lemme 2.5, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}(V \times V')$ dense pour la topologie de la convergence uniforme. L'ensemble b' est aussi égal à

$$\left\{(\omega, y) \in \Omega' \times V', \forall n \in \mathbb{N},\ g_n(X(\omega), y) \leq \int_{V\times V'} Q(\omega, dvdv') g_n(v, v')\right\},$$

et est donc mesurable pour le produit de $\mathcal{G}$ et la tribu borélienne de V'. Une section $\mathcal{G}$-mesurable $\omega \mapsto X'(\omega)$ de b' répond à la question. □

3. Approximation des martingales continues par des $\mathcal{C}$-martingales discrètes

DÉFINITION 3.1. — *Soit* p *un réel supérieur ou égal à* 1. *On dira qu'une variété* W *a une géométrie* p*-convexe si elle a une géométrie convexe et s'il existe une fonction convexe* α *définie sur* $W \times W$, *de classe* C^∞ *sur* $(W \times W)\backslash\Delta$, *telle que pour une (donc pour toute) distance riemannienne* δ *sur* W, *il existe deux constantes* $c_{p,\delta}$ *et* $C_{p,\delta}$ *strictement positives, telles que pour tous* x, y *dans* V, *on ait*

$$c_{p,\delta}\delta^p(x,y) \leq \alpha(x,y) \leq C_{p,\delta}\delta^p(x,y).$$

On dira qu'un compact V *d'une variété* W *a une géométrie* p*-convexe s'il possède un voisinage ouvert qui a une géométrie* p*-convexe.*

Si W a une géométrie p-convexe et si $p' \geq p$, alors W a une géométrie p'-convexe (considérer $\alpha^{\frac{p'}{p}}$).

D'après [E 4.59], tout point d'une variété avec connexion possède un voisinage 2-convexe. Dans [K2], Kendall a démontré qu'une boule géodésique régulière a une géométrie $(2+\varepsilon)$-convexe pour tout $\varepsilon > 0$. Si la distance est convexe sur une variété riemannienne, alors tout compact a une géométrie 1-convexe. C'est le cas des compacts dans les variétés de Cartan-Hadamard.

La définition donnée ici est plus faible que celle de Picard. Une variété p-convexe au sens de [P2] est p-convexe selon notre définition. Je ne sais pas si la réciproque est vraie.

Rappelons la définition d'une $\mathcal{C}$-martingale discrète (voir [A]).

DÉFINITION 3.2. — *Soient X une semi-martingale cadlag à valeurs dans V et $\sigma = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = 1\}$ une subdivision de $[0,1]$. On dira que X est une σ-martingale discrète si pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$, on a $X_t = X_{t_i}$ et $X_{t_i} \in \mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}]$.*

On dira que X est une σ-martingale discrète exponentielle si c'est une σ-martingale discrète et pour tout i, $X_{t_i} = \mathcal{E}[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}]$.

On dira que X est une $\mathcal{C}$-martingale discrète (resp. discrète exponentielle) s'il existe une subdivision σ telle que X soit une σ-martingale discrète (resp. discrète exponentielle).

Énonçons le résultat principal de cette partie.

PROPOSITION 3.3. — *On suppose que V a une géométrie convexe, vérifie la propriété (i), et que les espérances conditionnelles exponentielles existent. Soit X une martingale continue de valeur terminale L dans V. Soit $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de $[0,1]$ dont le pas tend vers 0. Pour chaque m, notons X^m la σ_m-martingale discrète exponentielle de valeur terminale L, et Y^m une σ_m-martingale discrète quelconque de valeur terminale L. On suppose que l'une des deux conditions (a) et (b) suivantes est réalisée.*

(a)-Le compact V a une géométrie 1-convexe.

(b)-Le compact V a une géométrie p-convexe pour un $p > 1$, et pour une, donc pour toute métrique riemannienne, il existe une fonction croissante continue $a(t)$ tel que la variation quadratique riemannienne $\langle X|X \rangle$ de X vérifie $d\langle X|X \rangle \leq da(t)$.

Alors X^m converge uniformément en probabilité vers X lorsque m tend vers l'infini.

De plus, si la condition $(iv'(V,V))$ est réalisée, alors Y^m converge uniformément en probabilité vers X lorsque m tend vers l'infini.

Démonstration. — Au cours de la démonstration, si σ est une subdivision de $[0,1]$, la notation X^σ désignera une σ-martingale discrète quelconque de valeur terminale L si (iv'(V,V)) est réalisée, et la σ-martingale discrète exponentielle de valeur terminale L sinon.

Nous allons utiliser la construction de Picard dans [P2]. Soit $\sigma = (0 = t_0 < \ldots < t_k = 1)$ une subdivision de $[0,1]$. Comme dans la démonstration de [P2] théorème 6.3, pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, on considère le processus en temps discret X_j^{i}, $0 \leq j \leq k$ relativement aux filtrations $\mathcal{F}_{t_j}$, $0 \leq j \leq k$, défini de la façon suivante. On pose pour tout j, $X_j^k = X_{t_j}^\sigma$. Lorsque le processus X^{i+1} est défini, on pose $X_j^{i} = X_{t_i}$

pour $j \geq i$, et avec une récurrence descendante, on choisit pour $j < i$ une variable aléatoire X_j^i mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_j}$, telle que

$$(X_j^i, X_j^{i+1}) \in \mathbb{E}\left[(X_{j+1}^i, X_{j+1}^{i+1})|\mathcal{F}_{t_j}\right].$$

Notons que ce choix est possible d'après (iv'(V,V)), et si cette condition n'est pas réalisée, alors $X_j^{i+1} = \mathcal{E}\left[X_{j+1}^{i+1}|\mathcal{F}_{t_j}\right]$, et on choisit $X_j^i = \mathcal{E}[X_{j+1}^i|\mathcal{F}_{t_j}]$, ce qui nous donne aussi $(X_j^i, X_j^{i+1}) \in \mathbb{E}\left[(X_{j+1}^i, X_{j+1}^{i+1})|\mathcal{F}_{t_j}\right]$.

Ce choix a pour conséquence que pour tout $i < k$, le processus (X_j^i, X_j^{i+1}), $0 \leq j \leq i$ est une martingale discrète. On en déduit pour tout $j \leq i$, avec la fonction α de la définition 3.1, l'inégalité

$$\alpha((X_j^i, X_j^{i+1})) \leq \mathbb{E}\left[\alpha(X_i^i, X_i^{i+1})|\mathcal{F}_{t_j}\right],$$

et on remarque que $X_i^i (= X_{t_i})$ et X_i^{i+1} sont tous deux dans $\mathbb{E}\left[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}\right]$, ce qui conduit, d'après la proposition 2.15 à l'inégalité

$$\delta((X_i^i, X_i^{i+1})) \leq C\mathbb{E}\left[\delta^3(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_{t_i}\right].$$

De l'encadrement de α de la définition 3.1 et des inégalités précédentes, on déduit que

$$\delta^p((X_j^i, X_j^{i+1})) \leq \frac{C^p C_{p,\alpha}}{c_{p,\alpha}} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\delta^3(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_{t_i}\right]^p|\mathcal{F}_{t_j}\right].$$

Or

$$\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma)(= \delta(X_j^j, X_j^k)) \leq \sum_{i=j}^{k-1} \delta(X_j^i, X_j^{i+1}),$$

donc

$$\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma) \leq C\frac{C_{p,\alpha}^p}{c_{p,\alpha}^p} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\delta^3(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_{t_i}\right]^p|\mathcal{F}_{t_j}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Comme les fonctions $x \mapsto \delta^3(a,x)$ sont majorées par les fonctions $\frac{1}{c_\delta} h_a$ du lemme 2.13, en utilisant la formule d'Itô, on obtient la majoration

$$\mathbb{E}\left[\delta^3(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_{t_i}\right] \leq \frac{1}{2c_\delta}\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \operatorname{Hess} h_{X_{t_i}}(X_s)(dX_s, dX_s)|\mathcal{F}_{t_i}\right],$$

ce qui donne, pour une constante C', en utilisant le lemme 2.13,

$$\mathbb{E}\left[\delta^3(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_{t_i}\right] \leq C'\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(X_{t_i}, X_s)\langle dX_s|dX_s\rangle|\mathcal{F}_{t_i}\right].$$

La majoration de $\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma)$ devient

$$\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma) \leq CC'\frac{C_{p,\alpha}^p}{c_{p,\alpha}^p} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(X_{t_i}, X_s)\langle dX_s|dX_s\rangle|\mathcal{F}_{t_i}\right]^p|\mathcal{F}_{t_j}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Sous la condition (a), on peut choisir p égal à 1. On obtient

$$\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma) \leq CC' \frac{C_{p,\alpha}^p}{c_{p,\alpha}^p} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(X_{t_i}, X_s)\langle dX_s | dX_s\rangle | \mathcal{F}_{t_j}\right].$$

Définissons

$$\begin{aligned} M^\sigma =& CC' \frac{C_{p,\alpha}^p}{c_{p,\alpha}^p} \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(X_{t_i}, X_s)\langle dX_s | dX_s\rangle \\ =& CC' \frac{C_{p,\alpha}^p}{c_{p,\alpha}^p} \int_0^1 \sum_{i=0}^{k-1} 1_{\{s\in[t_i,t_{i+1}[\}} \delta(X_{t_i}, X_s)\langle dX_s | dX_s\rangle, \end{aligned}$$

et $M_i^\sigma = \mathbb{E}[M^\sigma | \mathcal{F}_{t_i}]$. Lorsque $|\sigma|$ tend vers zéro, par convergence dominée, la variable aléatoire M^σ converge vers zéro dans L^2, ce qui implique par l'inégalité de Doob que $\sup_i M_i^\sigma$ converge vers zéro dans L^2. Or $\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma) \leq M_j^\sigma$, donc $\sup_j \delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma)$ converge dans L^2 vers 0 lorsque $|\sigma|$ tend vers zéro. Pour t quelconque, on définit $\sigma(t)$ l'élément t_j de σ qui vérifie $t_j \leq t < t_{j+1}$. On a alors $\delta(X_t, X_t^\sigma) \leq \delta(X_{\sigma(t)}, X_{\sigma(t)}^\sigma) + \delta(X_{\sigma(t)}, X_t)$. Comme les trajectoires de X sont uniformément continues, $\delta(X_{\sigma(t)}, X_t)$ converge en probabilité vers zéro, uniformément en t. Ceci achève la démonstration sous la condition (a).

Si la condition (b) est réalisée, on a

$$\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma) \leq CC' \frac{C_{p,\alpha}^p}{c_{p,\alpha}^p} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(X_{t_i}, X_s)da(s) | \mathcal{F}_{t_i}\right]^p | \mathcal{F}_{t_j}\right]^{\frac{1}{p}},$$

ce qui donne par l'inégalité de Jensen, en posant $D_p = CC' \frac{C_{p,\alpha}^p}{c_{p,\alpha}^p}$,

$$\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma) \leq D_p \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E}\left[(a(t_{i+1}) - a(t_i))^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta^p(X_{t_i}, X_s)da(s) | \mathcal{F}_{t_j}\right]^{\frac{1}{p}},$$

ou encore

$$\delta(X_{t_j}, X_{t_j}^\sigma) \leq D_p \sum_{i=j}^{k-1} (a(t_{i+1}) - a(t_i))^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left[\delta^p(X_{t_i}, X_s) | \mathcal{F}_{t_j}\right] da(s)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quitte à changer les constantes, on peut supposer que $p \geq 3$, et on peut majorer $\mathbb{E}\left[\delta^p(X_{t_i}, X_s) | \mathcal{F}_{t_j}\right]$ par $C' \int_{t_i}^{s} \mathbb{E}\left[\delta^{p-2}(X_{t_i}, X_u) | \mathcal{F}_{t_j}\right] da(u)$, et en majorant l'espérance conditionnelle par une constante, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\delta^p(X_{t_i}, X_s) | \mathcal{F}_{t_j}\right] \leq C''(a(s) - a(t_i)),$$

et

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left[\delta^p(X_{t_i}, X_s)|\mathcal{F}_{t_j}\right] da(s) \leq \frac{C''}{2}(a(t_{i+1}) - a(t_i))^2.$$

Ceci donne, quitte à changer C'', une majoration de la forme

$$\delta(X_{t_j}, X^\sigma_{t_j}) \leq C'' \sum_{i=j}^{k-1} (a(t_{j+1}) - a(t_j))^{\frac{p+1}{p}},$$

qui implique

$$\sup_j \delta(X_{t_j}, X^\sigma_{t_j}) \leq C'' \sum_{i=0}^{k-1} (a(t_{j+1}) - a(t_j))^{\frac{p+1}{p}}.$$

Le terme de droite tend vers zéro lorsque $|\sigma|$ tend vers zéro. Pour passer à une majoration de $\sup_t \delta(X_t, X^\sigma_t)$, on procède comme sous la condition (a). $\square$

RÉFÉRENCES.

[**A**] Arnaudon (M.). — *Espérances conditionnelles et C-martingales dans les variétés*, Séminaire de Probabilités XXVIII, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1583, Springer, 1994.

[**E**] Emery (M.). — *Stochastic calculus in manifolds.* — Springer, 1989.

[**E,M**] Emery (M.), Mokobodzki (G.). — *Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété*, Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1485, Springer, 1991.

[**E,Z**] Emery (M.), Zheng (W.). — *Fonctions convexes et semi-martingales dans une variété*, Séminaire de Probabilités XVIII, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1059, Springer, 1984.

[**K1**] Kendall (W.S.). — *Probability, convexity and harmonic maps with small image I : uniqueness and fine existence*, Proc. London Math. Soc. (3), t. **61**, 1990, p. 371–406.

[**K2**] Kendall (W.S.). — *Convexity and the hemisphere*, J. London Math. Soc. (2), t. **43**, 1991, p. 567–576.

[**M**] Milnor (J.W.). — *Topology from the differentiable viewpoint.* — The University Press of Virginia, 1969.

[**P1**] Picard (J.). — *Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limit*, J. Functional Anal. 99, t. **2**, 1991, p. 223–261.

[**P2**] Picard (J). — *Barycentres et martingales sur une variété*, à paraître aux Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1994.