SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SONIA FOURATI

Une propriété de Markov pour les processus indexés par $\mathbb{R}$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 133-154

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1995__29__133_0>

Une propriété de Markov pour les processus indexés par $\mathbb{R}$

S.Fourati

I.N.S.A.*de Rouen - 76130 Mont Saint Aignan.*

L'étude des processus de Markov indexés par toute la droite réelle a été remise à l'ordre du jour à l'occasion de travaux sur la mesure de Kuznetsov (cf. Kuznetsov [K], Fitzsimmons-Maisonneuve [F-M],[F],[DMM]...).

Lorsqu'on travaille avec des processus de Markov indexés par $\mathbb{R}$, les opérations de la théorie générale des processus (meurtre, translation, retournement du temps) prennent une forme agréable mais la propriété de Markov forte n'est pas conservée par ces opérations (par exemple, le retourné $,X_{-t},$ d'un Markov fort n'est même pas en général modérément markovien). Ceci nous a amené à définir dans [F-L] une propriété de Markov générale, et le but de cet article est de montrer l'invariance de cette notion de processus markovien par les opérations de la théorie générale, et d'en donner des applications.

Voici l'origine de cette propriété :

Soient $\mathbb{E}$ un espace de Radon, $(\Omega,\mathcal{F}°)$ et X l'espace et le processus canoniques habituels associés. **P** une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F}°)$,$\mathcal{O}$ la tribu optionnelle associée à la filtration canonique $(\mathcal{F}_{t+})$, $\Pi^{\mathcal{O}}$ la projection optionnelle, et $\mathcal{G}$ la tribu sur $\mathbb{R} \times \Omega$ engendrée par les processus $\theta_s(X)$, $s > 0$ (c'est la tribu coprévisible d'Azéma [A]).

Sous **P**, si le processus X vérifie la propriété de Markov forte et admet un semi-groupe de transition borélien et droit (P_t) alors :

Pour tout processus, $\mathcal{G}$-mesurable, positif Z, il existe une fonction mesurable f telle que :

$$\Pi^{\mathcal{O}}(Z) = f(X).$$

On peut définir une projection $\Pi^{\mathcal{G}}$ sur la tribu $\mathcal{G}$. Cette propriété est alors équivalente, dans le cas d'un processus transient, à la propriété : pour tout processus optionnel positif Y, il existe une fonction mesurable g telle que

$$\Pi^{\mathcal{G}}(Y) = g(X).$$

En général, la tribu $\check{\mathcal{G}}$, obtenue à partir de $\mathcal{G}$ par retournement du temps, n'est pas la tribu optionnelle (ni la tribu prévisible!) du processus retourné $X_{-t},$

ce qui fait que la propriété de Markov n'est pas invariante par retournement du temps.
Afin de pallier cet inconvénient, et de restaurer la symétrie passé-futur implicite dans la notion de processus de Markov ("le passé et le futur sont conditionnellement indépendants sachant le présent"), nous avons introduit dans [F-L] deux classes de tribus sur $\mathbb{R} \times \Omega$ les "tribus du passé" et les "tribus du futur" , qui jouent le rôle respectivement de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{G}$, ces deux classes étant échangées par retournement du temps. Les tribus optionnelle et prévisible usuelles sont deux exemples de tribus du passé, la tribu coprévisible d'Azéma [A] est un exemple de tribu du futur.

Il existe sur de telles tribus des notions de projections qui généralisent les notions usuelles de projection (optionnelle, prévisible, etc.), qui ont été étudiées dans [F-L]. Si on se donne un couple $(\mathcal{H},\mathcal{G})$, formé d'une tribu du passé $\mathcal{H}$ et d'une tribu du futur $\mathcal{G}$, alors un processus sera dit $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-markovien s'il vérifie : pour tout processus $\mathcal{G}$-mesurable positif Z, il existe une fonction mesurable f telle que $\Pi^{\mathcal{H}}(Z) = f(X)$. La définition de ces notions est rappelée au premier paragraphe de l'article.

Il résulte du théorème de commutation des projections de [F-L] que le retourné d'un processus $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-markovien transient est un processus $(\check{\mathcal{G}},\check{\mathcal{H}})$-markovien.
De plus, en récupérant la symétrie passé-futur (au moins dans le cas transient), on récupère en même temps la stabilité de la propriété de Markov par translation par un temps aléatoire fini quelconque, ainsi que par des opérateurs d'oubli et de meurtre ; tout ceci fait l'objet du deuxième paragraphe.

C'est pour ces raisons que nous pensons que cette propriété de Markov est la bonne généralisation de la propriété de Markov forte des processus indexés par $\mathbb{R}_+$, qui en est un cas particulier, comme on le verra au paragraphe 3.
Un autre avantage de la définition proposée ici est que les résultats et démonstrations de la théorie usuelle s'y transposent mot à mot ce qui permet très facilement d'établir des résultats sur les mesures de Kuznetsov et les mesures de Palm associées. A titre d'exemple, on retrouve un résultat de Fitzsimmons [F] (qui généralisait lui-même un résultat de Dynkin et Getoor [D-G]), sur la représentation des mesures sur l'espace d'état d'un processus de Markov au moyen de fonctionnelles additives.
Le paragraphe 4 est consacré à cette représentation pour les processus markoviens de notre définition et dans le paragraphe 5 nous montrons

pourquoi les mesures de Kuznetsov et leurs mesures de Palm vérifient notre définition.

I - Les tribus homogènes et la $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-propriété de Markov.

1) *Les tribus du passé :*

On rappelle ici les principales définitions de [F-L].

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé ; si s est un réel et Z est une application de $\mathbb{R}\times\Omega$ dans un espace quelconque, on note $\theta_s(Z)$ l'application de $\mathbb{R}\times\Omega$ dans ce même espace définie par : $\theta_s(Z)_t(\omega) = Z_{t+s}(\omega)$.

Dorénavant, sauf mention explicite du contraire, le symbole Z désignera toujours une application mesurable de $\mathbb{R}\times\Omega$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définitions.

On appelle *tribu du passé* une sous-tribu $\mathcal{H}$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{F}$ engendrée par une famille de processus réels à trajectoires continues à droite, limitées à gauche (càdlàg en abrègé) et vérifiant la propriété suivante: si Z est $\mathcal{H}$-mesurable et s un réel négatif, alors $\theta_s(Z)$ est encore $\mathcal{H}$-mesurable.

Un *temps aléatoire* ou plus brièvement *un temps* est une application de Ω dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Un *temps d'arrêt* de $\mathcal{H}$ est un temps tel que l'intervalle stochastique $[\![T,+\infty[\![$ appartienne à $\mathcal{H}$.

Le *temps de naissance* de la tribu $\mathcal{H}$, noté η est la borne inférieure essentielle (relativement à la probabilité P) des temps d'arrêt de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

L'*intervalle de vie* que l'on notera ici $\{\eta,+\infty[\![$ (au lieu de $V(\mathcal{H})$ dans [F-L]) est l'intervalle stochastique $\{\eta,+\infty[\![\;=\;]\!]\eta,+\infty[\![\;\cup\; [\![\eta_a]\!]$ où η_a est la partie $\mathcal{H}$-accessible de η. [C'est-à-dire que η_a un temps d'arrêt de $\mathcal{H}$ tel que $\eta_a =$ η sur $\eta_a<\infty$ et pour tout temps d'arrêt T de $\mathcal{H}$, $P(\eta = T < +\infty \text{ et } \eta_a = +\infty) = 0$].

Pour tout temps aléatoire T la *tribu des événements antérieurs à T* est la tribu $\mathcal{H}_T$ sur Ω engendrée par les variables aléatoires Z_T où Z est un processus $\mathcal{H}$-mesurable, admettant des limites en $-\infty$ et $+\infty$, (et que l'on prolonge en $\pm\infty$ par ces limites).

2) *Projection sur une tribu du passé* :

Proposition 0 :

Soit $\mathcal{H}$ une tribu du passé; pour tout processus Z, il existe un processus $\mathcal{H}$-mesurable $\Pi^{\mathcal{H}}(Z)$, unique à l'indistinguabilité près, nul hors de $\{\eta,+\infty[\![$, tel que :

Pour tout temps d'arrêt T de $\mathcal{H}$, on l'égalité

$$E[Z_T|\mathcal{H}_T]\, 1_{T\in\mathbb{R}} = \Pi^{\mathcal{H}}(Z)_T\, 1_{T\in\mathbb{R}} \text{ p.s.}$$

Le processus $\Pi^{\mathcal{H}}(Z)$ est appelé la *projection de Z sur $\mathcal{H}$.*

3) *Les tribus du futur* :

Symétriquement à ce qui précède, on appelle *tribu du futur* une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \Omega$, engendrée par des processus càglàd et vérifiant la propriété suivante : si Z est $\mathcal{G}$-mesurable et s est un réel positif, alors $\theta_s(Z)$ est encore $\mathcal{G}$-mesurable.

On remarque que $\mathcal{G}$ est une tribu du futur si et seulement si la tribu des processus $(t,\omega)\to Z_{-t}(\omega)$ où Z est $\mathcal{G}$-mesurable, est une tribu du passé.

Pour une tribu du futur $\mathcal{G}$, on définit de manière symétrique les notions de *co-temps d'arrêt, temps de mort ξ, intervalle de vie $]\!]-\infty,\xi\}$, tribu $\mathcal{G}_T$ des événements postérieurs à* T, *projection $\Pi^{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{G}$.*

4) *La $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-propriété de Markov* :

Les définitions nous permettent d'introduire la notion suivante de processus markovien : considérons pour cela un espace de Radon $(\mathbb{E}_a^b,\mathcal{E}_a^b)$ dans lequel on a distingué deux points a et b tels que les singletons {a} et {b} appartiennent à $\mathcal{E}_a^b$.

Dans la suite, le symbôle f désigne une application mesurable de $\mathbb{E}_a^b$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on dira que f est $\mathcal{E}^b$-mesurable (resp. $\mathcal{E}_a$- ou $\mathcal{E}$-mesurable) si on impose que f(a)=0 (resp. f(b)=0 ou f(a)=f(b)=0).

Définition I.1 :

Soient $\mathcal{H}$ ($\mathcal{G}$) une tribu du passé (du futur) sur $\mathbb{R}\times\Omega$, X une application de $\mathbb{R}\times\Omega$ dans $\mathbb{E}_a^b$.

On dira que X est un processus $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-markovien si :

(a) X est $\mathcal{H}$-mesurable et $\mathcal{G}$-mesurable,

(b) $X_t(\omega) \neq a \Leftrightarrow (t,\omega) \in \{\eta,+\infty[\![$

(c) Tout processus $\mathcal{G}$-mesurable, Z admet pour projection sur $\mathcal{H}$ un processus de la forme f(X).

Commentaires :

a) La propriété (a) remplace les propriétés de régularité des trajectoires qu'on impose habituellement aux processus de Markov.

b) La propriété (b) impose, en particulier, qu'il existe une suite de temps d'arrêt de $\mathcal{H}$ ne prenant pas la valeur $-\infty$, qui décroit vers le temps de naissance α de X, $(\alpha=\inf\{t|X_t \neq a\})$. C'est une propriété de transience dans le passé, ou de "dissipativité".

c) La propriété de Markov ainsi énoncée est très générale :
On peut montrer que toutes les propriétés de Markov se trouvant dans la littérature (par exemple: Markov fort, modéré (Chung-Walsh [C-W] et Azéma [A]),processus canonique sous une mesure de Kuznetsov[1] ...) sont des propriétés de Markov relativement à un couple $(\mathcal{H},\mathcal{G})$ particulier.
Nous allons considérer plus loin (§III) en détails le cas de la propriété de Markov forte sur l'espace canonique et laisser au lecteur le soin de se convaincre dans les autres cas.

II - Translation, meurtre, retournement des processus de Markov.

1) *Translation :*

Soit T un temps à valeurs réelles finies. Pour tout Z on note $\theta_T(Z)$ le processus défini par $\theta_T(Z)_t(\omega) = Z_{t+T(\omega)}(\omega)$. $\mathcal{H}$ (resp $\mathcal{G}$) étant une tribu du passé (resp. du futur) *la translatée* $\theta_T(\mathcal{H})$ (resp. $\theta_T(\mathcal{G})$) est la tribu sur $\mathbb{R} \times \Omega$ engendrée par les processus $\theta_T(Z)$ où Z parcourt les processus $\mathcal{H}$-mesurables (resp. $\mathcal{G}$-mesurables).

Il est clair que $\theta_T(\mathcal{H})$ (resp. $\theta_T(\mathcal{G})$) reste une tribu du passé (resp.du futur);

[1] Il faut pour étudier cette mesure, étendre la définition au cas des mesures σ-finies, ce que nous ferons au paragraphe IV.

que le temps de naissance de $\theta_T(\mathcal{H})$ est η-T et que la projection sur $\theta_T(\mathcal{H})$ d'un processus Z s'obtient de la manière suivante :

$$\Pi^{\theta_T(\mathcal{H})}(Z)_t(\omega) = \Pi^{\mathcal{H}}(\theta_{-T}(Z))_{t+T}(\omega).$$

La proposition suivante est alors immédiate :

Proposition II.1 :

Si T un temps aléatoire fini alors :

X est $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-markovien $\Leftrightarrow$ $\theta_T(X)$ est $(\theta_T(\mathcal{H}),\theta_T(\mathcal{G}))$-markovien.

2) Oubli :

T étant un temps non nécessairement fini, on définit le processus $a_T(X)$ et la tribu $a_T(\mathcal{H})$ de la manière suivante :

$$a_T(X)_t(\omega) = X_t(\omega) \text{ si } t \geq T(\omega)$$

$$= a \text{ sinon.}$$

$a_T(\mathcal{H})$ est la tribu engendrée par les processus de la forme $Z\, 1_{[\![T,+\infty[\![}$ où Z parcourt $\mathcal{H}$.

Lemme : Si T est un temps d'arrêt de $\mathcal{H}$, alors $a_T(\mathcal{H})$ est une tribu du passé.

Démonstration : Il suffit pour cela d'exhiber une famille génératrice de $a_T(\mathcal{H})$ composée de processus càdlàg et stable par les opérateurs θ_s, $s < 0$.

Il suffit de prendre :

$$\mathcal{A} = \{Z\, 1_{[\![T,+\infty[\![}\ Z \text{ càdlàg et } Z \in \mathcal{H}\}$$

$\mathcal{A}$ engendre $a_T(\mathcal{H})$ par définition. T étant un temps d'arrêt de $\mathcal{H}$, l'ensemble $[\![T,+\infty[\![$ est dans $\mathcal{H}$; d'où l'équivalence :

$$Z \in \mathcal{A} \Leftrightarrow Z \text{ càdlàg, } Z \in \mathcal{H} \text{ et } Z = Z1_{[\![T,+\infty[\![}.$$

Il est clair que $\mathcal{A}$ est stable par les opérateurs θ_s, $s < 0$.

La proposition et les faits suivants sont alors immédiats :

Le temps de naissance de $a_T(\mathcal{H})$ est $T\vee\alpha$ et la projection sur $a_T(\mathcal{H})$ d'un processus Z, notée $\Pi^{a_T(\mathcal{H})}(Z)$, est donnée par:

$$\Pi^{a_T(\mathcal{H})}(Z) = \Pi^{\mathcal{H}}(Z)1_{[\![T,+\infty[\![}$$

On note $a_T(\mathcal{G})$ la tribu du futur engendrée par les processus de la forme $Z1_{]\!]T-t,+\infty[\![}$ où Z parcourt $\mathcal{G}$ et t parcourt $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition II.2 : Si T un temps d'arrêt de $\mathcal{H}$ et X un processus $(\mathcal{H},\mathcal{G})$ markovien, alors :

$$a_T(X) \text{ est } (a_T(\mathcal{H}),a_T(\mathcal{G}))\text{-markovien.}$$

Remarque : On peut remplacer l'hypothèse "T est un temps d'arrêt de $\mathcal{H}$" par "T est un temps aléatoire tel que l'intervalle stochastique $]\!]T,+\infty[\![$ est dans $\mathcal{H}$". Il faut remplacer l'intervalle stochastique $[\![T,+\infty[\![$ par $]\!]T,+\infty[\![$, le processus $a_T(X)$, les tribus $a_T(\mathcal{H})$ et $a_T(\mathcal{G})$ sont modifiées en conséquence et la proposition II.2 modifiée reste vraie.

3) Meurtre à un temps terminal :

Soit T un temps ; on définit le processus $b_T(X)$ et la tribu $b_T(\mathcal{G})$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} b_T(X)_t(\omega) &= X_t(\omega) \text{ si } t<T(\omega) \\ &= b \text{ sinon.} \end{aligned}$$

$b_T(\mathcal{G})$ est la tribu engendrée par les processus de la forme $Z\ 1_{]\!]-\infty,T[\![}$, où Z parcourt $\mathcal{G}$.

On note $\mathcal{G}^-$ la tribu $\mathcal{G}^- = \bigcap_{t<0} \theta_t(\mathcal{G})$ (c'est la tribu co-progressive de [F-L]).

Lemme : Si T est le temps d'entrée dans un ensemble $\mathcal{G}^-$-mesurable, alors la tribu $b_T(\mathcal{G})$ est une tribu du futur.

Démonstration : Montrons d'abord : $1_{]\!]-\infty,T-s[\![} \in b_T(\mathcal{G})$; ce qui équivaut à :

(*) $$\forall s > 0,\ \exists Z \in \mathcal{G} \text{ tel que } 1_{]\!]-\infty,T-s[\![} = Z\ 1_{]\!]-\infty,T[\![}\ .$$

Soit $T(\omega) = D_A(\omega) = \inf\{t;(t,\omega) \in A\}$ (avec $A \in \mathcal{G}^-$).

On pose : $B = \bigcup_{n>0} \bigcap_{0<u<s+1/n} \theta_u({}^cA)$; on a l'égalité $1_{]\!]-\infty,T-s[\![} = 1_{]\!]-\infty,T[\![}\, 1_B$.

A partir de là on continue comme dans la démonstration du théorème I.6 de [F-L], pour établir successivement que :

· B est $\mathcal{G}$-analytique.

· Il existe un ensemble $\mathcal{G}$-mesurable tel que : $\{1_B \neq 1_C\}$ est $\lambda \otimes P$-négligeable ;

· Si on pose $Z_t(\omega) = \lim\limits_{s\to t} \inf\limits_{s>t} \text{ess}\ 1_C(s,\omega)$; Z est $\mathcal{G}$-mesurable et : $Z1_{]\!]-\infty,T[\![}$ est indistinguable de $1_{]\!]-\infty,T-s[\![}$; et on a la propriété (*).

Ensuite, par un passage à la limite, on montre que $\forall s > 0$, $1_{]\!]-\infty,T-s]\!]} \in b_T(\mathcal{G})$.

On définit alors la famille de processus $\mathcal{B}$ par :

$$\mathcal{B} = \{Z\ 1_{]\!]-\infty,T-s]\!]}\ ;\ Z\ \ \mathcal{G}\text{-mesurable et càglàd, } s > 0\}\ ;$$

$\mathcal{B}$ est formée de processus càglàd, elle est stable par les opérateurs $\theta_s, s > 0$ et d'après ce qui précéde, elle est incluse dans $b_T(\mathcal{G})$. Il est alors clair qu'elle engendre $b_T(\mathcal{G})$; $b_T(\mathcal{G})$ est donc une tribu du futur.

La proposition suivante est alors immédiate :

Proposition II.3 : Si T est un temps d'arrêt de $\mathcal{H}$ strictement supérieur à η, et un temps d'entrée dans un ensemble $\mathcal{G}^-$-mesurable, alors :

$$X \text{ est } (\mathcal{H},\mathcal{G})\text{-markovien} \Rightarrow b_T(X) \text{ est } (\mathcal{H},b_T(\mathcal{G}))\text{-markovien.}$$

Sur l'espace canonique décrit plus bas, les temps de cette proposition sont ceux égaux p.s. aux temps terminaux habituels.

4) Retournement :

On introduit la propriété $(\hat{b})$ symétrique de (b) : (cf. définition de (b) au paragraphe I.4).

$$(\hat{b})\ X_t(\omega) \neq b \Leftrightarrow (t,\omega) \in]\!]-\infty,\xi\}.$$

Si Z est un processus défini sur $\mathbb{R}\times\Omega$ à valeurs dans un espace quelconque, on note $\check{Z}$ le processus défini sur $\mathbb{R}\times\Omega$ à valeurs dans ce même espace défini par : $\check{Z}_t(\omega) = Z_{-t}(\omega)$.

Soit $\check{\mathcal{H}}$, (resp.$\check{\mathcal{G}}$) la tribu du futur (resp. du passé) engendrée par les processus $\check{Z}$ où Z est $\mathcal{H}$-mesurable (resp. $\mathcal{G}$-mesurable).

Théorème II.4 : On suppose que X vérifie les propriétés (b) et ($\hat{b}$), alors : X est un processus $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-markovien $\Leftrightarrow$ $\check{X}$ est un processus $(\check{\mathcal{G}},\check{\mathcal{H}})$-markovien.

Démonstration : Quitte à retourner les processus et les tribus, il suffit de vérifier que si X est $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-markovien, alors, pour tout Z $\mathcal{H}$-mesurable, $\Pi^{\mathcal{G}}(Z)$ est de la forme f(X).

Or, la $(\mathcal{H},\mathcal{G})$ propriété de Markov de X implique que, pour tout Z $\mathcal{G}$-mesurable, $\Pi^{\mathcal{H}}(Z)$ est de la forme f(X) et par conséquent est $\mathcal{G}$-mesurable. On en déduit que la tribu $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ est indistinguable de $\sigma(X)$.

D'autre part, l'intervalle $\{\eta,\xi\}$ = $\{X \in \mathbb{E}\}$ est $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$-mesurable, par conséquent on peut appliquer le théorème de commutation des projections (th. 2.2 de [F-L]) les projections $\Pi^{\mathcal{H}}$ et $\Pi^{\mathcal{G}}$ commutent donc, en particulier: Pour tout Z $\mathcal{H}$-mesurable, $\Pi^{\mathcal{G}}(Z)$ est $\mathcal{H}$-mesurable, donc $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$-mesurable et donc il existe une fonction mesurable f telle que $\Pi^{\mathcal{G}}(Z) = f(X)$.

Remarque : Pour les processus de Markov indéxés par $\mathbb{R}_+$ (identifiés ici aux processus valant "a" pour les temps négatifs),les opérations habituelles de translation par un temps d'arrêt, de meurtre à un temps de retour, de retournement à un temps de retour sont des compositions de translations, oublis et retournements au sens précédent.

III - Relation avec la propriété de Markov forte et les quasi-processus de Weil.

Soit (P_t) un semi-groupe sous-markovien droit sur $\mathbb{E}$, que l'on prolonge en un semi-groupe markovien au moyen du point cimetière b. Nous supposerons dans la suite que (P_t) est borélien, ce que l'on peut toujours faire quitte à utiliser la topologie de Ray (cf Sharpe [S]).

Nous dirons qu'un processus $(\mathcal{H},\mathcal{G})$-markovien admet (P_t) comme *semi-groupe de transition* si $\forall s \geq 0$, $\forall f$ $\mathcal{E}^b$-mesurable , $P_s f(X.) 1_{\{X \in \mathbb{E}^b\}}$ est une version de la projection sur $\mathcal{H}$ du processus $\mathcal{G}$-mesurable $(t,\omega)\to f(X_{s+t}(\omega))$.

On définit l'espace Ω des trajectoires de la manière suivante : un élément de Ω est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}_a^b$ qui vérifie les propriétés suivantes :

· si $\omega^{-1}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ alors $\omega^{-1}(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ bornée ou non de la forme $[\alpha(\omega),\beta(\omega)[$ ou $]\alpha(\omega),\beta(\omega)[$, ω est continue à droite en tout point de cet intervalle, ω vaut a à gauche de $\alpha(\omega)$ et vaut b à droite de $\beta(\omega)$.

· si $\omega^{-1}(\mathbb{R}) = \emptyset$ alors ω est soit la fonction constante égale à a, soit la fonction constante égale à b. On pose dans le premier cas $\alpha(\omega) = \beta(\omega) = +\infty$ et dans le second $\alpha(\omega) = \beta(\omega) = -\infty$.

On désigne par X_t les applications coordonnées sur Ω : $X_t(\omega)=\omega(t)$, et par θ_s les opérateurs de translation sur Ω définis par : $X_t(\theta_s(\omega)) = X_{t+s}(\omega)$, $s,t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a: $\theta_s(X)_t(\omega) = X_t(\theta_s(\omega)) = X_{t+s}(\omega)$ (voir la notation $\theta_s(X)$ dans le §I).

On désigne par $\mathcal{F}^\circ_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(X_s, -\infty<s<t+\varepsilon)$ la filtration naturelle de X continue à droite, $\mathcal{F}^\circ = \mathcal{F}^\circ_{+\infty}$,et par $\hat{\mathcal{F}}^\circ_0 = \sigma(X_s,\ s\geq 0)$.

On considère une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{F}^\circ)$. La notation des complétées des tribus précédentes par rapport à la probabilité $\mathbf{P}$ sera obtenue en supprimant les signes "°".

On définit la tribu $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}\times\Omega$, engendrée par les processus càd indistinguables d'un processus de la forme $(\mathfrak{z}\circ\theta_t(\omega))$ (noté $\mathfrak{z}\circ\theta.$ dans la suite) où $\mathfrak{z}$ est une variable $\hat{\mathcal{F}}^\circ_0$-mesurable. $\mathcal{G}$ est une tribu du futur (cf [F-L]).

Nous allons considérer deux tribus du passé : la *tribu du passé* $\mathcal{L}$, engendrée par les processus càdlàg <u>nuls hors de $\{X\in\mathbb{E}^b\}$</u> indistinguables d'un processus de la forme $(\mathfrak{z}\circ\theta.)$ avec $\mathfrak{z}$ $\mathcal{F}^\circ_{0+}$-mesurable.

On vérifie facilement qu'un temps aléatoire est un temps d'arrêt de $\mathcal{L}$ ssi son graphe est inclus dans $\{X\in\mathbb{E}^b\}$ et qu'il est p.s. égal à un temps intrinsèque T au sens de Weil [W][2]

[2] Notant $\mathcal{F}^*_{t+}$ la complétée universelle de $\mathcal{F}^\circ_{t+}$. T est un temps intrinsèque au sens de Weil si $\forall t, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}^*_t$ et $T\circ\theta_t = T-t$.

Pour ces temps, la trace sur $\{T\in\mathbb{R}\}$ de la tribu $\mathcal{L}_T$, est celle de :

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(X_{T+s} \; ; \; -\infty<s<\varepsilon).$$

La *tribu optionnelle* $\mathcal{O}$, engendrée par les processus càdlàg nuls hors de $\{X\in\mathbb{E}^b\}$ et adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}}$.

Les temps d'arrêt de $\mathcal{O}$ sont les temps d'arrêt T de la filtration $(\mathcal{F}_{t+})$ [i.e. $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_{t+}$, $\forall t \in \mathbb{R}$] dont le graphe est inclus dans $\{X\in\mathbb{E}^b\}$. Pour ces temps la trace sur $\{T\in\mathbb{R}\}$ de la tribu $\mathcal{O}_T$, est celle de la tribu habituelle $\mathcal{F}_{T+}$ $(A \in \mathcal{F}_{T+} \Leftrightarrow A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_{t+}$, $\forall t \in \mathbb{R})$.

On a donc :

Proposition III.1 : Le processus X est $(\mathcal{O},\mathcal{G})$-markovien de semi-groupe de transition (P_t) si et seulement si : $\forall s \ge 0$, $\forall f$, $\forall T$ temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_{t+})$

$$E[f(X_{s+T})|\ \mathcal{F}_{T+}]\ 1_{\{X_T\in\mathbb{E}^b,T\in\mathbb{R}\}} = P_s f(X_T)\ 1_{\{X_T\in\mathbb{E}^b,T\in\mathbb{R}\}} \; ;$$

ce qui est exactement *la propriété de Markov forte* usuelle, et on l'appellera ainsi par la suite.

Nous allons maintenant comparer la propriété de Markov forte à la $(\mathcal{L},\mathcal{G})$-propriété de Markov. Remarquons tout d'abord qu'en employant la technique utilisée dans [F-L] on peut généraliser le résultat classique de théorie générale des processus [DM p.198] "Tout processus Z càd adapté à $(\mathcal{F}_{t+})$ est optionnel", en "si X vérifie (b) alors X est $\mathcal{L}$-mesurable".

Proposition III.2 : Si X est un processus fortement markovien, et X vérifie l'hypothèse (b), alors X est $(\mathcal{L},\mathcal{G})$-markovien.

Démonstration : Cela découle immédiatement de la remarque ci-dessus et du fait que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}$.

La proposition suivante montre que dans le cadre des processus de Markov indexés par $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}_+^*$), les deux propriétés de Markov coïncident.

Proposition III.3 : Lorsque $\alpha = 0$ p.s., X est fortement markovien si et seulement si il est $(\mathcal{L},\mathcal{G})$-markovien.

Cette proposition découle du lemme général suivant:

Lemme : Lorsque α=0 p.s. les tribus $\mathcal{O}$ et $\mathcal{L}$ sont égales.

Démonstration : On a d'abord $\forall t_0 \geq 0$, $\forall f$, $f(X_{t_0})\, 1_{]\!]t_0,+\infty[\![}$ est indistinguable de $f(X_{\alpha+t_0}) 1_{]\!]\alpha+t_0,+\infty[\![} = \mathfrak{z}\circ\theta.$ où $\mathfrak{z}$ est la variable $f(X_{\alpha+t_0}) 1_{\alpha+t_0<0} \in \mathcal{F}^\circ_{0-}$.

La famille de processus $\{f(X_{t_0})\, 1_{]\!]t_0,+\infty[\![}$, f mesurable, $t_0 \in \mathbb{R}\}$ engendre la tribu prévisible habituelle associée à la filtration $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}}$, donc, par un argument de classe monotone, on voit que si Z est prévisible, il existe une variable $\mathfrak{z}$ $\mathcal{F}^\circ_{0-}$-mesurable telle que $Z\, 1_{]\!]0,+\infty[\![}$ et $\mathfrak{z}\circ\theta.$ soient indistinguables.

Soit maintenant Y un processus càdlàg $\mathcal{O}$-mesurable et nul hors de $\{X\in\mathbb{E}^b\}$, Y^- est prévisible, il existe donc une variable $\mathfrak{z}$ $\mathcal{F}^\circ_{0-}$-mesurable telle que:

$Y^-\, 1_{]\!]0,+\infty[\![}$ et $\mathfrak{z}\circ\theta.$ soient indistinguables.

En posant : $\mathfrak{z}^{(+)} = \liminf \mathfrak{z}\circ\theta_{1/n}$ on a : $\mathfrak{z}^{(+)} \in \mathcal{F}^\circ_{0+}$ et, Y et $\mathfrak{z}^{(+)}\circ\theta.$ sont indistinguables sur $\{X \in \mathbb{E}^b\}$ et donc : $Y \in \mathcal{L}$.

D'où : $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{L}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{L}$.

Nous montrons maintenant que dans le cas général, la notion de processus $(\mathcal{L},\mathcal{G})$-markovien correspond à celle de quasi-processus au sens de Weil [W].

Théorème III.4 : Lorsque $\mathcal{L}$ vérifie l'hypothèse (b), les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) X est $(\mathcal{L},\mathcal{G})$-markovien de semi-groupe de transition (P_t).

(ii) X est un quasi-processus markovien au sens de Weil [W][3], de semi-groupe de transition (P_t), et :

$\forall f$ $\mathcal{E}^b$-mesurable, $\forall s \geq 0$, $E[f(X_{\alpha+s}) \mid \mathcal{L}_\alpha]\, 1_{\{-\infty<\alpha<+\infty, X_\alpha\in\mathbb{E}\}} = P_s f(X_\alpha)\, 1_{\{-\infty<\alpha<+\infty, X_\alpha\in\mathbb{E}\}}$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) La propriété de Markov en α est vraie par définition. Ensuite, pour tout $n > 0$ et tout temps intrinsèque T, T+1/n est un temps intrinsèque dont le graphe est inclus dans $]\!]\alpha,+\infty[\![$ donc dans $\{X \in \mathbb{E}^b\}$: T+1/n

[2] Rappelons que cette dernière propriété signifie que pour tout temps intrinsèque T, le processus $(X_{T+t})_{t>0}$, défini sur $\Omega' = \{T\in\mathbb{R}\}$, est fortement markovien de semi-groupe de transition (P_t).

est un temps d'arrêt de $\mathcal{L}$ d'où $]\!]T,+\infty[\![= \cup\, [\![T+1/n,+\infty[\![\in \mathcal{L}$.

Le processus $X^{(T)}$ défini sur Ω par

$$X_t^{(T)}(\omega) = X_{t+T}(\omega) \text{ si } t>0 \text{ et } T(\omega) \in \mathbb{R}$$

$$= a \text{ sinon,}$$

s'obtient à partir de X par la composition d'une translation et d'un oubli, $X^{(T)}$ est donc $(\mathcal{L}^{(T)},\mathcal{G}^{(T)})$-markovien pour un couple de tribus $(\mathcal{L}^{(T)},\mathcal{G}^{(T)})$. Il est alors facile de vérifier que la réalisation canonique de $X^{(T)}$ est $(\mathcal{L},\mathcal{G})$ markovienne.

Ce processus ayant son temps de naissance en 0 (ou en $+\infty$ mais cela ne change rien!), la proposition précédente nous dit qu'il est fortement markovien; d'autre part, la translation et l'oubli ne modifiant pas le semi-groupe de transition, (P_t) reste celui de $X^{(T)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Il suffit de vérifier que pour toute fonction continue positive f de $\mathcal{E}^b$ et pour tout s positif, $\Pi^{\mathcal{L}}(f(X_{s+.}))$ est indistinguable de $P_s f(X.)$ sur $\{X\in E^b\}$. Cette propriété est vraie en α par hypothèse. Ensuite on prend une suite de temps intrinsèques à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ décroissant vers α, (T_n) (l'existence d'une telle suite est assurée par la propriété (b)).

D'après la propriété de Markov forte de $(X_{t+T_n})_{t>0}$, $P_s f(X_{.+T_n})$ est càd sur $]\!]0,+\infty[\![$, autrement dit, $P_s f(X.)$ est càd sur $]\!]T_n,+\infty[\![$ et par recollement sur $]\!]\alpha,+\infty[\![$.

D'autre part, $\Pi^{\mathcal{L}}(f(X_{s+.}))$ est càd sur $]\!]\alpha,+\infty[\![$ en tant que projection sur $\mathcal{L}$ d'un processus càd (cf [F-L]). Ces deux processus sont indistinguables sur $]\!]\alpha,+\infty[\![$ si et seulement si

Pour tout Z $\mathcal{L}$-mesurable :

$$E\left[\int_\alpha^{+\infty} Z_t\ \pi^{\mathcal{L}}(f(X_{.+s}))_t dt\right] = E\left[\int_\alpha^{+\infty} Z_t\ P_s f(X_t) dt\right].$$

Le membre de gauche de l'égalité vaut :

$E\left[\int_\alpha^{+\infty} Z_t\ f(X_{s+t}) dt\right]$ (voir [F-L] pour cette propriété des projections sur une tribu du passé).

Il reste donc à vérifier l'égalité suivante pour tout Z $\mathcal{L}$-mesurable

$$(*)\qquad E\left[\int_{\alpha}^{+\infty} Z_t\, P_s f(X_t) dt\right] = E\left[\int_{\alpha}^{+\infty} Z_t\, f(X_{s+t}) dt\right]$$

Les processus X^n définis par :

$$X_t^n(\omega) = X_t(\omega) \text{ si } t>T_n(\omega)$$

$$= a \text{ sinon,}$$

s'obtiennent à partir de $(X_{t+T_n})_{t>0}$ par une translation . X^n est donc markovien relativement à un couple de tribus $(\mathcal{H}^n,\mathcal{G}^n)$.

D'après la propriété de projection sur $\mathcal{H}^n$, on a l'égalité pour tout Z $\mathcal{H}^n$-mesurable

$$E\left[\int_{T_n}^{+\infty} Z_t\, f(X_{s+t}) dt\right] = E\left[\int_{T_n}^{+\infty} Z_t\, \pi^{\mathcal{H}^n}(f(X_{.+s}))_t dt\right],$$

$$= E\left[\int_{T_n}^{+\infty} Z_t\, P_s f(X_t) dt\right] \text{ d'après la propriété de Markov de } X^n.$$

On a donc l'égalité (*) pour de tels Z.

Prenons maintenant Z de la forme:

$Z = \prod_{i=1}^{m} f_i(X_{.-s_i})$ (les s_i étant positifs). posons $Z^n = \prod_{i=1}^{m} f_i(X^n_{.-s_i})$;

Z^n est $\mathcal{H}^n$-mesurable et: $\forall\omega,\forall t \notin \{\alpha(\omega)+s_i;1<i<n\}$:$Z_t(\omega)=\lim Z_t^n(\omega)$; en particulier : $Z_t(\omega) = \lim Z_t^n(\omega)$ sauf pour un ensemble de (t,ω) $\lambda \otimes P$-négligeable.

Et donc par passage à la limite, on obtient l'égalité (*) pour de tels Z. Par un argument de classe monotone, on étend ce résultat aux Z de la forme $\mathfrak{z}\circ\theta.$, avec $\mathfrak{z} \in \mathcal{F}^\circ_{0-}$, puis aux Z càdlàg tels que Z_- soit de la forme précédente, (car $\{Z\neq Z_-\}$ est $\lambda\times P$ négligeable) ce qui est le cas pour tout Z càdlàg $\mathcal{L}$-mesurable.

Un nouvel argument de classe monotone donne l'égalité (*) pour tout $Z \in \mathcal{L}$.

IV - Représentation des mesures sur l'espace d'états par les fonctionnelles additives.

Définitions : On appelle *ensemble* P-*polaire* un borélien A de $\mathbb{E}$ tel que l'ensemble $\{\omega \in \Omega ; \exists t, X_t(\omega) \in A\}$ est P-négligeable.

On appelle *fonctionnelle additive droite* un noyau $A(\omega,ds)$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall\omega \in \Omega,\ A(\omega, \{t,\ X_t(\omega) \notin \mathbb{E}\}) = 0$

(ii) $\forall\omega \in \Omega\ \forall a,b,t \in \mathbb{R}\ ,\ a \le b,$

$$A(\theta_t(\omega),\ [a,b[) = A(\omega,[a+t,b+t[) \text{ et :}$$

(iii) l'application : $\omega \to A(\omega,[a,b[)$ est mesurable pour la tribu $\sigma(X_s,\ a \le s < b)^*$ (complétée universelle de $\sigma(X_s,\ a \le s < b)$).

On se donne dans tout ce paragraphe une probabilité **P** sur $(\Omega,\mathcal{F}^\circ)$ sous laquelle les propriétés (b),$(\hat{b})$ et la $(\mathcal{L},\mathcal{G})$-propriété de Markov de X sont vérifiées.

Théorème IV.1 : Si μ est une mesure sur $\mathbb{E}$ finie ne chargeant pas les ensembles P-polaires alors il existe une fonctionnelle additive droite unique à une l'indistinguabilité près, telle que :

Pour toute fonction f $\mathcal{E}$-mesurable, on a: $\mu(f) = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(X_s)A(\omega,ds)\right]$.

Avant de passer à la démonstration on rappelle (cf [F-L]) qu'une mesure aléatoire intégrable de $\mathcal{L}$ (resp. de $\mathcal{G}$) est une famille de mesures sur $\mathbb{R}$ $(A(\omega,ds))_{\omega\in\Omega}$ telle que le processus $A(\omega,]-\infty,t])$ est $\mathcal{L}$-mesurable (resp. $A(\omega,[t,+\infty[)$ est $\mathcal{G}$-mesurable) et tel que $E[A(\omega,\mathbb{R})]<+\infty$.
On démontrera en appendice le lemme :

Lemme : Une mesure aléatoire intégrable de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$ est indistinguable d'une fonctionnelle additive droite.

Démonstration du théorème IV.1 :
Après avoir remplacé la tribu optionnelle par la tribu $\mathcal{L}$, on copie mot à mot la démonstration d'Azéma [A page 491], nous nous contentons ici de rappeler son idée essentielle:
On pose pour tout processus Z : $L(Z) = \mu(f)$ où f est choisie telle que f(X.) soit une version de $\Pi^{\mathcal{L}}\Pi^{\mathcal{G}}(Z)$, alors :

Il existe une mesure aléatoire intégrable unique $A(\omega,ds)$ telle que:

$$\forall Z \quad L(Z) = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} Z_s A(\omega,ds)\right].$$

Et A est à la fois une mesure aléatoire intégrable de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$.
A partir de là on applique le lemme pour conclure.

Remarque : D'après la proposition III.3 ce résultat contient le résultat analogue pour les processus de Markov indexés par $\mathbb{R}_+$; en fait nous allons voir que c'est une forme équivalente du résultat de Dynkin et Getoor [D-G] complété par Fitzsimmons [F] faisant intervenir les mesures de Kuznetsov.

V - Complément : extension du travail précédent aux mesures de Palm associées aux mesures dissipatives.

1) Extension à certaines mesures σ-finies :

Sur un espace mesurable quelconque $(\Omega,\mathcal{F})$, $\mathcal{H}$ étant une tribu du passé on peut encore projeter sur $\mathcal{H}$, relativement à une mesure **Q** à condition que **Q** vérifie la propriété :

(c) pour tout temps d'arrêt T de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, la trace de **Q** sur $(\{\eta<+\infty\},\mathcal{H}_T)$ est σ-finie.

Et cette propriété est équivalente à la propriété suivante :

(c') Il existe une suite décroissante T_n de temps d'arrêt de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ telle que : $\bigcup_n \,]T_n\,;+\infty[\!\![\;=\; \{\eta,+\infty[\!\![$ et pour tout n, la trace de **Q** sur $(\{\eta<+\infty\},\ \mathcal{H}_{T_n})$ est σ-finie.

Lorsque (c) est vérifiée, on peut étendre naturellement la notion d'espérance conditionnelle sur $\mathcal{H}_T\cap\{\eta<+\infty\}$, et à fortiori sur $\mathcal{H}_T\cap\{T\in\mathbb{R}\}$ (car $\{T\in\mathbb{R}\}\subseteq\{\eta<+\infty\}$).
En procédant par recollement à l'aide d'une suite de temps d'arrêt (T_n) choisie comme dans la propriété (c') on établit que si $\mathcal{H}$ vérifie (c) la proposition de projection 0 reste vraie.
On procède de même pour étendre tout ce qui a été fait dans [F-L] sous l'hypothèse que $\mathcal{H}$ vérifie (c) ; pour la commutation des projections, il faut supposer que la tribu du futur vérifie la propriété $(\hat{c})$ symétrique de (c).
A partir de là, quitte à adjoindre la propriété (c) à la propriété (b) et $(\hat{c})$ à $(\hat{b})$, tout ce qui a été fait ici reste vrai sans changement à l'exception du théorème III.4 : Pour étendre celui-ci, il faut supposer outre que $\mathcal{L}$ vérifie (b) et (c), que la réalisation canonique du processus défini sur $\{T\in\mathbb{R}\}$, $(X_{t+T})_{t>0}$ vérifie aussi (c) pour tout temps intrinsèque T [sans quoi la

quasi-propriété de Markov n'a pas de sens!][4]. Dans ce cas, (qui sera en vigueur par la suite) la $(\mathcal{L},\mathcal{G})$ propriété de Markov reste équivalente à la quasi-propriété de Markov au sens de Weil, plus la propriété de Markov forte en α.

2) Lien avec les mesures de Palm associées aux mesures dissipatives et application du théorème IV.1 à ces mesures :

On appelle ensemble invariant toute partie A de Ω $\mathcal{F}^*$-mesurable ($\mathcal{F}^*$ est la complètée universelle de $\mathcal{F}°$) telle que pour tout réel t on ait $\theta_t(A) = A$. On notera $\mathcal{I}^*$ la tribu formée des ensembles invariants.

Nous allons énoncer un résultat essentiellement dû à Weil [W] modernisé par Fitzsimmons [F] et [DMM] que nous prolongeons ici de façon maximale en α à la manière de Fitzsimmons.

Théorème V.1 : Soit (P_t) un semi-groupe sousmarkovien droit et borélien, ν une mesure dissipative pour (P_t), σ-finie :

Il existe une unique mesure sur $(\Omega,\mathcal{I}^*)$ notée Π_ν telle que :

(i) $\Pi_\nu(\alpha=+\infty) = \Pi_\nu(\beta=-\infty) = 0$

(ii) pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathbb{E}$,

$$\nu(f) = \Pi_\nu\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(X_s)ds\right)$$

(iii) sous Π_ν, X vérifie la quasi-propriété de Markov de Weil.

(iv) si on note η la mesure sur $(\mathbb{E},\mathcal{E})$ définie par :

$$\eta(f) = \Pi_\nu(f(X_\alpha) \ ; \ \alpha > -\infty \text{ et } X_\alpha \in \mathbb{E})$$

alors $\nu - \eta U$ est harmonique (U est le noyau potentiel de (P_t)).

[4] Posant:Pour tout temps intrinsèque T et tout réel t strictement positif: $\mathcal{F}_t^T=\sigma(X_{T+s};0<s<t)$; On peut voir facilement que la réalisation canonique de $(X_{t+T})_{t>0}$ vérifie (c) si et seulement si: $\forall t>0$, la trace de $\mathbf{Q}$ sur $((T<+\infty),\mathcal{F}_t^T)$ est σ-finie. C'est une hypothèse un peu plus faible que celle de Weil [W].

Il faudra remarquer les faits suivants :

1) La propriété (ii) implique que pour tout temps intrinsèque T la réalisation canonique du processus $(X_{T+t})_{t>0}$ vérifie aussi (c) et donc que la quasi-propriété de Markov a un sens.

2) De même les propriétés (i) et (ii) impliquent encore que sous Π_ν les propriétés (b),(c),$(\hat{b})$ et $(\hat{c})$ sont vérifiées (remarquer au préalable que ces propriétés ne concernent que les traces des mesures sur la tribu $\mathcal{I}^*$ des invariants).

3) Selon [DMM], il existe un temps stationnaire S (i.e. S est $\mathcal{F}^*$-mesurable et $\forall t$, $\forall \omega$ $S\circ\theta_t(\omega) = S(\omega)-t$) fini Π_ν-p.s. et on peut prolonger Π_ν sur $(\Omega,\mathcal{F}^*)$ par une mesure notée $\Pi_\nu^{(S)}$ en posant: $\forall A\in\mathcal{F}^*$, $\Pi_\nu^{(S)}(A) = \Pi_\nu(A\circ\theta_S)$.

On obtient donc, avec le théorème III.4 que X vérifie la $(\mathcal{L},\mathcal{G})$ propriété de Markov sous $\Pi_\nu^{(S)}$ et nous pouvons appliquer le théorème IV.1 pour obtenir :

Corollaire : Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{E}$ ne chargeant pas les ensembles Π_ν-polaires alors il existe une fonctionnelle additive droite $A(\omega,ds)$ telle que pour toute fonction f $\mathcal{E}$-mesurable, $\mu(f) = \Pi_\nu\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(X_s)\; A(\omega,ds)\right]$.

Remarques et compléments :

1) le lecteur pourra vérifier qu'une mesure Q sur $(\Omega,\mathcal{F}*)$ coïncide avec une mesure de la forme Π_ν sur la tribu $\mathcal{I}*$ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées simultanément:

i) Q vérifie (b) (c) $(\hat{b})$ $(\hat{c})$

ii) sous Q, X est $(\mathcal{L},\mathcal{G})$-markovien de semi-groupe de transition (P_t)

iii) $-\infty < \alpha < +\infty$ et $X_\alpha \in \mathbb{E} \Leftrightarrow -\infty<\alpha<+\infty$ et la limite à droite de X_t en α existe dans $\mathbb{E}$ au sens de la topologie de Ray associée à (P_t).

2) On peut étendre le corollaire à une mesure Σ-finie.

3) [DMM] démontrent que si ν est une mesure dissipative σ-finie, Q_ν la mesure de Kuznetsov associée et $A(\omega,ds)$ une fonctionnelle additive droite, alors on a la relation :

$$\forall \mathfrak{z} \in \mathcal{F}^\circ, \mathfrak{z} \geq 0, \quad \Pi_\nu\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{z}\circ\theta_s \, A(\omega,ds)\right] = Q_\nu\left[\int_{]0,1]} \mathfrak{z}\circ\theta_s \, A(\omega,ds)\right]$$

Comme les ensembles Π_ν et Q_ν-polaires coïncident, le corollaire précédent s'exprime à l'aide de Q_ν, ce qui redonne le résultat de Dynkin-Getoor [D-G], généralisé par Fitzsimmons [F].

De plus, comme le fait ce dernier, on peut généraliser ce résultat à une mesure excessive σ-finie quelconque en faisant un détour par le semi-groupe $P'_t = e^{-t}P_t$.

Appendice

On se place sur l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F}^\circ)$, **P** est une probabilité sur cet espace et on suppose que X vérifie la $(\mathcal{L},\mathcal{G})$ propriété de Markov sous **P**.
On va démontrer ici le

Lemme : Toute mesure aléatoire intégrable $A(\omega,ds)$ de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$ est indistinguable d'une fonctionnelle additive droite (F.A.D. en abrégé).

Lemme préliminaire : $\forall\varepsilon\geq 0$, si Z est un processus $\mathcal{L}\cap\theta_{-\varepsilon}(\mathcal{G})$-mesurable alors il est indistinguable d'un processus de la forme $\mathfrak{z}\circ\theta$. où $\mathfrak{z}$ est une v.a. mesurable pour le tribu $\mathcal{F}^\circ_{[-\varepsilon,0]} = \sigma(X_s \ ; -\varepsilon \leq s \leq 0)$.

Démonstration : On projette d'abord sur $\mathcal{L}$ un processus de la forme : $Z= \mathfrak{z}_1\circ\theta.\times\mathfrak{z}_2\circ\theta$ avec $\mathfrak{z}_1 \in \mathcal{F}^\circ_{[-\varepsilon,0]}$ et $\mathfrak{z}_2 \in \hat{\mathcal{F}}^\circ_0$, on obtient un processus de la forme : $\mathfrak{z}\circ\theta$ où $\mathfrak{z} \in \mathcal{F}^\circ_{[-\varepsilon,0]}$. La propriété $\Pi^{\mathcal{L}}(Z) = \mathfrak{z}\circ\theta$. Avec $\mathfrak{z} \in \mathcal{F}^\circ_{[-\varepsilon,0]}$ est étendue par un argument de classe monotone à tout processus $\theta_{-\varepsilon}(\mathcal{G})$-mesurable, et donc en particulier à un processus Z $\mathcal{L}\cap\theta_{-\varepsilon}(\mathcal{G})$-mesurable pour lequel $\Pi^{\mathcal{L}}(Z) = Z1_{\{X\in\mathbb{E}^b\}}$.

De plus, pour un tel processus, il existe un réel k telque Z=k sur {X=a}, (c'est vrai pour tout processus $\mathcal{L}$-mesurable!), d'où :

$Z = k1_{\{X=a\}}+\Pi^{\mathcal{L}}(Z)$, et on en déduit une v.a. $\mathfrak{z} \in \mathcal{F}^\circ_{[-\varepsilon,0]}$ telle que $\mathfrak{z}\circ\theta$. soit indistinguable de Z.

<u>*Démonstration du lemme*</u> : Soit $A(\omega,ds)$ une mesure aléatoire intégrable de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$. Il est facile de voir que $A(\omega,.)$ est portée par l'ensemble $\{s, X_s(\omega)\in\mathbb{E}\}$;

Soit $A = B + C$ sa décomposition en somme d'une mesure ponctuelle et d'une mesure diffuse.

a) $\forall\omega \in \Omega$, $\forall\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$B(\omega,\Gamma) = \sum_{t\in\Gamma} A(\omega,\{t\})$$

Le processus $Z_t(\omega) = A(\omega,\{t\})$ est $\mathcal{L} \cap \mathcal{G}$-mesurable et nul hors de $\{X \in \mathbb{E}\}$;

$B(\omega,ds)$ est donc une mesure aléatoire de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$ et, Z est indistinguable d'un processus de la forme $f(X)$ où f est une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Posons $B^\circ(\omega,\Gamma) = \sum_{t\in\Gamma} f(X_t(\omega))$. $B^\circ(\omega,ds)$ est une F.A.D. indistinguable de $B(\omega,ds)$.

b) Reste à établir que C est indistinguable d'une F.A.D. :

C est une mesure aléatoire diffuse, intégrable et différence de deux mesures aléatoires de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$, c'est donc aussi une mesure aléatoire de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$.

Quitte à remplacer $C(\omega,ds)$ par : $1_{C(\omega,\mathbb{R})<+\infty}\ C(\omega,ds)$, on peut supposer de plus que $C(\omega,\mathbb{R})<+\infty$ pour tout ω ; de plus $C(\omega,.)$ est portée par $\{s, X_s(\omega)\in\mathbb{E}\}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons Z^n le processus : $(t,\omega)\to C(\omega,]t-1/n,t])\wedge 1, Z^n$ est un processus $\mathcal{L} \cap \theta_{-1/n}(\mathcal{G})$-mesurable.

D'après le lemme précédent, il est indistinguable d'un processus (borné!) Z^{on} de la forme $\mathfrak{z}^n\circ\theta.$ où $\mathfrak{z}^n$ est une variable $\mathcal{F}_{[-1/n,0]}$-mesurable.

De plus, quitte à remplacer $\mathfrak{z}^n$ par $\mathfrak{z}^n 1_{\{X_0\neq a, X_{-1/n}\neq b\}}$, on peut choisir Z^{on} nul hors de $[\alpha(\omega),\beta(\omega)+1/n]$. D'autre part, pour tout ω, la mesure $C(\omega,.)$ est limite faible de la suite de mesures $nZ^n_t\ dt$.

Notons D l'événement $\mathbf{P}$-négligeable :

$$D = \{\omega\ ;\ \exists t \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tels que } Z^{on}_t(\omega) \neq Z^n_t(\omega)\}.$$

On a : $\forall\omega \notin D$, $C(\omega,.)$ est la limite faible des mesures $nZ^{on}_t(\omega)dt$.

On emploie alors les méthodes développées dans l'appendice de [D-G] qu'on rappelle ici brièvement :

On se donne une limite médiale de Mokobodzki (cf [D-M]) .

I désigne dans la suite un intervalle borné de $\mathbb{R}$, on pose:

l'application $\omega \mapsto A(\omega,]a,b[)$ est $\sigma(X_u ;\ a<u<b)^*$-mesurable.

Et donc, en prenant $C°$ la partie diffuse de $A°$, on obtient une F.A.D.

b) d'autre part, pour $\omega \notin D$: $C(\omega,.) = A°(\omega,.)$; $C(\omega,.)$ étant diffuse, on a aussi $C(\omega,.) = C°(\omega,.)$.

Et donc C et $C°$ sont indistinguables.

Références

[A] Azéma : Théorie générale des processus et retournement du temps. *Ann. sci. de l'ENS. 4ème s.t6, 1973.*

[C-W] Chung et Walsh : To reverse a Markov process. *Acta Math. 123, 1970, p.225-251.*

[D-G] Dynkin et Getoor : Additive functionals and entrance laws. *J. Fonct. Anal. 62. 1985, p.221-265.*

[D-M] Dellacherie et Meyer : Probabilités et potentiel.*T1.Hermann 1980.*

[DMM] Dellacherie, Maisonneuve et Meyer : Probabilités et potentiel. *T5. Hermann. 1992.*

[F] Fitzsimmons : Homogeneous random measures and a weak order for the excessive measures of a Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.303 (1987), p. 431-478.*

[F-M] Fitzsimmons et Maisonneuve : Excessive measures and Markov processes with random birth and death. *Proba. th. rel. fields. Vol. 72, 1986.*

[K] Kuznetsov : Construction of Markov Processes with random times of birth and death. *Th. Prob. Appl. Vol.18 ; 1974.*

[L] Lenglart : Tribus de Meyer et théorie des processus. *Sem. Prob.XIV. LN in Math. n° 784, Springer-Verlag.*

[F-L] Lenglart et Fourati : Tribus homogènes et commutation des projections. *Sem. Prob.XXI.LN in Math.1247.Springer-Verlag 1987.*

[S] Sharpe : General Theory of Markov processes. *Académic Press,1988.*

[W] Weil : Quasi-processus et énergie. *Sem. Prob. V. LN in Math 191. Springer-Verlag 1971.*