SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE VALLOIS

Orthogonalité et uniforme intégrabilité de martingales. Étude d'une classe d'exemples

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 73-91

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__73_0>

Orthogonalité et uniforme intégrabilité de martingales

Etude d'une classe d'exemples

Pierre Vallois

Université de Nancy I - Departement de Mathématiques - B.P. 239
54506 VANDOEUVRE LES NANCY

1. Introduction.

Le point de départ de ce travail est l'étude des martingales $(M_t;\ 0\le t<1)$ et $(N_t;\ 0\le t<1)$ pour lesquelles le produit $(M_tN_t;\ 0\le t<1)$ est une martingale uniformément intégrable. Nous supposerons également que $M_1 = \lim_{t\to 1-} M_t$ et $N_1 = \lim_{t\to 1-} N_t$ existent.

1°) Lépingle ([L]) s'est intéressé à la version discrète, en considérant des martingales $(M_n\ ;\ n\ge 1)$ et $(N_n\ ;\ n\ge 1)$ positives. De plus cet auteur a considéré le modèle le plus simple :

(1.1) $$M_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k} + \frac{r_n}{q_n} 1_{B_n},$$

où $(A_k\ ;\ k\ge 1)$ est une partition de Ω telle que $p_k = P(A_k) > 0$,

$B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1,\dots,A_n,B_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k a_k$, $(a_k;\ k\ge 1)$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k \le 1$.

2°) L'analogue à temps continu du modèle de Lépingle est le suivant: $\Omega = [0,1]$, P est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, $\mathcal{F}_t$ est la σ-algèbre engendrée par les boréliens de $[0,t]$ et l'atome $]t,1]$, t appartenant à $[0,1]$. Ce modèle a été considéré par [DG], et [DMY] pour donner des exemples relatifs aux espaces H^1 et BMO. Les martingales sont aisées à décrire, elles sont associées aux fonctions f de $L^1_{loc}([0,1[)$ de la manière suivante :

$$M(f)_t = f1_{[0,t]} + \frac{r(f,t)}{1-t} 1_{]t,1]},\quad 0\le t<1,$$

avec

$$r(f,t) = c - \int_0^t f(u)du \quad ; \qquad 0 \le t < 1.$$

Par définition $M(f)_t$, converge lorsque $t \to 1-$, vers $M(f)_1 = f$.

Remarquons que $(M(f)_t\ ,\ 0 \le t < 1)$ est une martingale positive si et seulement si $f \ge 0$ et $\int_0^1 f(u)du \le c$; en particulier $f \in L^1([0,1])$.

On retrouve aisément la construction de Lépingle, en choisissant $c = 1$, $(x_k\ ;\ k \ge 0)$ une suite de réels de $[0,1]$, tels que $x_0 = 0$ et $x_k - x_{k-1} = p_k$ $A_k =]x_{k-1},x_k]$, $k \ge 1$.

Si $f = \sum_{k\ge1} a_k 1_{A_k}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k \le 1$, alors $M_n = M(f)_{x_n}$ vérifie (1.1)

3°) Le but de cet article est l'étude des martingales $M(f)$ et $M(g)$ telles que le produit $M(f)M(g)$ est une martingale uniformément intégrable. Le paragraphe 2 est consacré à la traduction analytique de cette condition. Le Théorème 2 au paragraphe 3 apporte une réponse complète. Il est alors aisé de retrouver le cas des martingales positives et en particulier le résultat de Lépingle.

2. Préliminaires.

Nous conservons les notations de l'Introduction.

Proposition 1. *On a les équivalences,*

(i) $(M(f)_t\ ;\ 0 \le t < 1)$ *est une martingale u.i.,*

(ii) $E(|M(f)|_1) < +\infty$ et $E(M(f)_1) = E(M(f)_0)$

(iii) $f \in L^1([0,1])$ *et* $c = \int_0^1 f(u)du.$

Remarques : 1°) Pour toute fonction f de $L^1([0,1])$, on note $H(f)$ la transformée de Hardy de f,

$$H(f)(t) = \frac{1}{1-t}\int_t^1 f(u)du \qquad 0 \le t < 1.$$

par conséquent $(M(f)_t\ ;\ 0 \le t < 1)$ est une martingale u.i. ssi $f \in L^1([0,1])$ et

$$M(f)_t = f\ 1_{[0,t]} + H(f)(t)\ 1_{]t,1]}. \tag{2.1}$$

2°) Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$, possédant un moment d'ordre 1 et centrée. Dubins et Gilat ([DG]) ont montré qu'il existe une probabilité μ_* sur $[0,+\infty[$ telle que si $(M_t \; ; \; 0 \le t \le 1)$ est une martingale uniformément intégrable, nulle en 0, dont la loi de M_1 est μ, alors,

$$P(S_1 \ge \lambda) \le \mu_*[\lambda,+\infty[\qquad , \text{ pour tout } \lambda \ge 0,$$

où $S_1 = \sup_{0 \le t \le 1} M_t$.

Ces auteurs donnent un exemple explicite de martingale $M = M(f)$ pour laquelle la loi de S_1 est μ_*. Rappelons brièvement la construction. On prend f l'inverse continu à droite de $t \longrightarrow \mu]-\infty,t]$. Puisque f est croissante, $H(f)$ l'est aussi et $S_1 = H(f)$. On vérifie que S_1 a pour loi μ_*.

<u>Preuve de la Proposition 1</u> : Il est clair que (i) implique (ii) et (ii) est équivalente à (iii). Supposons réalisée la condition (ii). Notons $M_t = M(f)_t$. Soit $a > 0$,
on a,

$$E\left(|M_t| \, 1_{\{|M_t|>a\}}\right) = \int_0^t |f(u)| \, 1_{\{|f(u)|>a\}} du + |r(f,t)| 1_{\{|r(f,t)|>a\}}.$$

Puisque $|r(f,t)| = \left|\int_t^1 f(u)du\right| \le \int_0^1 |f(u)|du$, on en déduit,

$$E\left(|M_t| \, 1_{\{|M_t|>a\}}\right) \le \int_0^1 |f(u)| \, 1_{\{|f(u)|>a\}} du + \int_0^1 |f(u)|du \; 1_{\left\{\int_0^1 |f(u)|du>a\right\}}.$$

Par conséquent $\lim_{a\to+\infty} E\left(|M_t| \, 1_{\{|M_t|>a\}}\right) = 0$, uniformément par rapport à t de $[0,1[$. □

A f élément de $L^1_{loc}([0,1[)$ et $c \in \mathbb{R}$, on associe la fonction φ :

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t}\left(c - \int_0^t f(u)du\right) \qquad 0 \le t < 1. \tag{2.2}$$

<u>Lemme 1</u>. *1°) φ est une fonction absolument continue sur $[0,1[$ et $\varphi(0) = c$.*
2°) Réciproquement si φ est absolument continue sur $[0,1[$, il existe une unique fonction f de $L^1_{loc}([0,1[)$ vérifiant (2.2) ; de plus,

$$f(t) = \varphi(t) - (1-t)\varphi'(t) \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1[. \tag{2.3}$$

Preuve : Il est clair que si $f \in L^1_{loc}([0,1[)$, φ est une fonction absolument continue sur $[0,1[$. Réciproquement, on écrit (2.2) sous la forme :

$$(1-t)\varphi(t) = c - \int_0^t f(u)du.$$

En dérivant on obtient (2.3). φ est continue sur $[0,1[$, donc $\varphi \in L^1_{loc}([0,1[)$. Puisque $|(1-t)\varphi'(t)| \leq |\varphi'(t)|$, et $\varphi' \in L^1_{loc}([0,1[)$, f appartient à $L^1_{loc}([0,1[)$. □

Les relations (2.2) et (2.3) établissent une correspondance bijective entre (f,c) et φ. Nous noterons $(f,c) \longleftrightarrow \varphi$. On a, $\frac{r(f,t)}{1-t} = \varphi(t)$ et

(2.4) $$M(f)_t = f\, 1_{[0,t]} + \varphi(t)\, 1_{]t,1]}.$$

Soient $c' \in \mathbb{R}$ et $g \in L^1_{loc}([0,1[)$ et $(g,c') \longleftrightarrow \psi$.

Proposition 2. *1°) Le processus* $(M(f)_t\, M(g)_t\ ;\ 0 \leq t < 1)$ *est une martingale ssi* $fg \in L^1_{loc}([0,1[)$ et

(2.5) $$\varphi'\psi' = 0 \qquad p.s.\ sur\ [0,1[.$$

De plus $(cc',fg) \longleftrightarrow \varphi\psi$.

2°) $M(f)M(g)$ *est une martingale u.i. ssi* $fg \in L^1([0,1[)$, *(2.5) est réalisé et*

(2.6) $$cc' = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Remarque : La condition (2.6) est équivalente à

(2.7) $$\lim_{t\to 1-} (1-t)\, \varphi(t)\, \psi(t) = 0.$$

Preuve : On a,

$$M(f)_t\, M(g)_t = fg\, 1_{[0,t]} + \frac{1}{1-t}\, ((1-t)\, \varphi(t)\, \psi(t))\, 1_{]t,1]}.$$

Par conséquent $M(f)\, M(g)$ est une martingale ssi $fg \in L^1_{loc}([0,1[)$ et

(2.8) $$(1-t)\, \varphi(t)\, \psi(t) = a - \int_0^t f(u)\, g(u)du.$$

Cette égalité est équivalente à $a = \varphi(0)\,\psi(0) = cc'$ et

$$-f(t)\,g(t) = (1-t)\,(\varphi'(t)\,\psi(t) + \varphi(t)\,\psi'(t)) - \varphi(t)\,\psi(t).$$

On exprime f (resp. g) à l'aide de φ et φ' (resp. ψ et ψ'), un calcul immédiat conduit à $\varphi'(t)\,\psi'(t) = 0$.

L'assertion 2 de la Proposition 2 est une conséquence directe de la Proposition 1. □

La Proposition 2 nous conduit naturellement à introduire,

$$A_o = \{u \in [0,1[\ ;\ \varphi'(u) = 0\} \quad \text{et} \quad A_* = \{u \in [0,1[\ ;\ \varphi'(u) \neq 0\}.$$

Si A_* est de mesure de Lebesgue nulle, φ est constante et $f = \varphi$.

La martingale $M(f)$ est constante. Ce cas n'étant pas intéressant, nous supposerons que les ensembles A_o et A_* ont une mesure de Lebesgue strictement positive. On associe à l'ensemble A_o, deux fonctions :

$$a_o(t) = \int_0^t 1_{\{u \in A_o\}} du \quad , \quad a_*(t) = \int_0^t 1_{\{u \in A_*\}} du, \quad 0 \le t \le 1.$$

a_o et a_* sont deux fonctions continues, croissantes, nulles en 0, notons α_o (resp. α_*) l'inverse continu à droite de a_o (resp. a_*). Remarquons :

(2.9) $\quad a_o(t) \le t$ (resp. $a_*(t) \le t$) et $1 \ge \alpha_o(t) \ge t$

(resp. $1 \ge \alpha_*(t) \ge t$).

<u>Lemme 2</u>. *1°) Pour presque tout* t *de* $[0,a_o(1)[$, $\alpha_o(t) \in A_o$.

2°) Une fonction h *est p.s. nulle sur* A_o *ssi* $h(\alpha_o(t)) = 0$ *pour presque tout* t *de* $[0,a_o(1)[$.

3°) On a l'équivalence : $\alpha_o(v) < s \Longleftrightarrow v < a_o(s)$.

4°) $a_o(\alpha_o(t)) = t$ *pour tout* t *de* $[0,a_o(1)[$.

<u>Remarque</u> : On a bien sûr des résultats analogues en changeant α_o en α_* et A_o en A_*.

<u>Preuve du Lemme 2</u> : On a,

$$\int_0^1 1_{\{\alpha_o(t) \notin A_o\}} dt = \int_0^1 1_{\{t \notin A_o\}} da_o(t) = 0.$$

Le 1°) en résulte immédiatement.

h est p.s. nulle sur A_o ssi $|h| \wedge n$ est p.s. nulle sur A_o, pour tout $n \ge 0$. Il suffit de prendre $h \ge 0$ et h bornée. Mais

$$\int_0^1 h(t)1_{A_o}\,dt = \int_0^1 h(t)da_o(t) = \int_0^{a_o(1)} h(\alpha_o(t))dt.$$

D'où le 2°).

Puisque a_o est une fonction croissante et continue, α_o est une fonction strictement croissante, on en déduit 3°) et 4°). $\square$

On introduit à présent deux fonctions β_o et β_* qui vont jouer un rôle essentiel dans la suite. Ces fonctions sont définies de la manière suivante :

$$(2.10)_o \qquad \beta_o(t) = \int_0^t 1_{[0,a_o(1)[}(u)\,\frac{du}{1-\alpha_o(u)} \qquad , t \in [0,1],$$

$$(2.10)_* \qquad \beta_*(t) = \int_0^t 1_{[0,a_*(1)[}(u)\,\frac{du}{1-\alpha_*(u)} \qquad , t \in [0,1].$$

On pose,

$$(2.11) \qquad \rho_o(t) = \exp - \beta_o(t) \qquad , \rho_*(t) = \exp - \beta_*(t) \ ; \ t \in [0,1].$$

Lemme 3. *1°)* $\beta_o(1) < +\infty$ *ssi* $\displaystyle\int_0^1 \frac{da_o(t)}{1-t} < +\infty$.

2°) $\beta_o(1) + \beta_*(1) = +\infty$

3°) $\beta_o(a_o(\alpha_*(x))) = -\ln(1-\alpha_*(x)) - \beta_*(x) \qquad , \ x \in [0,a_*(1)[.$

Preuve : Soit $t \in [0,a_o(1)[$. En utilisant les assertions 3°) et 4°) du Lemme 2, on obtient,

$$(2.12)_o \qquad \beta_o(t) = \int_0^1 1_{\{a_o(\alpha_o(u))\le t\}}\,\frac{du}{1-\alpha_o(u)} = \int_0^1 1_{\{a_o(v))\le t\}}\,\frac{da_o(v)}{1-v}$$

$$= \int_0^{\alpha_o(t)} \frac{da_o(v)}{1-v}.$$

Si $\alpha_o(a_o(s)) = s$ (resp. $\alpha_o(a_o(s)) > s$, a_o est constante sur l'intervalle $[\alpha_o(a_o(s)-), \alpha_o(a_o(s))]$), on a,

$$\beta_o(a_o(s)) = \int_0^s \frac{da_o(v)}{1-v}.$$

Mais $a_o(s) + a_*(s) = s$, donc

$$\beta_o(a_o(\alpha_*(x))) = -\ln(1-\alpha_*(x)) - \int_0^{\alpha_*(x)} \frac{da_*(v)}{1-v} .$$

Le point 3°) est obtenu en utilisant $(2.12)_*$.

Un calcul direct conduit à $\beta_o(1) = \int_0^1 \frac{da_o(v)}{1-v}$ d'où 1°) et 2°). □

Notre approche repose de manière essentielle sur,

Propsition 3. *Soient* φ *une fonction absolument continue sur* $[0,1[$ *et* $(f,c) \longleftrightarrow \varphi$. *Alors* $\varphi'(t) = 0$ *pour presque tout* t *de* A_o *ssi*

$$f_o(t) = -\left(c + \int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(u)\, \rho_*'(u)du\right)\rho_o'(t) , \quad t \in [0,a_o(1)[, \tag{2.13}$$

où $\qquad f_o(t) = f(\alpha_o(t))$ *et* $f_*(t) = f(\alpha_*(t))$.

De plus

$$(1-t)\, \varphi(t) = \rho_o(a_o(t)) \left(c + \int_0^{a_*(t)} f_*(u)\, \rho_*'(u)du\right). \tag{2.14}$$

Preuve : 1°) On déduit de (2.13) que $\varphi'(t) = 0$ pour presque tout t de A_o ssi $f(t) - \varphi(t) = 0$ pour presque tout t de A_o. D'après le 2°) du Lemme 2, cette condition est équivalente à,

$$f_o(t) = \varphi(\alpha_o(t)). \tag{2.15}$$

Mais,

$$(1-\alpha_o(t))\varphi(\alpha_o(t)) = c - \int_0^{\alpha_o(t)} f(u)da_o(u) - \int_0^{\alpha_o(t)} f(u)da_*(u) \tag{2.16}$$

$$= c - \int_0^{t} f_o(u)du - \int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(u)du.$$

Par conséquent (2.15) est équivalent à,

$$(1-\alpha_o(t))\, f_o(t) = c - \int_0^{t} f_o(u)du - \int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(u)du. \tag{2.17}$$

Si l'on pose $F_o(t) = \int_0^t f_o(u)du$, (2.17) est une équation différentielle linéaire. L'unique solution de (2.17) vérifiant $F_o(0) = 0$, est donnée par,

(2.18) $$F_o(t) = c(1 - \rho_o(t)) - \xi(t)\, \rho_o(t)$$

avec

$$\xi(t) = \int_0^t \frac{1}{1-\alpha_o(u)} \left(\int_0^{a_*(\alpha_o(u))} f_*(s)ds\right) \exp \beta_o(u)du$$

$$= \int_0^t \left(\int_0^{a_*(\alpha_o(u))} f_*(s)ds\right) \left(\frac{1}{\rho_o}\right)'(u)du.$$

D'où,

$$f_o(t) = \left(-c + \frac{1}{\rho_o(t)} \int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(s)ds - \xi(t)\right)\rho_o'(t).$$

On applique le théorème de Fubini et le 3°) du Lemme 2,

$$\xi(t) = \int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(s) \left(\frac{1}{\rho_o(t)} - \frac{1}{\rho_o(a_o(\alpha_*(s)))}\right)ds.$$

Appliquons le 3°) du Lemme 3, il vient

(2.19) $$-\rho_o(a_o(\alpha_*(s)))\, \rho_*'(s) = 1.$$

Par conséquent

(2.20) $$\xi(t) = \frac{1}{\rho_o(t)} \left(\int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(s)ds\right) + \int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(s)\rho_*'(s)ds.$$

D'où (2.13).

2°) Posons $\tau(t) = \rho_o(a_o(t)) \left(c + \int_0^{a_*(t)} f_*(u)\, \rho_*'(u)du\right)$. On déduit de (2.13) et du Lemme 2,

(2.21) $$f(t) = -\left(c + \int_0^{a_*(t)} f_*(u)\, \rho_*'(u)du\right)\rho_o'(a_o(t)),$$

pour presque tout t de A_o.

D'où $\tau'(t) = -f(t)$, pour presque tout t de A_o.
Mais pour presque tout t de A_*, $\alpha_*(a_*(t)) = t$, en utilisant de plus (2.19), on obtient,

$$\tau'(t) = \rho_o(a_o(t))\, f_*(a_*(t))\rho_*'(a_*(t)) = -f(t),$$

pour presque tout t de A_* .

Mais $\tau(0) = c$ donc $\tau(t) = (1-t)\varphi(t)$. □

Lemme 4. *Soient* $f_* \in L^1([0,a_*(1)[)$ *et* f_o *la fonction définie par* (2.13).

Alors $f_o \in L^1([0,a_o(1)[)$, *et* $c = \int_0^1 f(t)dt$ *ssi* $\rho_o(1) = 0$ *(resp.* $\rho_o(1)>0$ *et*

$c = -\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\, \rho_*'(u)du$ *).*

Preuve : On a,

$$\int_0^{a_o(1)} |\rho_o'(t) \int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(u)\, \rho_*'(u)du|\, dt \le \delta,$$

avec

$$\delta = \int_0^{a_o(1)} \rho_o'(t) \left(\int_0^{a_*(\alpha_o(t))} |f_*(u)|\ \rho_*'(u)du\right) dt.$$

On applique le théorème de Fubini, il vient

$$\delta = -\int_0^{a_*(1)} |f_*(u)|\rho_*'(u)\ (\rho_o(a_o(\alpha_*(u))) - \rho_o(1))du,$$

$$\delta \le -\int_0^{a_*(1)} |f_*(u)|\ \rho_*'(u)\rho_o(a_o(\alpha_*(u)))du.$$

On déduit de (2.19) : $\delta < +\infty$. Par conséquent $f_o \in L^1([0,a_o(1)[)$.
Un calcul analogue conduit à,

$$\int_0^{a_o(1)} f_o(t)dt = -c(\rho_o(1) - 1) - \int_0^{a_*(1)} f_*(u)(1 + \rho_*'(u)\rho_o(1))du.$$

Si $\rho_o(1) = 0$ (resp. $\rho_o(1)>0$), c est toujours égal à $\int_0^1 f(t)dt$ (resp. on a

$c - \int_0^1 f(t)dt = \rho_o(1)(c + \int_0^{a_*(1)} f_*(u)\ \rho_*'(u)du))$. □

3. Enoncé des résultats.

Pour toute fonction h définie sur $[0,1[$, on définit,

(3.1) $$h_0 = h\circ\alpha_0 \quad \text{sur} \quad [0,a_0(1)[\ , \quad h_* = h\circ\alpha_* \quad \text{sur} \quad [0,a_*(1)[.$$

Si h_0 et h_* sont données, h est déterminée par (3.1) sauf éventuellement sur l'ensemble des temps de sauts de α_0 et α_*, ce qui est suffisant pour caractériser h presque partout.

Théorème 1. *1°)* $M(f)M(g)$ *est une martingale ssi* $f_* \in L^1_{loc}([0,a_*(1)[)$, $g_0 \in L^1_{loc}([0,a_0(1)[)$,

(3.2) $$f_0(t) = -\left(c + \int_0^{a_*(\alpha_0(t))} f_*(u)\rho_*'(u)du\right)\rho_0'(t) \qquad t \in [0,a_0(1)[$$

(3.3) $$g_*(t) = -\left(c' + \int_0^{a_0(\alpha_*(t))} g_0(u)\rho_0'(u)du\right)\rho_*'(t) \qquad t \in [0,a_*(1)[$$

où $A_0 \subset [0,1]$ et $0 < \int_0^1 1_{\{t\in A_0\}}dt < 1.$

2°) $M(f)M(g)$ *est u.i. ssi de plus,*

(3.4) $$-\int_0^{a_0(1)} \left|c + \int_0^{a_*(\alpha_0(t))} f_*(u)\rho_*'(u)du\right|\rho_0'(t)|g_0(t)|dt < +\infty$$

(3.5) $$-\int_0^{a_*(1)} \left|c' + \int_0^{a_0(\alpha_*(t))} g_0(u)\rho_0'(u)du\right|\rho_*'(t)|f_*(t)|dt < +\infty$$

(3.6) $$cc' = \int_0^{a_0(1)} f_0(t)g_0(t)dt + \int_0^{a_*(1)} f_*(t)g_*(t)dt.$$

Remarques: Soit U le temps d'arrêt $U(s) = s$. Le processus $(M(f)_t;\ 0\le t<1)$ est continu sauf éventuellement en U et $\Delta M(f)_U = f - \varphi$. Par conséquent $A_0 = \{s\in[0,1[;\ \Delta M(f)_{U(s)} = 0\}$; d'une manière analogue, $A_* = \{s\in[0,1[;\ \Delta M(g)_{U(s)} = 0\}$. $M(f)$ et $M(g)$ sont deux martingales qui sont continues chacune sur deux ensembles disjoints. Notons de plus $\Delta(M(f)M(g))_U = M(f)_U\ \Delta M(g)_U$ sur A_0 (resp. $\Delta(M(f)M(g))_U = M(g)_U\ \Delta M(f)_U$ sur A_*).

Preuve : 1°) D'après les Propositions 2 et 3, il suffit de montrer que si $f_* \in L^1_{loc}([0,a_*(1)[)$ et $g_0 \in L^1_{loc}([0,a_0(1)[)$, alors $fg \in L^1_{loc}([0,1[)$. Mais f_0

(resp. g_*) est une fonction localement à variation bornée sur $[0,a_0(1)[$ (resp. $[0,a_*(1)[$), de plus g_0 (resp. f_*) est localement intégrable sur $[0,a_0(1)[$ (resp. $[0,a_*(1)[$), donc f_0g_0 (resp. f_*g_*) appartient à $L^1_{loc}([0,a_0(1)[)$ (resp. $L^1_{loc}([0,a_*(1)[)$).

2°) Il suffit d'appliquer la Proposition 1. □

Nous souhaitons à présent donner des exemples de réalisation des conditions (3.4), (3.5) et (3.6). Notre point de vue est le suivant : on se donne f et A_0, on cherche les fonctions g telle que $M(f)M(g)$ soit une martingale uniformément intégrable ; on examine ensuite l'uniforme intégrabilité de $M(f)$ et $M(g)$.

Cas 1. *Nous supposons* $c \neq -\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du$ *et*

(3.7) $$-\int_0^{a_*(1)} |f_*(u)|\rho_*'(u)du < +\infty,$$

Alors $M(f)M(g)$ *est u.i. ssi*

(3.8) $$-\int_0^{a_0(1)} |g_0(t)|\rho_0'(t)dt < +\infty, \text{ et } c' = -\int_0^{a_0(1)} g_0(t)\ \rho_0'(t)dt.$$

De plus $M(g)$ *est u.i. , et* $M(f)$ *est u.i. ssi* $\rho_0(1) = 0$.

Cas 2. *Nous supposons que* f_* *vérifie* (3.7) *et* $c = -\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du.$

Alors $M(f)M(g)$ *est u.i. si*

(3.9) $$\int_0^{a_0(1)} |g_0(t)| \left(\int_{a_*(\alpha_0(t))}^{a_*(1)} |f_*(u)|\rho_*'(u)du\right)\rho_0'(t)dt < +\infty.$$

$M(f)$ *est u.i. ;* $M(g)$ *est u.i. ssi* $g_0 \in L^1([0,a_0(1)[)$ *et* $\rho_*(1) = 0$ *(resp.* $\rho_*(1) > 0$ *et* $c' = -\int_0^{a_0(1)} g_0(u)\rho_0'(u)du$ *).*

Cas 3. *Nous supposons que* f_* *ne vérifie pas* (3.7) *mais que*

(3.10) $$\lim_{t\to a_*(1)} \int_0^t f_*(u)\ \rho_*'(u)du = +\infty \text{ ou } -\infty.$$

Alors M(f)M(g) *est u.i. lorsque,*

(3.11) $$\int_0^{a_0(1)} |g_0(t)| \left(\int_0^{a_*(\alpha_0(t))} |f_*(u)|\rho_*'(u)du\right)\rho_0'(t)dt < +\infty,$$

et $c' = -\int_0^{a_0(1)} g_0(t)\rho'(t)dt$. M(g) *est u.i.,* M(f) *est u.i. ssi* $f_* \in L^1([0,a_*(1)[)$ *et* $\rho_0(1) = 0$.

Remarque : Si f_* garde un signe constant sur $[\tau,1]$, où $\tau \in]0,1[$, alors (3.9) et (3.11) sont des conditions nécessaires et suffisantes, et les cas 1, 2 et 3 recouvrent toutes les possibilités.

Preuve : Une application directe du théorème de Fubini conduit à,

(3.12) $$\int_0^{a_0(1)} \left(\int_{a_*(\alpha_0(u))}^{a_*(1)} |f_*(t)|\rho_*'(t)dt\right) |g_0(u)|\rho_0'(u)du$$

$$= \int_0^{a_*(1)} |f_*(t)| \left(\int_0^{a_0(\alpha_*(t))} |g_0(u)|\rho_0'(u)du\right)\rho_*'(t)dt.$$

1°) Etudions le cas 1. On a,

$$f_0(t) \sim (Cte)\rho_0'(t), \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow a_0(1).$$

Donc $f_0g_0 \in L^1([0,a_0(1)[)$ ssi

(3.13) $$-\int^{a_0(1)} |g_0(t)|\rho_0'(t)dt < +\infty.$$

(3.13) $$-\int_0^{a_0(1)} |g_0(t)|\rho_0'(t)dt < +\infty.$$

En utilisant de plus (3.7) et (3.12) on montre que $f_*g_* \in L^1([0,a_*(1)[)$ et

(3.14) $$\int_0^{a_*(1)} f_*(u)g_*(u)du = -\int_0^{a_*(1)} g_0(u)\rho_0'(u) \left(\int_{a_*(\alpha_0(u))}^1 f_*(t)\rho_*'(t)dt\right)du$$

$$-c'\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du.$$

D'où,

$$\int_0^{a_o(1)} f_o(u)g_o(u)du + \int_0^{a_*(1)} f_*(u)g_*(u)du = -c'\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du$$

$$-\left(\int_0^{a_*(0)} g_o(u)\rho_o'(u)du\right)\left(\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du\right) - c\int_0^{a_o(1)} g_o(u)\rho_o'(u)du.$$

Par conséquent,

$$\text{(3.15)}\quad cc' - \int_0^1 f(t)g(t)dt = \left(c + \int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du\right)\left(c' + \int_0^{a_o(1)} g_o(u)\rho_o'(u)du\right).$$

On en déduit : $cc' = \int_0^1 f(t)g(t)dt \iff c' = -\int_0^{a_o(1)} g_o(u)\rho_o'(u)du.$

D'après (2.19) on a,

$$\text{(3.16)}\qquad -\rho_o'(t) \geq 1.$$

Donc $g_o \in L^1([0,a_o(1)[)$ et $f_* \in L^1([0,a_*(1)[)$. On déduit du Lemme 4 et de la Proposition 1 que $M(g)$ est u.i., et $M(f)$ est u.i. ssi $\rho_o(1) = 0$.

2°) Supposons les conditions du cas 2 réalisées. Alors

$$\text{(3.17)}\qquad f_o(t) = \left(\int_{a_*(\alpha_o(t))}^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du\right)\rho_o'(t) \qquad t \in [0,a_o(1)[.$$

Il est clair que (3.9) implique que $f_og_o \in L^1([0,a_o(1)[)$; (3.12), (3.7) et (3.9) assurent $f_*g_* \in L^1([0,a_*(1)[)$. De plus les égalités (3.14) et (3.15) étant réalisées, $cc' = \int_0^1 f(t)\, g(t)dt$. On termine comme précédemment.

3°) Etudions pour finir le cas 3.

$$f_o(t) \sim \rho_o'(t)\left(\int_0^{a_*(\alpha_o(t))} f_*(u)\rho_*'(u)du\right) \text{ ; lorsque } t \longrightarrow a_o(1).$$

D'après (3.11), $f_og_o \in L^1([0,a_o(1)[)$.

Puisque $-\int_0^{a_*(1)} |f_*(u)|\rho_*'(u)du = +\infty$, la condition (3.11) implique

$$-\int_0^{a_0(1)} |g_0(t)|\rho_0'(t)dt < +\infty.$$

Si $c' \neq -\int_0^{a_0(1)} g_0(t)\rho_0'(t)dt$, alors $f_*(t)g_*(t) \sim -(\mathrm{Cte})\ f_*(t)\rho_*'(t)$,

lorsque $t \longrightarrow a_*(1)$.

Donc $\int_0^1 |f_*(t)\ g_*(t)|dt = +\infty$. Par conséquent, $c' = -\int_0^{a_0(1)} g_0(t)\rho_0'(t)dt$ et

$$g_*(t) = \left(\int_{a_0(\alpha_*(t))}^{a_0(1)} g_0(u)\rho_0'(u)du\right)\rho_*'(t), \qquad t \in [0,a_*(1)[.$$

Avec le théorème de Fubini et (3.11), on montre que $f_*g_* \in L^1([0,a_*(1)[)$. On calcule $\int_0^{a_0(1)} f_0(t)g_0(u)du$, en utilisant à nouveau le théorème de Fubini ; il est aisé d'en déduire,

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = -c\int_0^{a_0(1)} g_0(t)\rho_0'(t)dt = cc'.$$

On déduit de (3.10) et du Lemme 4 que si f_* appartient à $L^1([0,a_*(1)[)$, $M(f)$ est u.i. ssi $\rho_0(1) = 0$. □

Remarques : 1°) Les conditions du cas 2 sont satisfaites, lorsque l'on prend $g_0 \in L^1_{loc}([0,a_0(1)[)$, $c = -\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)du$ et f_* vérifiant

$$\text{(3.18)} \qquad -\int_0^{a_*(1)} |f_*(u)|\rho_*'(u)\max\left(1,-\int_0^{a_0(\alpha_*(u))} |g_0(t)|\rho_0'(t)dt\right)du < +\infty.$$

On peut trouver g telle que $M(g)$ ne soit pas u.i..

2°) Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $f_*(t) = \rho_*(t)^{-\mu}$. Puisque f_* est positive, nous avons déjà noté que les cas 1, 2 et 3 représentent toutes les possibilités et que (3.9), (3.11) sont des conditions nécessaires et suffisantes. Alors la condition (3.7) est satisfaite ssi $\rho_*(1) > 0$ ou $\rho_*(1) = 0$ et $\mu < 1$. Lorsque $\rho_*(1) = 0$ et $\mu \geq 1$, (3.10) est réalisée. On s'intéresse plus particulièrement aux cas 2 et 3: les conditions (3.9) et (3.11) portent à la fois sur g_0 et f_*. Si $\rho_*(1) > 0$, on montre sans difficultés que (3.9) est équivalente à,

$$\int_0^{a_o(1)} |g_o(t)| \left(\int_{\alpha_o(t)}^1 \frac{da_*(u)}{1-u} \right) dt < \infty.$$

Supposons à présent $\rho_*(1) = 0$. Alors,

(i) Si $\mu < 1$ (resp. $\mu > 1$) , (3.9) (resp. (3.11)) est équivalente à

(3.19) $$\int_0^{a_o(1)} |g_o(t)|\,|\rho_o'(t)|^{\mu} dt < +\infty$$

(ii) Si $\mu = 1$, (3.11) est équivalente à

(3.20) $$\int_0^{a_o(1)} |g_o(t)|\,|\rho_o'(t) \ln|\rho_o'(t)|| \, dt < +\infty.$$

Dans le cadre des martingales positives, le Théorème 1 devient

Théorème 2. *1°)* M(f), M(g) *et* M(f)M(g) *sont trois martingales positives ssi*

$$f_* \geq 0,\ g_o \geq 0\ ,\ \nu_* = -\int_0^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u) < +\infty,\ \nu_o = -\int_0^{a_o(1)} g_o(u)\rho_o'(u)du < +\infty,$$

$c \geq \nu_*$, $c' \geq \nu_o$ et f_o (resp. g_*) est définie par (3.2) (resp. (3.3)).

2°) M(f) *(resp.* M(g)) *est u.i. ssi* $c = \nu_*$ *ou* $\rho_o(1) = 0$ *(resp.* $c' = \nu_o$ *ou* $\rho_*(1) = 0$).

3°) M(f)M(g) *est u.i. ssi* $c = \nu_*$ *ou* $c' = \nu_o$.

Soient $(f,c) \longleftrightarrow \varphi$. On déduit de (2.3) que φ est croissante ssi $\varphi \geq f$. Lorque cette condition est réalisée, on tire de (2.4),

(3.21) $$\sup_{0 \leq t \leq 1} M(f)_t = \varphi.$$

Cette propriété a été utilisée par Dubins et Gilat ([DG]) lorsque f est l'inverse continu à droite de la fonction de répartition d'une probabilité sur $\mathbb{R}$, possédant un moment d'ordre 1 et centrée; alors f appartient à $L^1([0,1])$, φ = H(f), et f est croissante. On en déduit que $H(f) \geq f$, la fonction H(f) est croissante, (3.21) est vérifiée.

Considérons deux martingales M(f) et M(g) telles que le produit M(f)M(g) soit une martingale. Nous conservons les notations du Théorème 1. Nous supposerons de plus, (3.22)$_*$ $$\lim_{t\to a_*(1)} -\int_0^t f_*(u)\rho_*'(u)du = \nu_* \quad \text{existe}$$

(3.22)$_0$ $$\lim_{t\to a_0(1)} -\int_0^t g_0(u)\rho_0'(u)du = \nu_0 \quad \text{existe}$$

(3.23) $$c \geq \nu_* \quad , c' \geq \nu_0 , \qquad \rho_0(1) = \rho_*(1) = 0.$$

Dans ces conditions on a,

Proposition 4. *Supposons que* f_* *et* g_0 *sont deux fonctions croissantes. Alors,*

1°) φ *et* ψ *sont aussi croissantes,*

2°) $\sup_{0\leq t\leq 1} M(f)_t = \varphi \quad , \sup_{0\leq t\leq 1} M(g)_t = \psi, \quad \sup_{0\leq t\leq 1} (M(f)_t\, M(g)_t) = \varphi\psi.$

En particulier,

(3.24) $$\sup_{0\leq t\leq 1} (M(f)_t\, M(g)_t) = \left(\sup_{0\leq t\leq 1} M(f)_t\right)\left(\sup_{0\leq t\leq 1} M(g)_t\right).$$

Preuve : 1°) Par symétrie il suffit de montrer que si f_* est croissante alors φ l'est aussi. Si $t \in A_0$, alors $\varphi(t) = f(t)$, en particulier $\varphi(t) \geq f(t)$. Remarquons,

$$\varphi(t) \geq f(t) \quad , \forall t \in A_* \Longleftrightarrow \varphi(\alpha_*(t)) \geq f_*(t) \qquad \forall\ t \in [0,a_*(1)[.$$

On applique (2.14), (3.22)$_*$ et (2.19), il vient,

$$\varphi(\alpha_*(t)) = \frac{1}{\rho_*(t)} \left(c-\nu_* - \int_t^{a_*(1)} f_*(u)\rho_*'(u)\right).$$

Mais $f_*(u) \geq f_*(t)$ pour tout $u \in [t,a_*(1)]$, $c \geq \nu_*$ et $\rho_*(1) = 0$, donc

$$\varphi(\alpha_*(t)) \geq f_*(t).$$

Par conséquent $\varphi \geq f$, φ est bien croissante.

2°) Puisque φ et ψ sont croissantes, $\sup_{0\leq t\leq 1} M(f)_t = \varphi$ et $\sup_{0\leq t\leq 1} M(g)_t = \psi$. De plus $\varphi \geq 0$ et $\psi \geq 0$, donc $\varphi\psi$ est aussi une fonction croissante. Mais $M(f)M(g) = M(fg)$ et $(cc',fg) \longleftrightarrow \varphi\psi$, d'où (3.24). □

Remarques: Plaçons nous sous les hypothèses de la Proposition 4. On peut donner une nouvelle interprétation de A_0 et A_*:

$$A_o = \{s\in[0,1];\ \sup_{0\le t\le 1} M(f)_t(s) = f(s)\},\ A_* = \{s\in[0,1];\ \sup_{0\le t\le 1} M(g)_t(s) = g(s)\}.$$

Par conséquent, $M(f)_1 = \sup_{0\le t\le 1} M(f)_t$ (resp. $M(g)_1 = \sup_{0\le t\le 1} M(g)_t$) sur A_o (resp. A_*). Rappelons que dans [V]), nous avons caractérisé la loi de S_∞ à l'aide de λ et μ_1, où $(M_t;\ t\ge 0)$ est une martingale *continue*, uniformément intégrable, nulle en 0, $S_\infty = \sup_{t\ge 0} M_t$, $\lambda(x) = E(M_\infty | S_\infty = x)$ et μ_1 est une sous probabilité dont le support est inclus dans $\{x\ge 0;\ \lambda(x) = x\}$. De plus $M_\infty = S_\infty$ sur l'ensemble $\{\lambda(S_\infty) = S_\infty\}$. Ce qui explique en partie l'analogie entre (3.2) et les formules du Théorème 3 de [V].

Pour finir nous revenons à l'étude des martingales discrètes considérées par Lépingle ([L]). Nous conservons les notations de l'Introduction. On note,

$$A_o = \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_{2n}, x_{2n+1}[\ ,\ A_* = \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_{2n+1}, x_{2n+2}[$$

$$d_n^o = \sum_{k=1}^{n} (x_{2k-1} - x_{2k-2})\ ,\ \ d_n^* = \sum_{k=1}^{n} (x_{2k} - x_{2k-1})\ ,\ n \ge 1.$$

$$d_o^o = d_o^* = 0.$$

Alors

$$a_o(x) = \begin{cases} d_n^o + x - x_{2n} & x_{2n} \le x < x_{2n+1} \\ d_{n+1}^o & x_{2n+1} \le x < x_{2n+2} \end{cases}$$

$$a_*(x) = \begin{cases} d_n^* + x - x_{2n+1} & x_{2n+1} \le x < x_{2n+2} \\ d_{n+1}^* & x_{2n+2} \le x < x_{2n+3} \end{cases}$$

$$\alpha_o(x) = x - d_n^o + x_{2n}\quad ,\ d_n^o \le x < d_{n+1}^o$$

$$\alpha_*(x) = x - d_n^* + x_{2n+1}\quad ,\ d_n^* \le x < d_{n+1}^*$$

$$\rho_o(t) = P_n^o\left(\frac{1-t+d_n^o-x_{2n}}{1-x_{2n}}\right)\qquad d_n^o \le t < d_{n+1}^o$$

$$\rho_*(t) = P^*_n\left(\frac{1-t+d^*_n-x_{2n+1}}{1-x_{2n+1}}\right) \qquad d^*_n \le t < d^*_{n+1}$$

avec

$$P^o_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-x_{2k+1}}{1-x_{2k}}\right), \qquad P^*_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-x_{2k+2}}{1-x_{2k+1}}\right)$$

$$P^o_o = P^*_o = 1.$$

Nous considérons des fonctions h étagées,

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} (h_{o,n}\, 1_{[x_{2n},x_{2n+1}[} + h_{*,n}\, 1_{[x_{2n+1},x_{2n+2}[}).$$

Soient f et g deux fonctions étagées du type précédent. Alors $M(f)M(g)$ est une martingale ssi,

$$f_{o,n} = \left[c - \sum_{k=0}^{n-1} f_{*,k}\,(P^*_k - P^*_{k+1})\right] \frac{P^o_n}{1-x_{2n}}$$

$$g_{*,n} = \left[c' - \sum_{k=0}^{n} g_{o,k}\,(P^o_k - P^o_{k+1})\right] \frac{P^*_n}{1-x_{2n+1}}$$

pour tout $n \ge 0$.

De plus

$$\nu_* = \sum_{k=0}^{\infty} f_{*,k}\,(P^*_k - P^*_{k+1})$$

$$\nu_o = \sum_{k=0}^{\infty} g_{o,k}\,(P^o_k - P^o_{k+1}).$$

La traduction du Théorème 2 est immédiate. Sachant que $q_n = 1-x_n$, si $\limsup_{n\to+\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} P^o_n = \lim_{n\to+\infty} P_n = 0$. On en déduit $\rho_o(1) = \rho_*(1) = 0$.

Ce qui permet de retrouver les résultats de Lépingle. □

Bibliographie

[DG] **Dubins, L.E. ; Gilat, D.** : On the distribution of maxima of martingales. *Proc. of the A.M.S., vol. 68, n° 3, 1978.*

[DMY] **Dellacherie, C. ; Meyer, P.A. ; Yor, M.** : Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO. *Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Maths. vol. 649, Berlin-Heidelberg, New-York, Springer, 98-113, 1978.*

[L] **Lépingle, D.** : Orthogonalité et intégrabilité uniforme de martingales discrètes. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Maths. vol. 1526, Berlin Heidelberg, New-York, Springer, 167-169, 1992.*

[V] **Vallois, P.** : Sur la loi du maximum et du temps local d'une martingale continue. *A paraître dans les Proceedings of the London Math. Soc. 1994.*

[V2] **Vallois, P.** : On the joint distribution of the supremum and the terminal value of a uniformly integrable martingale. *A paraître dans 9th Winterschool on stochastic processes and optimal control, 1992.*