SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC ARNAUDON

Espérances conditionnelles et C-martingales dans les variétés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 300-311

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__300_0>

Espérances conditionnelles et $\mathcal{C}$-martingales dans les variétés

Marc Arnaudon

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France.

Résumé

On donne des critères de convexité sur un compact V d'une variété avec connexion, pour que les espérances conditionnelles des variables aléatoires à valeurs dans V existent.

On définit les $\mathcal{C}$-martingales comme étant les semi-martingales X non nécessairement continues telles que pour toute fonction f convexe sur un voisinage de V, $f(X)$ soit une sous-martingale réelle. Avec des conditions de convexité sur V, on montre que si les martingales réelles de la filtration sont continues, alors les $\mathcal{C}$-martingales de la variété sont continues, et que les $\mathcal{C}$-martingales continues sont des martingales au sens usuel.

On montre que dans une variété riemannienne, ces conditions de convexité sont vérifiées par une boule géodésique fermée de centre p, de rayon inférieur à $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, ne rencontrant pas le cutlocus de p, κ étant un majorant strictement positif des courbures sectionnelles.

1. Introduction

Étant donnés un compact V d'une variété avec connexion, un espace probabilisé filtré et une variable aléatoire L à valeurs dans V, on se propose de trouver des barycentres conditionnels convexes de L. Ce problème a été résolu par Kendall et Picard ([K1] et [P1]) dans des variétés riemanniennes. Ils ont démontré l'existence des espérances conditionnelles exponentielles, apppelées aussi barycentres géodésiques ([P2]). Plus généralement, Picard a défini dans [P2] des barycentres conditionnels dans des variétés avec connexion, qui sont aussi des variables aléatoires. Dans les trois articles cités, les auteurs ont construit des martingales discrètes à partir des espérances conditionnelles, et ont donné des conditions sur la convexité de la variété et sur la filtration, pour que les martingales discrètes convergent vers des vraies martingales lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro. Notre but est plus modeste ici, puisqu'on cherche dans la partie 2 des conditions de convexité sur le compact V pour que les espérances conditionnelles convexes au sens de [E,M] existent. Ces espérances conditionnelles sont des ensembles de variables aléatoires définis à partir des fonctions convexes de la variété. Elles sont reliées aux $\mathcal{C}$-martingales de la façon suivante. Une semi-martingale X est une $\mathcal{C}$-martingale si et seulement si pour tout $s \leq t$, X_s est dans l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$.

Une version précédente de cet article contenait des résultats sur l'existence de $\mathcal{C}$-martingales de valeur terminale L donnée, obtenus en étudiant des suites de martingales discrètes et en utilisant la topologie de Meyer-Zheng. Je tiens à remercier Jean Picard qui m'a signalé une erreur dans une démonstration. Le résultat obtenu se réduit à l'existence de martingales floues $Q_t(\omega)$, qui sont des processus à valeurs dans l'ensemble des probabilités sur le compact V, de valeur terminale la masse de Dirac δ_L, et tels que $Q(f)$ soit une sous-martingale pour toute fonction convexe f. J'espère que cette partie sera l'objet d'un prochain article.

Dans la partie 3, On détermine des conditions de convexité sur le compact V pour que les $\mathcal{C}$-martingales soient continues si les martingales réelles de la filtration sont continues, et pour que les $\mathcal{C}$-martingales continues soient des martingales au sens usuel. Dans les deux cas, il s'agit de construire suffisamment de fonctions convexes sur la variété pour que l'ensemble des $\mathcal{C}$-martingales ne soit pas trop gros. Dans la partie 4, on montre qu'une boule géodésique régulière vérifie ces conditions de convexité. On construit des fonctions convexes sur cet ensemble en utilisant la géométrie convexe, plus précisément la fonction convexe construite par Kendall dans [K2] sur le produit de la boule par elle-même.

2. Définitions et existence des espérances conditionnelles

Prenons la définition de Kendall ([K1] Définition 1.6) des boules géodésiques régulières.

DÉFINITION 2.1. — *Soit $\mathcal{B}$ une boule géodésique fermée de centre p et de rayon r dans une variété riemannienne. On dira que $\mathcal{B}$ est une boule géodésique régulière si $r\sqrt{\kappa} < \frac{\pi}{2}$ et si elle ne rencontre pas le cutlocus de p, κ étant un majorant strictement positif des courbures sectionnelles sur $\mathcal{B}$.*

Soient V un compact d'une variété W munie d'une connexion ∇ et $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1}, P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Si $(x, y) \in W \times W$, on notera $\overrightarrow{xy}$ le vecteur $\exp_x^{-1}(y)$ de T_xW s'il existe et est unique.

DÉFINITION 2.2. — *On dira qu'une semi-martingale X à valeurs dans V est une $\mathcal{C}$-martingale si pour toute fonction f convexe sur un voisinage de V, le processus $f(X)$ est une sous-martingale réelle.*

Les processus continus à valeurs dans W qui sont des martingales au sens usuel seront quelquefois appelés des ∇-martingales.

Si μ est une probabilité sur V, on dira que $x \in V$ est un barycentre convexe de μ si pour toute fonction f convexe sur un voisinage de V, on a $f(x) \leq \mu(f)$. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans V et si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on notera $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ au sens de [E,M], c'est à dire l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{G}$-mesurables Y à valeurs dans V telles que $f \circ Y \leq \mathbb{E}[f \circ X|\mathcal{G}]$ pour toute fonction f convexe sur un voisinage de V.

On dira que les espérances conditionnelles existent dans V si quelle que soit X variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans V, quelle que soit $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$, l'ensemble $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est non vide. On notera (E.c.) cette condition d'existence des espérances conditionnelles. Notons que Kendall a démontré dans [K1] que (E.c.) était vérifiée pour une boule géodésique régulière, en montrant l'existence des barycentres exponentiels conditionnels, qui sont un cas particulier d'espérances conditionnelles telles que nous les avons définies ici.

Nous allons donner un critère géométrique sur V ressemblant au critère d'existence de barycentres exponentiels de [E,M] proposition 4, pour que (E.c.) soit vérifiée.

PROPOSITION 2.3. — *Si le sous-ensemble compact V de W est de la forme $\{\phi \leq 0\}$, avec ϕ convexe de classe C^2 au voisinage de V et si l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ est définie et est de classe C^1 sur un voisinage de $V \times V$, alors la condition (E.c.) est vérifiée.*

Démonstration. — On se donne une métrique riemannienne sur W, dont nous n'utiliserons pas la connexion de Levi-Civita. Les applications exp et la convexité seront relatives à ∇. Il existe un voisinage ouvert V' de V tel que l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ soit lipschitzienne sur $V' \times V'$ pour cette métrique. Soient X une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans V, et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour x dans un sous-ensemble dénombrable dense de V', on définit $v_x = \mathbb{E}\left[\overrightarrow{xX}|\mathcal{G}\right]$. On obtient une application p.s. lipschitzienne en x de constante de Lipschitz C indépendante de ω, on prolonge par continuité et on a ainsi pour presque tout ω un champ de vecteurs $v_{.}(\omega)$ lipschitzien de rapport C sur V'. On peut alors définir pour presque tout ω le groupe à un paramètre $U_t(x)$ qui vérifie pour tout $x \in V'$, $\frac{d}{dt}U_t(x) = v_{U_t(x)}$ et $U_0(x) = x$.

Soient W' un voisinage de V et f une fonction convexe bornée sur W'. Si $y \in W'$, $v \in T_yW'$, on note $\langle df(y), v\rangle$ la dérivée à droite en 0 de la fonction convexe $t \mapsto f(\exp_y(tv))$. La fonction $df(y)$ est convexe sur T_yW' ([E,Z] proposition 1).

Montrons que la fonction $t \mapsto f(U_t(x))$ est dérivable à droite et de dérivée localement bornée, ce qui nous permettra d'affirmer qu'elle est égale à l'intégrale de sa dérivée à droite. Il suffit de démontrer la propriété en 0. Dans une carte locale ψ au voisinage de x, la fonction $f \circ \psi^{-1}$ est la somme d'une fonction convexe g et d'une fonction de classe C^∞ ([E,Z] proposition 1). Notons $h(t) = \psi \circ U_t(x)$, et $y = \psi(x)$. Il suffit de démontrer que $g \circ h$ est dérivable à droite en 0. Comme g est convexe, on a

$$\left\langle dg(y), \frac{h(t) - y}{t} \right\rangle \leq \frac{(g \circ h)(t) - g(y)}{t} \leq \left\langle dg(h(t)), \frac{h(t) - y}{t} \right\rangle.$$

Lorsque $t > 0$ et t tend vers 0, le membre de gauche converge vers $\langle dg(y), h'(0)\rangle$ car $dg(y)$ est continue, tandis que la limite supérieure du membre de droite est inférieure à la même valeur, car la fonction $\langle dg(\cdot), \cdot\rangle$ est semi-continue supérieurement ([R] corollaire 24.5.1). Ceci prouve que $g \circ h$ est dérivable à droite en 0, et on en déduit que $f(U_{.}(x))$ est dérivable à droite, de dérivée $\langle df(U_{.}(x)), v_{U_{.}(x)}\rangle$ localement bornée.

On note $\frac{d}{dt^+}$ la dérivée à droite en t. Si $U_t(x) \in V$, on a

$$\frac{d}{dt^+} f(U_t(x)) = \left\langle df(U_t(x)), \mathbb{E}\left[\overrightarrow{U_t(x)X}|\mathcal{G}\right]\right\rangle \leq \mathbb{E}\left[\langle df(U_t(x)), \overrightarrow{U_t(x)X}\rangle|\mathcal{G}\right].$$

L'inégalité est due à la convexité de $df(U_t(x))$. Comme f composée avec la géodésique joignant $U_t(x)$ à X est convexe, on obtient

$$\frac{d}{dt^+} f(U_t(x)) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] - f(U_t(x)).$$

Une première conséquence est que si on applique cette inégalité à ϕ et à un instant t_0 tel que $U_{t_0}(x) \in \{\phi = 0\}$, alors on obtient $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\phi(U_t(x)) \leq 0$. Cela permet de dire que si $x \in V$, alors $U_t(x)$ est défini et reste dans V pour tout t.

Soit $x \in V$. On aimerait que $U_t(x)$ converge vers un élément de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ lorsque t tend vers $+\infty$. On aura seulement une propriété plus faible qui nous suffira. L'ensemble V est un espace polonais compact, donc l'ensemble des variables aléatoires floues sur V est compact (pour la topologie qui sera décrite plus loin), et on peut extraire de toute suite de tels objets une sous-suite convergente, ([J,M] corollaire (3.9) et proposition (3.18)). Soit donc $(U_{t_n}(x))$ une suite convergeant vers la variable aléatoire floue $P(d\omega)Q(\omega,\cdot)$. Soit F son support (pour presque tout ω, la coupe F_ω est le support de $Q(\omega,\cdot)$, [J,M] proposition 3.13). D'après [J,M] proposition 3.15, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que ω p.s., la coupe F_ω est l'ensemble des points limites de la suite $(U_{t_n}(x)(\omega))$.

Soit $\omega \mapsto Y(\omega)$ une section $\mathcal{G}$-mesurable de F. Montrons que $Y \in \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Soit f une fonction convexe sur un voisinage de V. Il faut montrer que $f(Y) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]$. Comme Y est un point limite de $(U_{t_n}(x))$, on a

$$f(Y) \leq \limsup_{t\to\infty} f(U_t(x)).$$

De plus, l'inégalité sur la dérivée à droite de $f(U_t(x))$ permet d'écrire d'après le lemme de Gronwall

$$f(U_t(x)) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] + \left(\sup_V f - \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\right) e^{-t}$$

ce qui donne $\limsup_{t\to\infty} f(U_t(x)) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]$. On obtient $f(Y) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]$, ce qui achève la démonstration. $\square$

On obtient aussi la condition (E.c.) avec des hypothèses géométriques plus faibles, mais en imposant des conditions sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

PROPOSITION 2.4. — *On suppose que pour toute probabilité μ sur V, l'ensemble des barycentres convexes de μ n'est pas vide, et qu'il existe des lois conditionnelles sur Ω relativement à n'importe quelle sous-tribu de $\mathcal{F}$.*

Alors la condition (E.c.) d'existence des espérances conditionnelles est vérifiée.

Remarque. — D'après [D,M] III 72, la condition sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est réalisée lorsque Ω est un espace lusinien, et $\mathcal{F}$ est la complétée de sa tribu borélienne pour la probabilité P. Ces hypothèses sont vérifiées pour la plupart des espaces canoniques.

Commençons par démontrer un lemme d'approximation des fonctions convexes définies sur un voisinage de V.

Lemme 2.5. — *Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions convexes définies sur des voisinages de V, telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction f convexe sur un voisinage de V, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_V |f - f_n| < \varepsilon$.*

Démonstration du lemme. — On choisit sur W une distance riemannienne d quelconque, et on considère un ouvert relativement compact W_0 contenant V. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$ différent de 0, on définit

$$W_p = \left\{ x \in W,\ d(x,V) < \frac{1}{p} \right\} \cap W_0.$$

Alors tout voisinage de V contient un $\overline{W}_p$. On choisit dans chaque compact $\overline{W}_p$ une suite dense pour la norme uniforme $(g_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues, et on considère la suite $(h_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des plus grandes minorantes convexes de leurs restrictions à W_p ([E,M] lemme 1). Par un procédé de diagonalisation, on obtient une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions convexes.

Soient f une fonction convexe définie sur un voisinage W' de V, et $\varepsilon > 0$. Il existe un p tel que $\overline{W}_p$ soit inclus dans W', et n' tel que $\sup_{\overline{W}_p} |f - g_{p,n'}| < \varepsilon$. Cela implique que $\sup_{W_p} |f - h_{p,n'}| < \varepsilon$, puisque $g_{p,n'}$ est supérieure à $f - \varepsilon$ qui est elle-même convexe. La fonction $f_n = h_{p,n'}$ répond à la question. $\square$

Démonstration de la proposition. — On reprend les notations du lemme.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans V et $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on définit l'ensemble $b_n(\mathcal{L}(X|\mathcal{G}))$ inclus dans $\Omega \times V$ comme étant l'ensemble des (ω, x) tels que $f_n(x) \le \mathbb{E}[f_n(X)|\mathcal{G}]$, et on définit $b(\mathcal{L}(X|\mathcal{G})) = \cap_n b_n(\mathcal{L}(X|\mathcal{G}))$. En raison de l'existence des lois conditionnelles, ces ensembles ne sont pas vides et contiennent les barycentres convexes des lois conditionnelles. Ils sont mesurables pour le produit de $\mathcal{G}$ et la tribu borélienne de V. Montrons que l'on obtient une espérance conditionnelle avec une section $\mathcal{G}$-mesurable $\omega \mapsto Y(\omega)$ de $b(\mathcal{L}(X|\mathcal{G}))$. Soit f une fonction convexe sur un voisinage de V. Il faut montrer que $f(Y) \le \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]$. Or f est limite uniforme sur V d'une suite de fonctions f_{n_k} pour lesquelles l'inégalité est vraie. On en déduit que f la vérifie aussi. $\square$

Remarques. — Si μ est une probabilité sur le compact V, on note $b(\mu)$ l'ensemble des barycentres convexes de μ. Si on avait défini $b(\mathcal{L}(X|\mathcal{G}))$ comme étant l'union des coupes $b(\mathcal{L}(X|\mathcal{G})(\omega))$, on n'aurait pas obtenu la mesurabilité du premier ensemble, et on n'aurait pas pu choisir une section mesurable.

3. Convexité de la variété et régularité des $\mathcal{C}$-martingales

3.1. Une condition pour que les C-martingales soient continues

On suppose que pour tout $(x,y) \in V \times V$ tel que $x \neq y$, il existe une fonction convexe f sur un voisinage de V telle que $f(x) < f(y)$.

Nous noterons (Cr) cette condition d'existence de fonctions convexes. Il sera démontré dans la partie 4 que la boule géodésique régulière vérifie (Cr).

LEMMME 3.1. — *La condition (Cr) est équivalente à l'existence d'une suite $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ d'ouverts de V tels que pour tout $(x,y) \in V \times V$ vérifiant $x \neq y$, il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ et une fonction convexe f sur un voisinage de V tels que*

$$x \in U_n,\ y \in U_{n'},\ et\ \sup_{U_n} f < \inf_{U_{n'}} f.$$

En particulier, si (Cr) est vraie, on peut choisir les fonctions f de la condition (Cr) à l'intérieur d'un ensemble dénombrable.

Démonstration du lemme. — Notons (Cr') la condition énonçée dans le lemme. Il est immédiat que (Cr') implique (Cr). Montrons que (Cr) implique (Cr'). On choisit une base $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ d'ouverts de la topologie de V. Soit $(x,y) \in V \times V$ tel que $x \neq y$. D'après (Cr), il existe f convexe sur un voisinage de V telle que $f(x) < f(y)$. On choisit des réels a et b tels que $f(x) < a < b < f(y)$, un ouvert U_n contenant x tel que $U_n \subset \{z, f(z) < a\}$, et un ouvert $U_{n'}$ contenant y tel que $U_{n'} \subset \{z, f(z) > b\}$. On obtient bien la condition recherchée. ▯

PROPOSITION 3.2. — *Si toutes les martingales réelles de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ sont continues et si le compact V vérifie la condition (Cr), alors les C-martingales de V sont continues.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde en utilisant la condition du lemme, équivalente à (Cr). Soit X une $\mathcal{C}$-martingale. Si $P(\exists t,\ X_{t-} \neq X_t) > 0$, alors il existe n, n' et une fonction f avec les propriétés écrites plus haut, tels que $P(\exists t,\ X_{t-} \in U_{n'}$ et $X_t \in U_n) > 0$. Or $f(X)$ est une sous-martingale réelle qui se décompose en une somme d'une martingale réelle continue d'après l'hypothèse sur la filtration, et d'un processus croissant dont les sauts s'écrivent $\sum_t (f(X_t) - f(X_{t-}))$, ce qui implique que presque sûrement, pour tout t, $f(X_t) - f(X_{t-})$ soit positif ou nul. L'hypothèse $\sup_{U_n} f < \inf_{U_{n'}} f$ implique donc que $P(\exists t,\ X_{t-} \in U_{n'}$ et $X_t \in U_n) = 0$, ce qui donne la contradiction recherchée. ▯

3.2. Conditions pour que les C-martingales continues soient des ∇-martingales.

On notera (Aff) la condition d'existence pour tous $a \in V$ et $\lambda \in T^*_a W$ d'une fonction f convexe de classe C^2 sur un voisinage de V telle que $df(a) = \lambda$ et $\mathrm{Hess}\, f(a) = 0$.

Nous montrerons dans la partie 4 qu'elle est vérifiée par la boule géodésique régulière. Nous allons énoncer une condition (Aff'), démontrer ensuite qu'elle est plus faible que (Aff), puis montrer que lorsqu'elle est réalisée, les $\mathcal{C}$-martingales continues sont des ∇-martingales.

La condition (Aff') demande qu'il existe une métrique riemannienne g sur la variété W (nous n'utiliserons jamais la connexion de Levi-Civita de g; la convexité et les hessiennes seront toujours relatives à ∇), telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(U_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}$ de V et pour chaque n une famille finie $(f_i^\varepsilon)_{i\in I_n^\varepsilon}$ de fonctions convexes de classe C^2 sur un voisinage de V, telles que pour tout n, pour tout $x \in U_n^\varepsilon$, on ait d'une part pour tout $i \in I_n^\varepsilon$,

$$\operatorname{Hess} f_i^\varepsilon(x) \leq \varepsilon g(x),$$

et d'autre part pour tout $\lambda \in T_x^*W$ de norme 1, il existe $i \in I_n^\varepsilon$ tel que

$$\|df_i^\varepsilon(x) - \lambda\| \leq \varepsilon$$

(si f est de classe C^2, l'application $\operatorname{Hess} f$ désigne ∇df).

La première condition demande que pour $i \in I_n^\varepsilon$, les f_i^ε soient presque affines sur U_n^ε, et la deuxième demande que les df_i^ε approchent uniformément les formes linéaires de norme 1 sur U_n^ε lorsque i parcourt l'ensemble fini I_n^ε.

LEMME 3.3. — *La condition (Aff) implique (Aff').*

Démonstration. — On suppose que (Aff) est réalisée. Soit g une métrique riemannienne quelconque sur la variété (dont nous n'utiliserons pas la connexion de Levi-Civita) et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $a \in V$, on choisit une famille $(\lambda_a^1, \ldots, \lambda_a^n)$ d'éléments de T_a^*W de norme 1 tels que pour tout $\lambda_a \in T_a^*W$ de norme 1, il existe j tel que $\|\lambda_a^j - \lambda_a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout j, on peut choisir d'après (Aff) une fonction convexe $f_{j,a}^\varepsilon$ sur un voisinage de V telle que $df_{j,a}^\varepsilon(a) = \lambda_a^j$ et $\operatorname{Hess} f_{j,a}(a) = 0$. Il existe un ouvert $U^\varepsilon(a)$ contenant a tel que pour tout x appartenant à cet ouvert, on ait d'une part pour tout j, $\operatorname{Hess} f_{j,a}(x) < \varepsilon g(x)$ et d'autre part pour tout $\lambda \in T_x^*W$ de norme 1, il existe j tel que $\|df_{j,a}^\varepsilon(x) - \lambda\| < \varepsilon$. On recouvre V par une famille finie d'ouverts de la forme $U^\varepsilon(a)$, et pour chaque élément de cette famille, on prend les $f_{j,a}^\varepsilon$ correspondantes. La condition (Aff') est alors réalisée. $\square$

PROPOSITION 3.4. — *Si le compact V vérifie la condition (Aff'), alors les $\mathcal{C}$-martingales continues sont des ∇-martingales.*

Démonstration. — Soit X une $\mathcal{C}$-martingale continue. On note $d\widetilde{X}$ le drift de X (en coordonnées locales, si X^l se décompose en $M^l + A^l$ avec M^l martingale et A^l processus à variation finie, et si les Γ_{lj}^k désignent les symboles de Christoffel, alors $d\widetilde{X}$ s'écrit $(dA^k + \frac{1}{2}\Gamma_{lj}^k(X)d\langle X^l, X^j\rangle)D_k$). Il suffit de démontrer que

$$\int_0^1 \|d\widetilde{X}\| \leq \alpha \int_0^1 g(dX, dX)$$

pour tout $\alpha > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après [E (3.5)], on peut se contenter de démontrer que

$$\int_S^T \|d\widetilde{X}\| \leq \alpha \int_S^T g(dX, dX)$$

pour S et T temps d'arrêts tels que le processus X soit dans l'un des U_n^ε entre les instants S et T.

Puisque pour tout $i \in I_n^\varepsilon$, le processus $f_i^\varepsilon(X)$ est une sous-martingale, et que la différentielle de sa partie à variation finie est

$$\langle df_i^\varepsilon(X), d\widetilde{X}\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Hess} f_i^\varepsilon(dX, dX),$$

on a pour tout processus K positif mesurable borné,

$$\int_S^T K_t\langle df_i^\varepsilon(X), d\widetilde{X}\rangle_t \geq -\frac{\varepsilon}{2}\int_S^T K_t g(dX, dX).$$

Or il existe un processus prévisible L à valeurs dans TV, au dessus de X, de norme 1, tel que $d\widetilde{X} = L\|d\widetilde{X}\|$. Posons $\lambda = g(L,\cdot)$. Soit $j(t,\omega)$ un processus prévisible à valeurs dans I_n^ε, tel que $\|df_j^\varepsilon(X) - (-\lambda)\| < \varepsilon$. En choisissant $K_t^i = 1_{\{i=j(t,\omega)\}}$, on obtient $\sum_{i\in I_n^\varepsilon} K_t^i = 1$, ce qui donne

$$\int_S^T \sum_{i\in I_n^\varepsilon} K_t^i\langle df_i^\varepsilon(X), d\widetilde{X}\rangle_t \geq -\frac{\varepsilon}{2}\int_S^T g(dX, dX).$$

Or $\|\sum_{i\in I_n^\varepsilon} K_t^i df_i^\varepsilon(X) + \lambda\| < \varepsilon$, donc

$$\int_S^T \sum_{i\in I_n^\varepsilon} K_t^i\langle df_i^\varepsilon(X), d\widetilde{X}\rangle_t \leq (1-\varepsilon)\int_S^T -\|d\widetilde{X}\|,$$

et en définitive

$$\int_S^T \|d\widetilde{X}\| \leq \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\int_S^T g(dX, dX).$$

Cela donne le résultat escompté. $\square$

4. Une boule géodésique régulière vérifie toutes les propriétés souhaitées

Nous allons démontrer que la variété $\mathcal{B}$, qui est la boule géodésique régulière de la définition 2.1, vérifie (Cr) et (Aff). Nous utiliserons le fait que $\mathcal{B}$ est incluse dans l'intérieur $\mathcal{B}'$ d'une boule géodésique régulière $\mathcal{B}''$ de rayon ρ. On pourra supposer que les courbures sectionnelles de $\mathcal{B}''$ sont aussi majorées par le réel κ de la définition 2.1. Nous noterons g la métrique riemannienne, et δ la distance induite par cette métrique.

Dans [K2], Kendall a démontré l'existence de fonctions convexes positives de classe C^∞ sur $\mathcal{B}'' \times \mathcal{B}''$, strictement convexes en dehors de la diagonale. Nous allons utiliser l'une d'entre elles pour définir la famille de fonctions qui suit. Soit $h = \cos(\sqrt{\kappa}\rho)$, et *soit ν un réel strictement supérieur à* $\frac{4}{h^4}$. Posons pour $a, x \in \mathcal{B}''$,

$$\phi_a(x) = \left(\frac{1-\cos(\sqrt{\kappa}\delta(a,x))}{\cos(\sqrt{\kappa}\delta(p,a))\cos(\sqrt{\kappa}\delta(p,x)) - \frac{h^2}{2}}\right)^{\nu+1}.$$

LEMME 4.1. — *Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tous $a, x \in \mathcal{B}''$ vérifiant $\delta(a,x) \geq \varepsilon$, on a*

$$\operatorname{Hess} \phi_a(x) \geq (1 - \cos\sqrt{\kappa}\varepsilon)^{\nu} \kappa g(x).$$

La preuve de ce lemme est empruntée à Kendall [K2], qui fait une démonstration plus générale, puisqu'il démontre la convexité stricte en dehors de la diagonale de la fonction des deux variables a et x. Nous faisons tout de même ici la démonstration, car nous ne pouvons pas utiliser tel quel le théorème 3 de [K2].

Démonstration du lemme. — Soit γ une géodésique de $\mathcal{B}''$ vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\dot\gamma(0) = u$. Posons

$$p(t) = 1 - \cos\sqrt{\kappa}\delta(a,\gamma(t)), \qquad q(t) = \cos(\sqrt{\kappa}\delta(p,a))\cos(\sqrt{\kappa}\delta(p,\gamma(t))) - k^2$$

avec $k = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$, et

$$\psi(t) = \frac{p(t)}{q(t)}, \qquad \phi(t) = \psi(t)^{\nu+1} = (\phi_a \circ \gamma)(t).$$

Dans cette démonstration, pour simplifier les écritures, on notera p, q, ψ, ϕ, p',..., ϕ'' pour désigner respectivement $p(0)$, $q(0)$, $\psi(0)$, $\phi(0)$, $p'(0), \ldots$, $\phi''(0)$.

Puisque γ est une géodésique, on a

$$\operatorname{Hess} \phi_a(u,u) = \phi''.$$

Nous allons donc calculer cette quantité. L'égalité

$$\psi'(t) = \frac{p'(t) - \psi(t)q'(t)}{q(t)}$$

donne

$$\psi'' = \frac{p'' - \psi q''}{q} - 2\frac{\psi' q'}{q}.$$

Si pour $z, y \in \mathcal{B}''$, $f_z(y) = \cos\sqrt{\kappa}\delta(z,y)$, alors $\operatorname{Hess} f_z + \kappa f_z g \leq 0$ (voir par exemple [P1] lemme 1.2.1). On en déduit que

$$p'' \geq (1-p)\kappa\|u\|^2$$

car $\operatorname{Hess}(1 - \cos\sqrt{\kappa}\delta(a,x)) = p''$, et que

$$-\psi q'' \geq \psi(q + k^2)\kappa\|u\|^2$$

car $\operatorname{Hess} \cos(\sqrt{\kappa}\delta(p,a))\cos(\sqrt{\kappa}\delta(p,x)) = q''$. Cela donne

$$\psi'' \geq \frac{1 + \psi k^2}{q}\kappa\|u\|^2 - 2\frac{\psi' q'}{q}.$$

On peut maintenant minorer ϕ''. De l'égalité

$$\phi'' = (\nu+1)\psi^{\nu}\Big(\nu\frac{\psi'^2}{\psi} + \psi''\Big),$$

on tire

$$\phi'' \geq (\nu+1)\psi^{\nu}\Big(\nu\frac{\psi'^2}{\psi} - 2\frac{q'}{q}\psi' + \frac{1+\psi k^2}{q}\kappa\|u\|^2\Big).$$

Le terme à l'intérieur de la parenthèse que nous appellerons A, considéré comme fonction polynômiale du second degré en ψ', atteint son minimum en $\dfrac{\psi q'}{\nu q}$. Il est alors égal à

$$-\frac{\psi q'^2}{\nu q^2} + \frac{1+\psi k^2}{q}\kappa\|u\|^2.$$

Or l'égalité $q' = -\sqrt{\kappa}\cos\sqrt{\kappa}\delta(p,a)\sin\sqrt{\kappa}\delta(p,x)\langle d\delta(p,x),u\rangle$ donne la majoration $q'^2 \leq \kappa\|u\|^2$, et on obtient

$$A \geq \Big(\frac{1+\psi k^2}{q} - \frac{\psi}{\nu q^2}\Big)\kappa\|u\|^2.$$

Cela s'écrit encore

$$A \geq \Big(\frac{1}{q} + \frac{\psi}{q}\big(k^2 - \frac{1}{\nu q}\big)\Big)\kappa\|u\|^2.$$

Comme $1 \geq q \geq h^2 - k^2 = \dfrac{h^2}{2}$ et $\nu h^4 > 4$, on a

$$A \geq \frac{\kappa}{q}\|u\|^2 \geq \kappa\|u\|^2.$$

On peut minorer ψ par $1-\cos\sqrt{\kappa}\varepsilon$, donc on obtient

$$\phi'' \geq (\nu+1)(1-\cos\sqrt{\kappa}\varepsilon)^{\nu}\kappa\|u\|^2 \geq (1-\cos\sqrt{\kappa}\varepsilon)^{\nu}\kappa\|u\|^2$$

et en définitive

$$\operatorname{Hess}\phi_a(x) \geq (1-\cos\sqrt{\kappa}\varepsilon)^{\nu}\kappa g(x).$$

$\square$

LEMME 4.2. — *Il existe un réel positif A tel que les fonctions $h_a(x) = \big(1-\cos\sqrt{\kappa}\delta(a,x)\big)^{\frac{3}{2}} + A\phi_a(x)$ soient convexes sur B'', et tel qu'il existe des constantes $c>0$ et $C>0$ vérifiant pour tous $a, x \in B''$,*

$$c\delta(a,x)g(x) \leq \operatorname{Hess} h_a(x) \leq C\delta(a,x)g(x).$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que les h_a sont de classe C^2, avec des dérivées jusqu'à l'ordre 2 qui s'annulent en a. Nous allons démontrer d'abord l'existence de A tel que la première inégalité soit vérifiée. Pour cela, nous allons faire la démonstration lorsque $0 < \delta(a,x) \leq \frac{\pi}{3\sqrt{\kappa}}$, et ensuite pour $\delta(a,x) \geq \frac{\pi}{3\sqrt{\kappa}}$. Puisque ϕ_a est convexe, il suffit dans le premier cas de démontrer qu'il existe $c > 0$ tel que $c\delta(a,\cdot)g(\cdot) \leq \operatorname{Hess}\left(1 - \cos\sqrt{\kappa}\delta(a,\cdot)\right)^{\frac{3}{2}}$. D'après [P1] lemme 1.2.1, les fonctions $f_a(x) = \cos\sqrt{\kappa}\delta(a,x)$ vérifient $\operatorname{Hess} f_a + \kappa f_a g \leq 0$. Pour $x \neq a$,

$$\operatorname{Hess}\left(1 - \cos\sqrt{\kappa}\delta(a,x)\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{1 - f_a(x)}\operatorname{Hess}(1 - f_a)(x) + \frac{3}{4\sqrt{1 - f_a(x)}} d(1 - f_a)(x) \otimes d(1 - f_a)(x).$$

Il existe $c'' > 0$ tel que pour tous a, x vérifiant $0 < \delta(a,x) \leq \frac{\pi}{3\sqrt{\kappa}}$, on ait $\sqrt{1 - f_a}(x) \geq c''\delta(a,x)$. De l'inégalité vérifiée par $\operatorname{Hess} f_a$, on déduit que $\operatorname{Hess}(1 - f_a)(x) \geq \kappa(\cos\frac{\pi}{3})g(x)$, donc il existe une constante $c > 0$ que l'on peut choisir indépendante de a, telle que si $\delta(a,x) \leq \frac{\pi}{3\sqrt{\kappa}}$, on ait

$$c\delta(a,x)g(x) \leq \operatorname{Hess} h_a(x).$$

Démontrons ensuite l'existence de A tel que la première inégalité soit vérifiée lorsque $\delta(a,x) \geq \frac{\pi}{3\sqrt{\kappa}}$. En raison de la minoration uniforme de $1 - f_a$ et de $\operatorname{Hess}(1 - f_a)$, il existe un réel positif M tel que pour tous a, x, on ait $\operatorname{Hess}\left(1 - \cos\sqrt{\kappa}\delta(a,x)\right)^{\frac{3}{2}} \geq -Mg(x)$. Or d'après le lemme (4.1), si $\delta(a,x) \geq \frac{\pi}{3\sqrt{\kappa}}$, alors on a la minoration $\operatorname{Hess}\phi_a(x) \geq \frac{\kappa}{2^\nu}g(x)$. Notons $m = \frac{\kappa}{2^\nu}$. Si on choisit A tel que $Am - M > 0$ et $c > 0$ tel que $c < \frac{(Am - M)\sqrt{\kappa}}{\pi}$, alors on a l'inégalité

$$c\delta(a,x)g(x) \leq \operatorname{Hess} h_a(x).$$

Il reste à démontrer la deuxième inégalité. Le premier terme de la décomposition de $\operatorname{Hess}\left(1 - \cos\sqrt{\kappa}\delta(a,x)\right)^{\frac{3}{2}}$ se majore aisément, car il existe une constante C'' telle que $\sqrt{(1 - f_a)}(x) < C''\delta(a,x)$ pour tout a, x, et les $\operatorname{Hess}(1 - f_a)$ sont uniformément bornés. Pour majorer le deuxième terme, il suffit de constater que les $\|d(1 - f_a)(x)\|$ sont majorés par $C'\delta(a,x)$ avec une constante C' uniforme. Il reste à majorer $\operatorname{Hess}\phi_a(x)$. Ecrivons $\phi_a(x) = \left(\psi_a(x)\right)^{\nu+1}$. On a

$$\operatorname{Hess}\phi_a(x) = (\nu+1)\psi_a(x)^\nu \operatorname{Hess}\psi_a(x) + (\nu+1)\nu\psi_a(x)^{\nu-1} d\psi_a(x) \otimes d\psi_a(x).$$

Les applications $\operatorname{Hess}\psi_a$ et $d\psi_a$ sont uniformément bornées, la constante ν est supérieure à 4 et il existe une constante M telle que pour tous a, x, on ait $\psi_a(x) \leq M\delta^2(a,x)$. On déduit de ces majorations et de l'égalité plus haut qu'il existe une constante M' telle que pour tous a, x, on ait $\operatorname{Hess}\phi_a(x) \leq M'\delta^2(a,x) \leq M'\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\delta(a,x)$. Ceci achève la démonstration de la deuxième inégalité. $\square$

PROPOSITION 4.3. — *La boule géodésique régulière $\mathcal{B}$ vérifie la condition (Cr) de la partie 3.1.*

Démonstration. — Soit $(x, y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ tel que $x \neq y$. La fonction convexe h_x définie sur $\mathcal{B}'$, vérifie $h_x(x) = 0$ et $h_x(y) > 0$, donc répond à la question. ▯

LEMME 4.4. — *Il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout $a \in V$ et toute forme $\lambda_a \in T_a^*W$ de norme 1, les fonctions $x \mapsto l^{\lambda_a}(x) = \lambda_a\left(\exp_a{}^{-1}(x)\right) + Kh_a(x)$ soient convexes sur $\mathcal{B}''$.*

Démonstration. — Il suffit de constater qu'il existe une constante K' positive, telle que pour tout λ_a, x, on ait $\operatorname{Hess} \lambda_a \left(\exp_a{}^{-1}(x)\right) \geq -K'\delta(a, x)g(x)$. On pose alors $K = \dfrac{K'}{c}$, c étant la constante du lemme (4.2). ▯

PROPOSITION 4.5. — *La boule géodésique régulière $\mathcal{B}$ vérifie la condition (Aff) de la partie 3.2.*

Démonstration. — Soient $a \in V$ et $\lambda_a \in T_a^*W$ différente de 0. La fonction $f = \|\lambda_a\| l^{\frac{\lambda_a}{\|\lambda_a\|}}$, définie sur $\mathcal{B}'$ vérifie bien $df(a) = \lambda_a$ et $\operatorname{Hess} f(a) = 0$. ▯

RÉFÉRENCES.

[D,M] Dellacherie (C.), Meyer (P.A.). — *Probabilités et Potentiel, volumes A et B.* — Hermann.

[E] Emery (M.). — *Stochastic calculus in manifolds.* — Springer, 1989.

[E,M] Emery (M.), Mokobodzki (G.). — *Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété,* Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1485, Springer, 1991.

[E,Z] Emery (M.), Zheng (W.). — *Fonctions convexes et semi-martingales dans une variété,* Séminaire de Probabilités XVIII, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1059, Springer, 1984.

[J,M] Jacod (J.), Mémin (J.). — *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité,* Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Mathematics, Vol 850, Springer, 1979–80.

[K1] Kendall (W.S.). — *Probability, convexity and harmonic maps with small image I : uniqueness and fine existence,* Proc. London Math. Soc. (3), t. **61**, 1990, p. 371–406.

[K2] Kendall (W.S.). — *Convexity and the hemisphere,* J. London Math. Soc. (2), t. **43**, 1991, p. 567–576.

[P1] Picard (J.). — *Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limit,* J. Functional Anal. 99, t. **2**, 1991, p. 223–261.

[P2] Picard (J). — *Barycentres et martingales sur une variété,* Preprint, 1993.

[R] Rockafellar (R.T.). — *Convex analysis.* — Princeton University Press, 1970.