JEAN BERTOIN

Une preuve simple du théorème de Shimura sur les points méandre du mouvement brownien plan

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 33-35
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__33_0>

UNE PREUVE SIMPLE DU THÉORÈME DE SHIMURA SUR LES POINTS MÉANDRE DU MOUVEMENT BROWNIEN PLAN

Jean BERTOIN

Soient $Z = (X,Y)$ un mouvement brownien plan issu de l'origine, et $\theta \in]0,2\pi[$ un angle fixé. On note $X' = \cos(\theta)X + \sin(\theta)Y$, la composante de Z dans la direction θ , et on dit qu'un instant $t > 0$ est point méandre s'il existe $\varepsilon \in]0,t[$ tel que

$$X_t \le X_s \quad \text{et} \quad X'_t \le X'_{s'} \quad \text{pour tout} \quad s \in [t,t+\varepsilon] \quad \text{et tout} \quad s' \in [t-\varepsilon,t] .$$

L'objet de cette note est de proposer une preuve simple du joli résultat suivant, dû à Shimura [3].

Théorème (Shimura). *La probabilité qu'il existe un point méandre est nulle.*

Dans le cas où $\theta = \pi$, le Théorème énonce que le mouvement brownien réel X ne croît jamais, ce qui est dû à Dvoretzky, Erdös et Kakutani [1]. Aussi, nous supposerons désormais que $\theta \neq \pi$. La démonstration de Shimura repose sur des arguments élémentaires semblables à ceux de [1], et est assez difficile à suivre. Notre preuve est plus directe, mais utilise des résultats fins de David Williams [5] sur le mouvement brownien réel, et de Varadhan et Ruth Williams [4] sur le mouvement brownien réfléchi dans un cône. Les arguments sont très proches de ceux de Le Gall [2].

Soit ζ , une v.a. exponentielle indépendante de moyenne 2, indépendante de Z . Nous tuons Z au temps ζ , et introduisons pour $t < \zeta$:

$$J_t = \inf\{X_s \ , \ s \in [t,\zeta[\} \ , \ I'_t = \inf\{X'_s \ , \ s \le t\} .$$

Clairement, il suffit de montrer:

$$(*) \qquad \mathbb{P}(\exists\ t \in]0,\zeta[\ : X_t = J_t \ \text{ et } \ X'_t = I'_t) = 0 .$$

Le Lemme suivant est implicite dans le travail de D. Williams, il découle aisément du Théorème 4.5 de [5] par retournement du temps.

Lemme. *Il existe β , un mouvement brownien réel avec drift +1 issu de J_0 et indépendant de Y , dont le processus supremum est noté*

$$\sigma_t = \sup\{\beta^+_s : s \le t\}$$

(β^+ désigne la partie positive de β), et tel que

$$X_t - J_t = \sigma_t - \beta_t \quad \textit{et} \quad J_t = \sigma_t + J_0 \quad \textit{pour} \quad t < \zeta .$$

Remarque. La filtration naturelle de β contient strictement celle de X . On peut sans doûte aussi montrer le Lemme en utilisant la théorie du grossissement de filtration.

Preuve du Théorème. Notons $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité donnée par

$$d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = \exp\{J_0 - \beta_t + \frac{1}{2}\, t\}\, d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t} ,$$

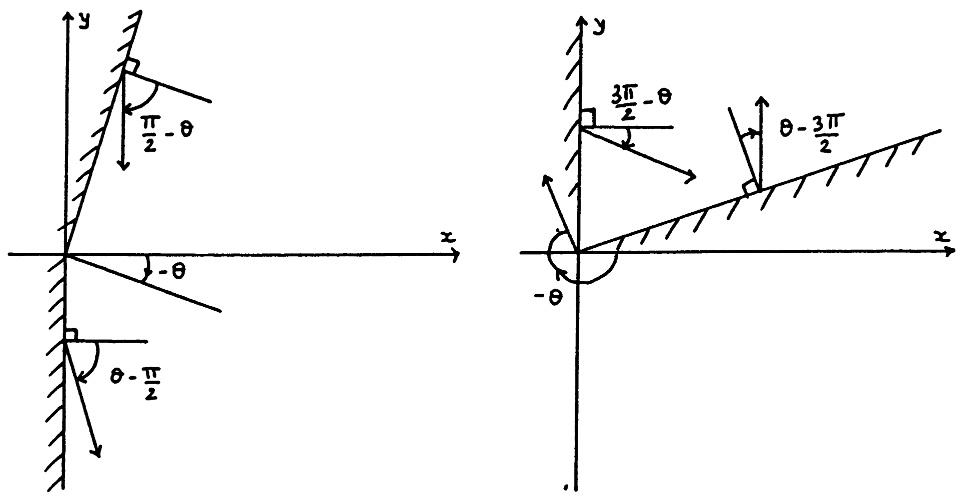
où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ désigne la filtration naturelle de (β, Y) . Ainsi, d'après le théorème de Girsanov, (β, Y) est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien plan. Soit $W = (W^1, W^2)$, le processus défini par les relations

$$X - J = W^1 \quad \text{et} \quad X' - I' = \cos(\theta)W^1 - \sin(\theta)W^2 .$$

Nous déduisons du Lemme:

$$W = (-J_0 \, , \, \operatorname{cotan}(\theta)J_0) + (\sigma \, , \, \frac{I'}{\sin(\theta)} - \operatorname{cotan}(\theta)\sigma) + (-\beta \, , \, -Y) .$$

En particulier, W s'exprime comme la somme de sa position initiale, d'un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$ qui ne varie que lorsque W atteint le bord du cône $\mathcal{C} = \{x \geq 0 \text{ et } \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \geq 0\}$, et enfin d'un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Autrement dit, sous $\mathbb{Q}$, W est un mouvement brownien réfléchi dans $\mathcal{C}$. De plus, les angles de réflexion par rapport à la normale entrante sur les deux demi-droites qui bordent $\mathcal{C}$ (les angles positifs étant en direction du sommet du cône), sont opposés. Voir les figures ci-dessous. D'après Varadhan et R. Williams [4], W ne visite pas $(0,0)$, $\mathbb{Q}$-p.s. Les lois $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ étant équivalentes sur chaque $\mathcal{F}_t$, ceci établit $(*)$. □



$0 < \theta < \pi$ $\qquad\qquad$ $\pi < \theta < 2\pi$

Angles de réflexion sur les bords du cône $\mathcal{C}$.

Références

[1] A. Dvoretzky, P. Erdös et S. Kakutani: Nonincrease everywhere of the Brownian motion process, *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. II* (1961), 103-116.

[2] J.F. Le Gall: Mouvement brownien, cônes et processus stables, *Prob. Th. Rel. Fields* 76 (1987), 587-627.

[3] M. Shimura: Meandering points of two-dimensional Brownian motion, *Kodai J. Math.* 11 (1988), 169-176.

[4] S.R.S. Varadhan et R.J. Williams: Brownian motion in a wedge with oblique reflection, *Commun. Pure Appl. Math.* 38 (1985), 405-443.

[5] D. Williams: Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, *Proc. London Math. Soc.* 28 (1974), 738-768.

J. Bertoin
Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI
4, Place Jussieu
Tour 56 - 3 ème étage
75272 Paris Cedex 05