SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

Représentation d'un semigroupe d'opérateurs sur un espace L^1 par des noyaux. Remarques sur deux articles de S.E. Kuznetsov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 304-311
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__304_0>

REPRESENTATION D'UN SEMI-GROUPE D'OPERATEURS SUR UN ESPACE L^1 PAR DES NOYAUX. REMARQUES SUR DEUX ARTICLES DE S.E. KUZNETSOV

par Gabriel MOKOBODZKI

Dans un article récent [4], S.E. KUZNETSOV établit l'existence d'un semi-groupe dual d'un semi-groupe mesurable, la dualité étant considérée par rapport à une mesure excessive au sens faible de la théorie du potentiel. Nous montrons dans ce travail qu'on peut notablement affaiblir les hypothèses en utilisant des méthodes classiques de compactification à la RAY-KNIGHT, un peu de théorie ergodique, un argument essentiel de restriction de l'espace d'états dû à KUZNETSOV lui-même, sans pour autant faire appel aux méthodes s'appuyant sur le retournement du temps ou à des procédés analogues. On établira pour cela le théorème suivant :

THEOREME. *Soient $(E,\mathcal{B})$ un espace lusinien muni de sa tribu borélienne, $m \geq 0$ une mesure sur $(E,\mathcal{B}), (P_t)_{t>0}$ un semi-groupe à contraction sur $L^1(X,\mathcal{B},m)$ vérifiant les conditions suivantes :*

1) $P_t 1 \leq 1 \;\; \forall\, t; P_t f \geq 0$ si $f \geq 0$

2) m est excessive : $\forall\, f \in L^1_+(m), \int f dm = \sup\limits_t \int P_t f dm$

3) le semi-groupe est fortement continu sur $R^+ \setminus \{0\}$. i.e. $\forall\, f \in L^1(m)$, l'application $t \to P_t f$ est continue en norme.

Sous ces hypothèses, il existe un semi-groupe $(Q_t)_{t>0}$ de vrais noyaux sur $(E,\mathcal{B})$, sous markoviens, tels que pour toute $f \in \mathcal{L}^1(m), Q_t f$ soit un représentant de $P_t f$.

Première étape : Construction d'une famille résolvante de noyaux.

On définit S_λ opérateur borné sur $L^1(X,\mathcal{B},m), \lambda > 0$ par $S_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f dt$; la famille résolvante $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ ainsi obtenue est sous-markovienne.

Nous décrivons rapidement la méthode qui est celle employée pour construire des résolvantes duales *cf.* [2].

On choisit d'abord un espace H_0 de fonctions boréliennes bornées sur E, séparant les points de E, réticulé et contenant les fonctions constantes et qui vérifie les conditions suivantes :

1) H_0 est séparable pour la norme uniforme. La tribu borélienne engendrée par H_0 est d'après le théorème de BLACKWELL identique à $\mathcal{B}$.

2) Si g désigne l'injection canonique de H_0 dans $L^1(E,\mathcal{B},m)$, alors $g(H_0)$ est stable par l'action de $(S_\lambda)_{\lambda>0}$.

On construit alors une famille résolvante sous-markovienne $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ de vrais noyaux sur $(E,\mathcal{B},m)$ et un ensemble $A \subset X$, de complémentaire m-négligeable telle que

a) pour tout $f \in H_0, W_\lambda f$ est un représentant de $S_\lambda f$.

b) $1_A W_\lambda 1_A = W_\lambda$ et W_λ opère sur $1_A.H_0$.

On désigne maintenant par Y un compactifié de A par rapport à la famille de fonctions $\{1_A f\}_{f\in H_0}$. L'espace Y est compact métrisable et A s'envoie injectivement sur un borélien $\tilde{A}$ de Y.

Par construction, on obtient une famille résolvante $(\tilde{W}_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux felleriens sur Y, telle que pour tout $y \in \tilde{A}, \varepsilon_y \tilde{W}_\lambda = \varepsilon_y W_\lambda$. Evidemment, $\tilde{W}_\lambda(\mathcal{C}(Y))$ n'a aucune raison de séparer les points de Y. Soit alors G l'espace vectoriel réticulé fermé contenant les constantes, engendré par $\tilde{W}_\lambda(\mathcal{C}(Y))$. L'espace G s'identifie à un espace $\mathcal{C}(Z)$ où Z est un compact métrisable quotient de Y. Si φ désigne l'application canonique de Y sur Z, on transporte (W_λ) sur $\mathcal{C}(Z)$ en une famille résolvante (U_λ) sur Z par $U_\lambda h = f$ où $f o\varphi = W_\lambda(h o\varphi)$ de sorte que $(U_\lambda h)o\varphi = W_\lambda(h o\varphi)$.

On a cette fois une résolvante de Ray sur Z. Désignons par Z_0 l'ensemble des points de non-branchement et soit $\mu = \varphi(m)$. La théorie générale de Hille-Yosida permet de construire un semi-groupe $(P'_t)_{t>0}$ sur l'espace ImU_λ, qu'on étend canoniquement en un semi-groupe de noyaux portés par Z_0 par la formule $P'_t f = \lim_{\lambda\to\infty} P'_t \lambda U_\lambda f$, pour f parcourant $\mathcal{C}(Z)$.

Enfin, la mesure m étant excessive pour $(W_\lambda), \mu = \varphi(m)$ est aussi excessive pour (U_λ).

On va décrire maintenant une méthode permettant de relever (P_t) en un semi-groupe de noyaux sur Y.

LEMME 1. *Il existe un ensemble borélien $B \subset Z$, tel que $\mu(Z \setminus B) = 0$ et tel que pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, tout $y \in D = \varphi^{-1}(B)$, la limite $\lim_{\lambda \to 0} \lambda W_\lambda f(y) = \hat{f}(y)$ existe.*

Démonstration. Fixons un $\lambda_0 > 0$. Pour tout $f \in \mathcal{C}(Y), 0 \leq f \leq 1$ la fonction $W_{\lambda_0}(f)$ est de la forme $u o \varphi$ où $u \in \mathcal{C}(Z)$. De plus u est une fonction λ_0-excessive dominée pour l'ordre fort des fonctions λ_0-excessives par $U_{\lambda_0}1$. D'après un théorème de dérivation des résolvantes établi par l'auteur *cf.* [8], [2], $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda(I - \lambda U_{\lambda_0+\lambda})u = g$ existe en dehors d'un ensemble M_u, avec $U_{\lambda_0}(1_{M_u}) = 0$ et $g o \varphi = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda W_\lambda f$ sur $\varphi^{-1}(M_u)^c$. Soit (f_n) une suite dense dans $\mathcal{C}(Y), (u_n)$ la suite correspondante de fonctions λ_0-excessives sur Z définie par $u_n o \varphi = W_{\lambda_0} f_n$.Posons $B_n = \{\lim\limits_{\lambda \to \infty} \sup \lambda(I - \lambda U_{\lambda+\lambda_0})u_n = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \inf \lambda(I - \lambda U_{\lambda+\lambda_0})u_n\}$. L'ensemble $B = \bigcap\limits_n B_n$ est borélien dans Z (on peut d'ailleurs montrer que $B \subset Z_0$) et répond aux conditions cherchées.

On va utiliser maintenant à deux reprises une technique inventée par KUZNETSOV et exposée dans [4], p. 482.

Disons qu'un semi-groupe de noyaux $(R_t)_{t>0}$ est mesurable sur un espace $(X, \mathcal{F})$, si pour tout f mesurable bornée sur X, l'application $(x,t) \to R_t f(x)$ est mesurable sur $X \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Pour deux tels semi-groupes $(R_t)_{t>0}, (R'_t)_{t>0}$ on dira qu'ils sont équivalents par rapport à une mesure excessive m, si pour toute f mesurable bornée sur X et tout $t > 0$

$$R_t f = R'_t f \qquad m \text{ p.partout.}$$

LEMME 2. *Soient $(X, \mathcal{F})$ un espace lusinien, $(R_t)_{t>0}$ un semi-groupe mesurable de noyaux ≥ 0 bornés, m une mesure excessive pour $(R_t)_{t>0}$. Pour tout ensemble $F \in \mathcal{F}$, portant la mesure m, il existe un semi-groupe mesurable $(R'_t)_{t>0}$ équivalent à $(R_t)_{t>0}$ et tel que*

$$1_F R'_t 1_F = R'_t \qquad \forall\, t.$$

On renvoie à [4] pour la démonstration.

On revient aux notations du lemme 1. On applique une première fois le lemme de KUZNETSOV sur Z, au semi-groupe $(P'_t)_{t>0}$ et à l'ensemble B vérifiant les conditions du lemme 1.

LEMME 3. *Il existe un semi-groupe mesurable $(P''_t)_{t>0}$ μ-équivalent à (P'_t) et tel que*

$$1_B P''_t 1_B = P''_t \text{ pour tout } t > 0.$$

RELEVEMENT DE(P''_t) SUR Y.

On a vu que pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, tout, $y \in D = \varphi^{-1}(B)$, la limite $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda W_\lambda f(y) = \hat{f}(y)$ existe. Pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, il existe donc une unique fonction borélienne, sur Z, qu'on notera Qf, définie par $Qfo\varphi = 1_D\hat{f}$. On vérifie facilement que pour $h \in \mathcal{C}(Z)$ $Q(ho\varphi) = 1_D.ho\varphi$, de sorte que $\tilde{Q} = f \mapsto Q(f)o\varphi$ est un noyau ≥ 0 sur Y qui est aussi un projecteur *i.e.* $\tilde{Q}^2 = \tilde{Q}$. Par construction $P''_t = 1_B.P''_t.1_B$. On définit R_t sur Y par la formule $R_tf = [P''_t(Qf)]o\varphi$.

On a

$$\begin{aligned} R_toR_sf &= P''_t(Q(R_sf)o\varphi \\ &= P''_t(Q.[P''_s(Qf)o\varphi])o\varphi \\ &= (P''_tP''_sQf)o\varphi = P''_{t+s}(Qf)o\varphi = R_{t+s}f. \end{aligned}$$

LEMME 4. *Pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, tout $t > 0$ R_tf représente P_tf dans $L^1(E, \mathcal{B}, m)$.*

Démonstration. Le semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ étant fortement continu, $P_tf = \lim_{\lambda\to\infty} P_t(\lambda S_\lambda f)$ dans $L^1(m)$. Il en résulte que $P'_t(Qf)o\varphi$ représente P_tf et donc aussi R_tf. $\square$

On rappelle que, dans la construction de Y, on avait utilisé un ensemble $A \subset E$, portant m, envoyé injectivement sur un borélien $\tilde{A}$ de Y par le plongement de A dans son compactifié.

On applique une $2^{\text{ème}}$ fois le lemme de KUZNETSOV au système $((R_t), \tilde{A})$.

THEOREME 5. *Il existe un semi-groupe $(Q_t)_{t>0}$ mesurable de noyaux sous-markoviens sur Y, tels que $1_{\tilde{A}}Q_t1_{\tilde{A}} = Q_t$, m-équivalent à R_t, et qui représente $(P_t)_{t>0}$.*

Nous revenons maintenant à la construction d'un semi-groupe dual. Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace lusinien, $m \geq 0$ une mesure bornée sur $(E, \mathcal{B})$ et soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe mesurable sous-markovien de vrais noyaux sur $(E, \mathcal{B})$ pour lequel m est excessive. Le semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ se prolonge alors en un semi-groupe faiblement mesurable de contractions de $L^2(E, \mathcal{B}, m)$. En effet, pour tout $h \in L^\infty(m)$, tout $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, m)$ l'application $t \mapsto \int h.P_tf dm$ est borélienne sur $\mathbb{R}^+ - \{0\}$.

Comme on a supposé $(E, \mathcal{B})$ lusinien, $L^2(E, \mathcal{B}, m)$ est séparable, et les structures boréliennes induites sur $L^1(E, \mathcal{B}, m)$ par les topologies fortes et faibles sont identiques. Le semi-groupe (P_t) est donc fortement mesurable dans $L^2(m)$ et en raison d'un théorème de PHILLIPS *cf.* [9], il est automatiquement continu.

Soit $(P^*_t)_{t>0}$ le semi-groupe dual de (P_t) dans $L^2(m)$. Le semi-groupe $(P^*_t)_{t>0}$ est faiblement continu, donc fortement continu dans $L^2(m)$, et se prolonge en un semi-groupe fortement continu dans $L^1(m)$. On applique maintenant le théorème de représentation (th. n° 5) au semi-groupe $(P_t^*)_{t>0}$. Il existe donc un semi-groupe mesurable $(\hat{P}_t)_{t>0}$ de noyaux sur $(E,\mathcal{B})$, qui sont positifs et sous-markoviens, et tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{B},m)$

$$\hat{P}_t f \text{ représente } P_t^* f \in L^1(E,\mathcal{B},m)$$

Par suite, pour h, f, boréliennes bornées sur $(E,\mathcal{B})$, on a

$$\int hP_t f\, dm = \int \hat{P}_t h\, dm.$$

Remarque 1. Le théorème de représentation a été démontré sous l'hypothèse que (P_t) est sous-markovien. Quitte à remplacer (P_t) par $(e^{-\lambda t}P_t)$, on peut se ramener au cas où il existe une fonction u strictement positive telle que $P_t u \leq u \quad \forall\, t > 0$, et $\int u\, dm < +\infty$. On se ramène au cas traité en prenant $m' = u.m, Q_t = \frac{1}{u}P_t.u$.

SUR LES SEMI-GROUPES SEPARANT $(E,\mathcal{B})$.

Dans sa construction du dual d'un semi-groupe mesurable $(P_t)_{t>0}$, défini sur un espace lusinien $(E,\mathcal{B})$, Kuznetsov est amené à faire l'hypothèse de séparation suivante sur (P_t) :

(S) Pour $x, y \in E, x \neq y$, il existe $t > 0$ tel que $\varepsilon_x P_t \neq \varepsilon_y P_t$.

Cette hypothèse lui permet, par un changement de structure convenable et donc de topopogie sur E, de se ramener à un semi-groupe "stochastically continuous". Nous allons voir que cela peut être obtenu simplement par une compactification de Ray, sans passer par des processus de Markov. Quitte à remplacer (P_t) par $(e^{-\lambda t}P_t)$, nous supposerons que $V_0 = \int_0^\infty P_t\, dt$ est un noyau borné.

LEMME 6. *(KUZNETSOV). Si (P_t) sépare les points de E, alors l'image de V_0 sépare les points de E.*

Démonstration. Comme E est lusinien, il existe une suite (f_n) de fonctions boréliennes bornées, dense dans $L^1(\mu)$ pour toute mesure $\mu \geq 0$ sur $(E,\mathcal{B})$. Supposons que $V_\lambda f_n(x) = V_\lambda f_n(y)$ pour tout $\lambda > 0$ et toute f_n. Il en résulte facilement que pour tous $s > t > 0$

$$\int_t^s P_u f_n(x)du = \int_t^s P_u f_n(y)du.$$

On en déduit l'existence d'un ensemble borélien A, négligeable pour la mesure de Lebesgue, tel que pour $t \in A^c, P_t\, f_n(x) = P_t\, f_n(y)$ pour tout n, et donc $\varepsilon_x P_t = \varepsilon_y P_t$ pour tout $t \in A^c$.

Pour tout $s > 0, \varepsilon_x P_{t+s} = \varepsilon_y P_{t+s}$ et finalement $\varepsilon_x P_t = \varepsilon_y P_t$ pour tout $t > 0$, ce qui implique $x = y$.

On suppose maintenant que $H = (f_n)$ est un espace vectoriel réticulé séparable, contenant les constantes, stable par l'action des opérateurs $V_p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t, p \in \mathbb{N}$. On désigne par $\mathcal{S}$ le cône des fonctions excessives bornées par rapport à (P_t) (ou ce qui revient au même par rapport à (V_λ)) et l'on désigne par $\overline{\mathcal{S}}$ le saturé inf-stable de $\mathcal{S}$. Pour $v \in \overline{\mathcal{S}}$, on désigne par $\hat{v} = \sup_t P_t v = \sup_p pV_p v$ sa régularisée excessive. On sait que pour $u \in \overline{\mathcal{S}}, u = \hat{u}, m$.presque partout. D'après le théorème de PHILLIPS, $(P_t)_{t>0}$ est continu dans $L^1(m)$ et pour $u \in \overline{\mathcal{S}}, \int P_t u dm = \sup_{s>t} \int P_s u dm$. On a donc aussi $P_t v = P_t \hat{v} = \sup_{s \downarrow t} P_s \hat{v}$, m p.partout.

Nous entreprenons la compactification.

On reprend l'espace vectoriel $H = (f_n)$ et on pose $H_1 = V_0(H)$; on compactifie E en $\hat{E}$, en rendant continues toutes les fonctions de H_1. L'hypothèse de séparation implique que l'application canonique $i : E \to \hat{E}$ est une injection mesurable de E sur un borélien E' de $\hat{E}$. Il existe donc une famille résolvante de Ray $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda>0}$ sur $\hat{E}$, telle que (en identifiant E et E')$1_E \tilde{V}_\lambda 1_E = V_\lambda$. Soit $\hat{E}_0$ l'ensemble des points de non branchement de $\hat{E}$ par rapport à $\tilde{V}_\lambda$. On désigne par $(R_t)_{t>0}$ le semi-groupe de noyaux canoniquement construit sur $\hat{E}_0$, associé à $(\tilde{V}_\lambda)$ *cf.* [2]) par le procédé de HILLE-YOSIDA, adapté aux résolvantes de RAY.

Le semi-groupe (R_t) a les 3 propriétés suivantes :

a) pour tout $f \in \mathcal{C}(\hat{E}), R_t f = \lim_{\lambda \to \infty} R_t(\lambda V_\lambda f)$

b) $\tilde{V}_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R_t dt$

c) pour toute excessive u pour la résolvante $(\tilde{V}_\lambda), u = \sup_t R_t u$.

THEOREME 7. *Pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$. Pour tout $t > 0$, on a $P_t 1_E f = 1_E R_t f, m$.presque partout.*

<u>Démonstration</u>. Soit $C = V_0(\mathcal{C}_+(\hat{E})) + \mathbb{R}^+$ et soit $\overline{C}$ le saturé inf-stable de C. Pour $u \in \overline{C}$, on a

$$\hat{u} = \sup_\lambda \lambda \tilde{V}_\lambda u = \sup_{t>0} R_t u$$

Pour $v = 1_E.u$ on a aussi par rapport à la résolvante $(V_\lambda), \hat{v} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda v$ mais aussi $\hat{v} = \sup_\lambda 1_E \lambda \tilde{V}_\lambda u$ de sorte que $\hat{v} = 1_E.\hat{u}$. Considérons maintenant pour $t < s$,

$$B_{t,s} = \frac{1}{s-t} \int_t^s P_r dr \qquad D_{t,s} = \frac{1}{t-s} \int_t^s R_r dr$$

On aura encore $B_{t,s}v = 1_E D_{t,s}u$. On a vu que $P_t v = P_t \hat{v}, m$ p.p., de sorte que $P_t v = \sup_{s\downarrow t} B_{t,s}v$ de même $R_t u = \sup_{s\downarrow t} D_{t,s}u$ et finalement $P_t v = 1_E R_t u$ m.p.p. L'espace vectoriel $F = \overline{C} - \overline{C}$ est dense dans $\mathcal{C}(Y)$, de sorte que finalement, pour $f \in \mathcal{C}(X), P_t 1_E f = 1_E R_t f, m$ p.partout.

Ce résultat s'étend par convergence monotone aux fonctions boréliennes sur $\hat{E}$.

Sous l'hypothèse de séparation pour $(P_t)_{t>0}$, on peut donc toujours considérer qu'on a affaire à un semi-groupe de Ray $(R_t)_{t>0}$, à condition de ne travailler que sur des propriétés vraies m.p.p.

Remarque. Un autre article de Kuznetsov [3] montre que l'hypothèse (L) est nécessaire et suffisante pour obtenir la représentation intégrale des fonctions excessives. La partie nouvelle de ce résultat concerne la nécessité, car la suffisance est "classique" : elle a été établie par l'auteur dès 1969, et figure par exemple dans [7], [5], [2]. Signalons que dans l'article [7], on munit le cône des fonctions excessives d'une topologie qui permet d'appliquer le théorème de représentation intégrale de Choquet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET G., Représentation intégrale dans les cônes convexes sans base compacte. *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 253, 1961, pp. 1901-1903.

[2] DELLACHERIE C., MEYER P.A., *Probabilités et potentiel.* Hermann Paris, Ch. XII à XVI (N$^{\text{elle}}$ édition).

[3] KUZNETSOV S.E., *More on existence and uniqueness of decomposition of excessives functions into extremes.* Lect. Notes in Maths n° 1526 Springer.

[4] KUZNETSOV S.E., *On the existence of a dual semi-group.* Séminaire de probabilités XXVI, Lecture Notes in Maths n° 1526, Springer.

[5] MEYER P.A., *Représentation intégrale des fonctions excessives, résultats de Mokobodzki,* Séminaire de probabilités V, Lecture notes in Maths. n° 191, Springer.

[6] MOKOBODZKI G., Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites. *Annales de l'Institut Fourier,* T. XIV. 1965.

[7] MOKOBODZKI G., Dualité formelle et représentation intégrale des fonctions excessives, *in Actes Congrès Intern. Maths.* 1970, Tome 2, p. 531-535.

[8] MOKOBODZKI G., *Densité relative de deux potentiels comparables,* Séminaire de probabilités IV, Lecture notes in Maths n° 124, Springer.

[9] PHILLIPS R.S., On one parameter semi-groupes of linear transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2, 234-237, (1951).

Gabriel MOKOBODZKI
Equipe d'Analyse
U.R.A. 754 - C.N.R.S.
Université Paris VI
Boîte 186
4, place Jussieu
75252 - PARIS CEDEX 05