SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SHIQI SONG

# Inégalités relatives aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck à $n$ paramètres et capacité gaussienne $c_{n,2}$

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 27 (1993), p. 276-301

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__276_0>

# INEGALITES RELATIVES AUX PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK A n-PARAMETRES ET CAPACITE GAUSSIENNE $c_{n,2}$

Shiqi SONG
Equipe d'Analyse et Probabilités
Université Evry Val d'Essonne
Boulevard des Coquibus
91025 EVRY CEDEX FRANCE

**Abstract**

Let $Z^{(n)}$ be the n-parameters Ornstein-Uhlenbeck process on a separable Fréchet gaussian space $(E,\mu)$. We consider the Sobolev space $W^{n,2}$ and the associated Gaussian capacity $c_{n,2}$. We prove two inequalities of the following type:

$$\| \sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|} |u|(Z_t^{(n)}) \|_2 \leq C_n c_{n,2}(u),$$

$$\| \sup_{t\in R_+^n} \left| \int_{s\in[0,t]} e^{-s} f(Z_s^{(n)}) ds \right| \|_2 \leq C_n \|U^n f\|_2.$$

These inequalities are used to give probabilistic representations for measures which belong to the dual space of $W^{n,2}$ and such representations permit us to prove that a Borel subset B of E has null $c_{n,2}$-capacity if and only if $Z^{(n)}$ can not hit it.

## §1 Introduction

Etant donné un espace de Fréchet séparable E muni d'une mesure gaussienne centrée $\mu$ (définie sur les ensembles boréliens de E), le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(Q_t)_{t\geq 0}$ sur $(E,\mu)$ est défini par la formule de Mehler (voir Meyer [9]) :

$$Q_t f(x) = \int f[ xe^{-t} + y c_t ] \mu(dy) , x \in E, \ t \in R_+,$$

où f désigne une fonction borélienne bornée, et $c_t = \sqrt{1 - e^{-2t}}$. Ce semigroupe $(Q_t)$ est symétrique par rapport à la mesure $\mu$ et il définit des semigroupes sur $L^p(E,\mu)$ pour tout $p>1$. En relation avec le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(Q_t)$, nous introduisons l'opérateur de noyau :

$$Uf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2}\, e^{-t}\, Q_t f(x)\, dt \ , \ x \in E,$$

pour toute fonction $f \in \bigcup_{p>1} L^p(E,\mu)$. Soient r un nombre naturel et $p > 1$ un nombre réel, nous désignons par $W^{r,p}$ l'ensemble de fonctions de la forme $U^r f$ avec $f \in L^p(E,\mu)$ muni de la norme $N_{r,p}(U^r f) = N_p(f)$, où $N_p(f)$ indique la norme usuelle de $L^p(E,\mu)$. Nous introduisons ensuite la capacité $c_{r,p}$ : pour une fonction f s.c.i. positive ou nulle,

$$c_{r,p}(f) = \inf\{\ N_{r,p}(h)\ ;\ h \geq f \text{ presque partout, } h \in W^{r,p}\ \},$$

et pour une fonction g quelconque,

$$c_{r,p}(g) = \inf\{\ c_{r,p}(f)\ ;\ f \geq |g| \text{ partout, } f \text{ fonction s.c.i.}\}.$$

Rappelons que $c_{r,p}$ est une (semi-)norme. Un ensemble $A \subset E$ est dit de $c_{r,p}$-capacité nulle, si $c_{r,p}(A) = c_{r,p}(1_A) = 0$. Une fonction f sur E est dite $c_{r,p}$-quasi-continue, s'il existe une suite de sous-ensembles fermés $(F_n)$ de E tels que $c_{r,p}(E-F_n)$ tend vers zéro et que f est continue sur chaque $F_n$. Nous désignons par $L^1(E,c_{r,p})$ la fermeture, par rapport à la capacité $c_{r,p}$, de l'ensemble de fonctions continues bornées sur E. Rappelons que les fonctions de $L^1(E,c_{r,p})$ sont $c_{r,p}$-quasi-continues (voir DeLaPradelle-Feyel [4]).

Notre travail commence par la remarque suivante : rappelons que, sur chaque espace de Fréchet gaussien séparable $(E,\mu)$, existe un processus de Markov Z à trajectoire continue à valeurs dans E dont le semigroupe de transition est précisément le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(Q_t)$ (voir par exemple Song [12]). Le processus de Markov Z est appelé le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur $(E,\mu)$. Alors, quand $r = 1$ et $p = 2$, il est bien connu (voir Fukushima [5] et Albeverio-Ma-Röckner [1] ) que la capacité $c_{1,2}$ a une expression probabiliste. En fait, pour tout sous-ensemble borélien $B \subset E$, il existe une fonctionnelle additive A, déterminée par l'ensemble B, du processus d'Ornstein-Uhlenbeck Z telle que

$$(0,1) \qquad c_{1,2}(B)^2 = E_\mu[e^{-\sigma_B}] = E_\mu[\int_0^\infty e^{-t}\, dA_t],$$

où $\sigma_B = \inf\{t > 0; Z_t \in B\}$. Cette expression probabiliste donne en particulier le critère suivant : Un ensemble borélien B est de $c_{1,2}$-capacité nulle si et seulement si le processus d'Ornstein-Uhlenbeck Z ne le rencontre pas. Ce critère a été utilisée en particulier dans un récent travail de Denis [3] pour étudier le temps d'atteinte de zéro d'une martingale positive ou nulle $c_{1,2}$-quasi-continue sur un espace gaussien. On se demande alors si des expressions probabilistes du genre (0,1) existent aussi pour $c_{n,2}$ afin d'étendre l'étude de Denis [3] sur $c_{1,2}$ à $c_{n,2}$. Cette question a été l'origine du présent travail.

Rappelons que Ren [11] a déja étudié cette question et qu'il a obtenu une réponse partielle. Son travail suggère de représenter la capacité $c_{n,2}$ par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres.

Nous allons présenter dans la section 2 une construction des processus d'Ornstein-Uhlenbeck à multiparamètres sur un espace de Fréchet séparable gaussien. Cette construction, nouvelle par rapport à des constructions antérieures, met en évidence la relation entre les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à multiparamètres et le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(Q_t)$. Cette relation importante est développée davantage dans la section 3. Dans la section 4, nous démontrons l'inégalité du genre suivant :

$$(0,2) \quad N_2[( \sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|} |u|(Z_t^{(n)}) )] \leq C_n \, c_{n,2}(u),$$

où $Z_t^{(n)}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres sur $(E,\mu)$ et

$$|t| = |(t_1,\dots,t_n)| = |t_1| + \dots + |t_n|.$$

Dans la section 5, nous démontrons une autre inégalité du genre :

$$(0,3) \quad N_2(\sup_{t\in R_+^n} \left| \int_{s\in [0,t]} e^{-s} \, f(Z_s^{(n)})ds \right| ) \leq C_n \, N_2(U^n f).$$

Ces deux inégalités sont utilisées dans la section 6 pour prouver que toute mesure $\nu$ du dual de $W^{n,2}$ admet une représentation probabiliste via le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres, à savoir :

$$\nu(f)= E_\mu[ \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|} f(Z_s^{(n)}) \, A(ds) ],$$

où A est une mesure aléatoire sur $R_+^n$. En particulier, nous pouvons écrire pour un ensemble borélien B

$$(0,4) \quad c_{n,2}(B)^2 = E_\mu[ \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|} \, U^{2n}\nu(Z_s^{(n)}) \, A(ds) ],$$

où A est une mesure aléatoire sur $R_+^n$ et $\nu$ est la mesure (n,2)-d'équilibre de l'ensemble B (cf. Sugita [13] et Kazumi-Shigekawa [8]). Enfin, nous terminons notre travail en démontrant dans la section 7 qu'un ensemble borélien B a une $c_{n,2}$-capacité nulle si et seulement si le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres ne le rencontre pas.

__Remarques__ : 1. L'article de Ren [11] s'appuie sur l'équation différentielle stochastique qui définit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres. Nous prenons ici un point de vue markovien sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à multiparamètres. En fait, notre métode utilisée ici est une généralisation de celle utilisée dans Fukushima [7].

2. F.Hirsch a remarqué que le processus d'Ornstein-Uhlenbcek à n-paramètres utilisé dans Ren [11] n'est pas le même que celui construit dans la section 2 du présent travail. F.Hirsch a également remarqué récemment qu'une représentation de notre processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres par le drap brownien à n-paramètres existe.

3. Les processus de Markov à multiparamètres ont été beaucoup étudiés dans le contexte des points multiples (voir, par exemple, Evans [5], Fritzsimmons-Salisbury [6], Dynkin [4], etc.). Sous l'hypothèse que le processus de Markov à multiparamètres X est de la forme $X = (X^{(1)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_n})$, où $X^{(i)}_{t_i}$ sont des processus de Markov à un seul paramètre indépendants symétriques par rapport à une mesure donnée $m^{(i)}$, dont la résolvants est absolument continue par rapport à $m^{(i)}$, on a montré que la probabilité pour X de rencontrer un ensemble peut être estimée à l'aide des mesures d'énergie finie. Notre méthode, aussi bien que nos résultats, est différente de celles utilisées dans ces travaux.

4. Etant donné un processus de Markov X à multiparamètres à valeurs dans E, il est important de déterminer les mesures $\nu$ sur E qui peuvent être représentées par des mesures aléatoires A sur $R_+^n$, c'est-à-dire,

$$\nu(f) = E\Big[ \int_{s \in R_+^n} e^{-|s|} f(X_s)\, A(ds) \Big].$$

Ce problème a été traité dans Dynkin [4] pour un processus de Markov décrit dans la remarque 3. Nous montrons dans la section 6 que, pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres $Z^{(n)}$, les mesures dans le dual de $W^{n,2}$ sont des mesures admettant une telle représentation probabiliste.

5. Il est à remarquer que les inégalités (0,2) et (0,3) sont nouvelles même dans le cas où n = 1. En général, on considère seulement les capacités des ensembles. Cette contreinte rend les calculs de capacités plus difficile. La notion de l'espace de Banach adapté introduite dans DeLaPradelle-Feyel [2], qui considère la capacité comme une norme sur l'ensemble de fonctions, donne plus de souplesse. En particulier, nous en avons profité pour obtenir les inégalités (0,2) et (0,3).

6. Sugita [13] a remarqué que la relation entre les $c_{n,p}$-potentiels et les (n,p)-mesures d'équilibre n'est linéaire que lorsque p = 2. Le fait que seules les capacités $c_{n,2}$ sont

représentées par les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres est lié intrinsèquement avec la remarque de Sugita.

7. Les inégalités (0,2) et (0,3) pour n = 2 ont déjà été prouvées dans Song [12] avec une technique particulièrement adaptée à deux paramètres.

## §2 Notations

Dans notre travail, nous utilisons répétitivement l'argument par récurrence. Nous avons alors besoin de nombreuses notations, indexées par les nombres naturels, que nous précisons ici.

Le symbole N désigne l'ensemble des nombres naturels $\{0,1,2,3,...\}$; $R_+ = [0,\infty[$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Soit E un espace de Fréchet séparable. Relativement à E, nous définissons une suite d'espaces de Fréchet en posant :

$$\Xi^{(0)}(E) = E, \text{ et } \Xi^{(n+1)}(E) = C(R_+, \Xi^{(n)}(E)), n \in N.$$

Soit $l_{n,t}$ la $t^{ieme}$ coordonnée de l'espace $\Xi^{(n)}(E) = C(R_+, \Xi^{(n-1)}(E))$, $t \in R_+$, $n \in N$, $n \geq 1$. Posons :

$$l^{(n)}_{t_1,...,t_n} = l_{1,t_1} \circ ... \circ l_{n,t_n},$$

où $(t_1,...,t_n)$ est un élément de $R^n_+$. Pour $\xi \in \Xi^{(n)}(E)$, posons :

$$\xi_{t_1,...,t_n} = l^{(n)}_{t_1,...,t_n}(\xi).$$

Notons qu'en identifiant $\xi \in \Xi^{(n)}(E)$ avec $\{\xi_{t_1,...,t_n} ; (t_1,...,t_n) \in R^n_+\}$, nous pouvons écrire :

$$\Xi^{(n)}(E) = C(R^n_+, E).$$

Dans le même ordre d'idées, nous pouvons aussi écrire :

$$\Xi^{(n+m)}(E) = \Xi^{(n)}(\Xi^{(m)}(E)), \quad n,m \in N.$$

Soit $\mu$ une mesure gaussienne centrée définie sur les ensembles boréliens de E. Nous posons :

$$m^{(0)}(E,\mu) = \mu;$$

$T_t^{(0)}(E,\mu)$, $t\geq 0$, le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\Xi^{(0)}(E)$ associé à $m^{(0)}(E,\mu)$ par la formule de Mehler;

$Z^{(1)}(E,\mu)$ le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(0)}(E)$ de semigroupe $T_t^{(0)}(E,\mu)$, $t\geq 0$, de loi initiale $m^{(0)}(E,\mu)$;

$m^{(1)}(E,\mu)$ la loi de $Z^{(1)}(E,\mu)$;

$T_t^{(1)}(E,\mu)$, $t\geq 0$, le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\Xi^{(1)}(E)$ associé à $m^{(1)}(E,\mu)$ par la formule de Mehler;

$Z^{(n)}(E,\mu)$ le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(n-1)}(E)$ de semigroupe $T_t^{(n-1)}(E,\mu)$, $t\geq 0$, de loi initiale $m^{(n-1)}(E,\mu)$, $n\in N$, $n\geq 1$;

$m^{(n)}(E,\mu)$ la loi de $Z^{(n)}(E,\mu)$, $n\in N$;

$T_t^{(n)}(E,\mu)$, $t\geq 0$, le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\Xi^{(n)}(E)$ associé à $m^{(n)}(E,\mu)$ par la formule de Mehler, $n\in N$.

Notons que, pour tout $n\in N$, la mesure $m^{(n)}$ est une mesure gaussienne centrée sur l'espace $\Xi^{(n)}$. Rappelons la formule de Mehler :

$$T_s^{(n)}(E,\mu)f(\xi) = \int f(e^{-s}\xi + c_s\zeta)\, m^{(n)}(d\zeta), \quad n\in N,$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur $\Xi^{(n)}(E)$, où $c_s = \sqrt{1 - e^{-2s}}$. Etant donnée l'identification $\Xi^{(n)}(E) = C(R_+^n,E)$, le processus $Z^{(n)}(E,\mu)$ peut être considéré comme un processus à n-paramètres à valeurs dans E, ou une variable aléatoire à valeurs dans $C(R_+^n,E)$. Nous avons aussi :

$$Z^{(n+m)}(E,\mu) = Z^{(n)}(\Xi^{(m)}(E),m^{(m)}(E,\mu))$$

pour tout n, $m\in N$. Les processus $Z^{(n)}(E,\mu)$ seront appelés les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres sur $(E,\mu)$. Les processus d'Ornstein-Uhlenbeck usuels (c'est-à-dire à un paramètre) seront simplement appelés processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Définissons les symboles suivants :

$$Q_t = Q_t(E,\mu) = T_t^{(0)}(E,\mu);$$

$$Uf(x) = U(E,\mu)f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2}\, e^{-t}\, Q_t f(x)\, dt,$$

où f est une fonction borélienne bornée sur E et $x \in E$;

$$V_{(n)}(E,\mu)F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2}\, e^{-t}\, T_t^{(n)}(E,\mu)F(\xi)\, dt, \quad n \in N,$$

où F est une fonction borélienne bornée sur $\Xi^{(n)}(E)$ et $\xi \in \Xi^{(n)}(E)$;

$$Z^{(n)}_{t_1,\dots,t_n}(E,\mu) = 1^{(n)}_{t_1,\dots,t_n}(Z^{(n)}(E,\mu)), \quad n \in N.$$

Remarquons qu'un point $(t_1,\dots,t_n)$ de $R_+^n$ peut être désigné par un seul symbole t, ou par un couple (s,u), où $s \in R_+^m$ et $u \in R_+^k$ avec m, $k \in N$ et $m+k = n$, si nous identifions $R_+^n$ avec le produit $R_+^m \times R_+^k$. En fonction de cela, nous trouverons des écritures comme :

$$Z_t^{(n)}(E,\mu), \quad Z_{s,u}^{(n)}(E,\mu), \quad \text{etc.}$$

Comme d'habitude, nous introduisons l'ordre partiel $\leq$ sur $R^n$ pour lequel $(s_1,\dots,s_n) \leq (t_1,\dots,t_n)$ si et seulement si $s_i \leq t_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Nous introduisons une famille de tribus sur $C(R_+^n, E)$ en posant :

$$F_t^{(n)} = \sigma\{1_s^{(n)} ;\ s \leq t\}, \quad t \in R_+^n.$$

Pour tout $n \geq 1$, l'espace $(\Xi^{(n)}, m^{(n)})$ est un espace gaussien. On dénote par $c_{k,2}^{(n)}$, $k \in N$, la capacité gaussienne d'indice (k,2) sur l'espace $(\Xi^{(n)}, m^{(n)})$. Les capacités gaussiennes sur (E,μ) seront notées par $c_{k,2}$. Enfin, on dénote par $L^1(\Xi^{(n)}, c_{k,2}^{(n)})$, respectivement par

$L^1(E,c_{k,2})$, la fermeture de l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\Xi^{(n)}$, respectivement sur E, par rapport à la capacité-norme $c^{(n)}_{k,2}$, respectivement $c_{k,2}$.

## §3 Loi du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres

Dans cette section, nous fixons un espace de Fréchet séparable gaussien $(E,\mu)$. Nous démontrons une série de lemmes qui seront utilisés ultérieurement.

**Lemme 1** : Soit $n\in N$, $n\geq 2$. Soit $t = (t_1,\dots,t_n)\in R^n_+$. Soit $\sigma(t)$ une permutation de t. Considérant $Z^{(n)}(E,\mu)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $C(R^n_+,E)$, nous avons :

$$Z^{(n)}(E,\mu) = \{Z^{(n)}_t(E,\mu), t\in R^n_+\} \overset{\text{loi}}{=} \{Z^{(n)}_{\sigma(t)}(E,\mu), t\in R^n_+\} = Z^{(n)}_{\sigma(\bullet)}(E,\mu).$$

Preuve : On démontre le lemme par récurrence. En fait, comme dans Song [12], le lemme est déjà démontré lorsque n = 2. Supposons que le lemme est vrai pour $n \leq k-1$, $k\in N$, $k\geq 3$. Considérons le cas où n = k.

Il nous suffit de supposer que $\sigma$ est un échange entre deux coordonnées de $t = (t_1,\dots,t_k)$. Si $\sigma$ ne concerne pas la dernière coordonnée $t_k$, on a :

$$\sigma(t) = (\sigma'(t_1,\dots,t_{k-1})\,,\,t_k).$$

Considérons $Z^{(k)}(E,\mu)$ et $Z^{(k)}_{\sigma(\bullet)}(E,\mu)$ comme des processus à valeurs dans $\Xi^{(k-1)}(E)$. Alors, ils sont tous des processus de Markov possédant le même semigroupe de transition (le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $T^{(k-1)}_s(E,\mu)$), dont les lois initiales sont respectivement la loi de $Z^{(k-1)}(E,\mu)$ et celle de $Z^{(k-1)}_{\sigma'(\bullet)}(E,\mu)$. Comme, par hypothèse de récurrence, ces deux lois initiales sont les mêmes, on voit bien que $Z^{(k)}(E,\mu)$ et $Z^{(k)}_{\sigma(\bullet)}(E,\mu)$ ont aussi les mêmes lois.

Supposons que $\sigma$ concerne $t_k$. D'après ce qu'on vient de démontrer, on peut échanger les $k-1$ premières coordonnées sans changer la loi de $Z^{(k)}(E,\mu)$. On peut donc supposer que $\sigma$ est l'échange entre $t_{k-1}$ et $t_k$, c'est-à-dire,

$$\sigma(t) = (t_1,\dots,t_{k-2}, \sigma''(t_{k-1},t_k)).$$

Utilisons les identifications suivantes :

$$Z^{(k)}(E,\mu) = Z^{(2)}(\Xi^{(k-2)}(E),m^{(k-2)}) \text{ et}$$

$$Z^{(k)}_{\sigma}(E,\mu) = Z^{(2)}_{\sigma''}(\Xi^{(k-2)}(E),m^{(k-2)});$$

on remarque que le problème devient celui pour n = 2, quitte à remplacer l'espace $(E,\mu)$ par l'espace $(\Xi^{(k-2)}(E),m^{(k-2)})$. Puisque ce dernier est toujours un espace de Fréchet séparable gaussien, notre hypothèse de récurrence lui est applicable. Les deux variables $Z^{(k)}(E)$ et $Z^{(k)}_{\sigma}(E)$ ont donc les mêmes lois. Le lemme est démontré. $\square$

**Lemme 2** : Soit $n\in N$. Soit $t = (t_1,\dots,t_n)\in R^n_+$. Soit f une fonction borélienne bornée sur E. Soit $s\in R_+$. Alors, on a :

$$T^{(n)}_s(E,\mu)[f\circ l^{(n)}_t](\xi) = Q_s f(l^{(n)}_t(\xi)),$$

où $\xi\in \Xi^{(n)}(E)$. En conséquence,

$$V_{(n)}(E,\mu)[f\circ l^{(n)}_t](\xi) = Uf(l^{(n)}_t(\xi)).$$

Preuve : On utilise la formule de Mehler. On pose $\xi_t = l^{(n)}_t(\xi)$. Il est à noter que la loi de $Z^{(n)}_t(E,\mu)$ est $\mu$. D'où, on a :

$$\begin{aligned} T^{(n)}_s(E,\mu)[f\circ l^{(n)}_t](\xi) &= \int f\circ l^{(n)}_t(c_s\xi + e_s\zeta)\, m^{(n)}(d\zeta) \\ &= \int f\,(c_s\xi_t + e_s\zeta_t)\, m^{(n)}(d\zeta) \\ &= \int f\,(c_s\xi_t + e_s y)\, \mu(dy) \\ &= Q_s f(\xi_t). \ \square \end{aligned}$$

**Lemme 3** : Soit $n\in N$. Soit $s = (s_1,\dots,s_n) \in R^n_+$. Posons :

$$[0,s] = \{t\in R^n_+ \; ; \; 0\le t\le s \}.$$

Alors,

$$\{Z_t^{(n)}(E,\mu)\ ;\ t\in[0,s]\ \} \overset{\text{loi}}{=} \{Z_{s-t}^{(n)}(E,\mu)\ ;\ t\in[0,s]\ \}.$$

<u>Preuve</u> : On prouve le lemme par récurrence. Lorsque $n = 1$, le lemme résulte de la symétrie du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Supposons que le lemme est vrai pour les indices de 1 à $n-1$, $n\in N$, $n\geq 2$. On va montrer qu'il est aussi vrai pour l'indice n.

Posons :

$$Y = Z^{(1)}(\Xi^{(n-1)}(E),m^{(n-1)}(E,\mu)).$$

(Notons que $m^{(n-1)}(E,\mu)$ est la loi de $Z^{(n-1)}(E,\mu)$.) Alors, on a :

$$\{\ Z_t^{(n)}(E,\mu);\ t\in[0,s]\ \}$$

$$= \{1_{t'}^{(n-1)}(Y_{t_n})\ ;\ t'\in R_+^{n-1},\ t_n\in R_+,\ (t',t_n)\in[0,s]\ \}$$

$$\overset{\text{loi}}{=} \{1_{t'}^{(n-1)}(Y_{s_n-t_n})\ ;\ t'\in R_+^{n-1},\ t_n\in R_+,\ (t',t_n)\in[0,s]\ \}$$

par la symétrie du processus d'Ornstein-Uhlenbeck Y,

$$\overset{\text{loi}}{=} \{1_{t',s_n-t_n}^{(n)}(Z^{(n)})\ ;\ t'\in R_+^{n-1},\ t_n\in R_+,\ (t',t_n)\in[0,s]\ \}$$

$$\overset{\text{loi}}{=} \{1_{s_n-t_n,t'}^{(n)}(Z^{(n)})\ ;\ t'\in R_+^{n-1},\ t_n\in R_+,\ t'\in[0,s']\text{ et }t_n\in[0,s_n]\ \}$$

d'après le lemme 1, où s' désigne les $n-1$ premières coordonnées de s. On arrive à échanger la coordonnée $t_n$ à $s_n-t_n$. Puisque maintenant les coordonnées inchangées t' se trouvent aux derniers rangs de $1_{s_n-t_n,t'}^{(n)}(Z)$, on peut recommencer le même argument. En le répétant, on arrive enfin à ce que toutes les coordonnées soient changées de $t_i$ à $s_i-t_i$. Le lemme est prouvé. □

<u>**Lemme**</u> **4** : <u>Soient</u> $n, m \in N$. <u>Soient</u> $v \in R_+^n$ <u>et</u> $t \in R_+^m$. <u>Désignons par</u> $\infty'$ <u>l'infinité de</u> $R_+^m$ <u>et</u> $\infty''$ <u>celui de</u> $R_+^n$. <u>Soit</u> H <u>une fonction</u> $F_{t,\infty''}^{(m+n)}$<u>-mesurable</u>. <u>Alors,</u>

<u>l'espérance conditionnelle de</u> H <u>sachant</u> $F^{(m+n)}_{\infty',v}$ <u>sous la loi</u> $m^{(m+n)}(E,\mu)$ <u>est</u> $F^{(m+n)}_{t,v}$-<u>mesurable</u>.

<u>Preuve</u> : On note simplement $T^{(m+n)}_s$ pour $T^{(m+n)}_s(E,\mu)$, $s\in R_+$. Supposons d'abord que $n = 1$ et $m\in N$ quelconque. Considérons $Z^{(m+1)}$ comme le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(m)}$. Pour tout réel positif s, par la formule de Mehler, on voit que $T^{(m)}_s g$ est $F^{(m)}_t$-mesurable dès que g est $F^{(m)}_t$-mesurable. Cette propriété avec la propriété de Markov de $Z^{(m+1)}$ implique que $E( H \mid F^{(m+1)}_{\infty',v} )$ est $F^{(m+1)}_{t,v}$-mesurable, si H est de la forme :

$$H = h_1(1^{(m+1)}_{s_1})\bullet\ldots\bullet h_k(1^{(m+1)}_{s_k}),$$

où $k\in N$, $s_i\in R_+$, et $h_i$ sont des fonctions boréliennes bornées sur $\Xi^{(m)}$, $F^{(m)}_t$-mesurables, $i = 1, 2, \ldots,k$. Cette mesurabilité reste vraie pour toute fonction borélienne bornée $H \in F^{(m+1)}_{t,\infty''}$ grâce au théorème de classe monotone.

Supposons maintenant $n = 2$ (m est toujours quelconque). Ecrivons $v = (v_1,v_2)$. Supposons que H dépend d'un nombre fini de coordonnées, c'est-à-dire :

$$H = H[(1^{(m+2)}_{t_i,u_i,s_i})],$$

avec $(t_i)\subset[0,t]$, $(u_i,s_i)\in R^2_+$. Utilisant le semigroupe $T^{(m+2)}_s$ et la propriété de Markov de $Z^{(m+2)}$, on voit que l'espérance conditionnelle G' sous la loi $m^{(m+2)}$ de la fonction H définie ci-dessus sachant la tribu $F^{(m+2)}_{\infty',\infty,v_2}$ dépend également d'un nombre fini de coordonnées. Ecrivons donc : $G' = G'[(1^{(m+2)}_{t_i,u_i,q_i})]$, où $q_i\in [0,v_2]$. Posons :

$$W = W[(1^{(m+2)}_{w_j,x_j,y_j})],$$

avec $(w_j)\subset[0,\infty'[$ et $(x_j,y_j)\in [0,v]$. On a :

$$E( H W ) = E( H[(1^{(m+2)}_{t_i,u_i,s_i})] \bullet W[(1^{(m+2)}_{w_j,x_j,y_j})] )$$

$$= E( G'[(1^{(m+2)}_{t_i,u_i,q_i})] \bullet W[(1^{(m+2)}_{w_j,x_j,y_j})] )$$

$$= E\left( G'[(1^{(m+2)}_{t_i,q_i,u_i})] \bullet W[(1^{(m+2)}_{w_j,y_j,x_j})] \right) \text{ d'après le lemme 1.}$$

On sait déjà que l'espérance conditionnelle de $G'[(1^{(m+2)}_{t_i,q_i,u_i})]$ sachant $F^{(m+2)}_{\infty',v_2,v_1}$ s'écrit sous la forme :

$$G = G[(1^{(m+2)}_{t_i,q_i,p_i})],$$

avec $(p_i)\subset[0,v_1]$. Utilisant encore une fois le lemme 1, on voit que :

$$E\left( H \;\middle|\; F^{(m+2)}_{\infty',v_1,v_2} \right) = G[(1^{(m+2)}_{t_i,p_i,q_i})] \in F^{(m+2)}_{t,v_1,v_2}.$$

Grâce toujours au théorème de classe monotone, on étend cette mesurabilité à toute fonction borélienne bornée H.

Les cas où $n\geq 3$ peuvent être traités de la même manière. $\square$

__Remarque__ : Ce lemme montre en particulier que la condition (F4) sur $\{F^{(n)}_t \; ; t\in R^n_+\}$ est satisfaite, ce qui nous permet d'appliquer l'inégalité de martingale à plusieurs paramètres (voir [10]).

__Lemme__ 5 : __Soient__ n, m $\in$ N. __Soient__ s __et__ t __deux points de__ $R^n_+$. __Soient__ u __et__ v __deux points de__ $R^m_+$ __tels que__ $u\leq v$. __Soit__ f __une fonction borélienne bornée sur__ E. __Alors__,

$$E\left( f(Z^{(m+n)}_{u,s+t}(E,\mu)) \;\middle|\; F^{(m+n)}_{v,t}(E,\mu) \right) = Q_{|s|}f(Z^{(m+n)}_{u,t}),$$

$$E\left( f(Z^{(m+n)}_{s+t,u}(E,\mu)) \;\middle|\; F^{(m+n)}_{t,v}(E,\mu) \right) = Q_{|s|}f(Z^{(m+n)}_{t,u}),$$

__où__ $|s| = |(s_1,\dots,s_m)| = |s_1| + \dots + |s_m|$.

__Preuve__ : Démontrons d'abord la première égalité. On la démontre par récurrence sur l'indice n. Notons qu'on a :

$$Z^{(m+n)}(E,\mu) = Z^{(n)}(\Xi^{(m)}(E),m^{(m)}(E,\mu)).$$

Pour simplifier l'écriture, on dénote :

$$Y = Z^{(n)}(\Xi^{(m)}(E),m^{(m)}(E,\mu)),$$

considéré comme un processus à valeurs dans $\Xi^{(m)}(E)$.

Si n = 1, la première égalité résulte de la propriété de Markov du processus Y, du lemme 2 et du lemme 4. Supposons que n≥2 et que l'égalité est vraie pour tout indice de 1 à n−1. Montrons qu'elle est aussi vraie pour l'indice n. Ecrivons $t = (t',t_n)$ avec $t' \in R_+^{n-1}$, $t_n \in R_+$ et $s = (s',s_n)$ avec $s' \in R_+^{n-1}$, $s_n \in R_+$. Soit $H \in F_{v,t}^{(m+n)}$ de la forme suivante :

$$H = H[(1_{u_i,p_i,q_i}^{(m+n)})],$$

avec $(u_i) \subset [0,v]$, $(p_i) \subset [0,t']$ et $(q_i) \subset [0,t_n]$. On a :

$$\begin{aligned} & E(\, f(Y_{u,s+t})\, H[(1_{u_i,p_i,q_i}^{(m+n)})](Y)\,) \\ & \quad = E(\, f(Y_{u,s'+t',s_n+t_n})\, H[(1_{u_i,p_i,q_i}^{(m+n)})](Y)\,) \\ & \quad = E(\, Q_{s_n} f(Y_{u,s'+t',t_n})\, H[(1_{u_i,p_i,q_i}^{(m+n)})](Y)\,) \end{aligned}$$

(propriété de Markov et le lemme 2)

$$\begin{aligned} & \quad = E(\, Q_{s_n} f(Y_{u,t_n,s'+t'})\, H[(1_{u_i,q_i,p_i}^{(m+n)})](Y)\,) \quad \text{(lemme 1)} \\ & \quad = E(\, Q_{|s'|} Q_{s_n} f(Y_{u,t_n,t'})\, H[(1_{u_i,q_i,p_i}^{(m+n)})](Y)\,) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ & \quad = E(\, Q_{|s|} f(Y_{u,t})\, H[(1_{u_i,p_i,q_i}^{(m+n)})](Y)\,). \end{aligned}$$

Grâce au théorème de classe monotone, cette identité s'étend à toute fonction borélienne bornée $H \in F_{v,t}^{(m+n)}$. La première égalité du lemme est prouvée. La deuxième égalité du lemme résulte de la première et du lemme 1. □

<u>**Lemme** 6</u> : <u>Soit</u> $n \in N$. <u>Posons</u>

$$Z_s = Z_s^{(n)}(E,\mu),\ V_{(n)} = V_{(n)}(E,\mu),\ F_s = F_s^{(n)} \text{ et } 1_\bullet = 1_\bullet^{(n)}.$$

<u>Soit</u> B <u>un sous-ensemble de</u> $\{1,...,n\}$. <u>Soit</u> s <u>un point de</u> $R_+^n$. <u>On dénote</u> $s_B$ <u>le regroupement des coordonnées de</u> s <u>dont les indices sont dans</u> B <u>et</u> $s_{\bar{B}}$ <u>le regroupement des coordonnées de</u> s <u>dont les indices sont en dehors de</u> B. <u>Soit</u> f <u>une fonction borélienne intégrable sur</u> E. <u>Posons</u>

$$M_s^f = E\Big( \int_{R_+^n} e^{-|u|} f(Z_u)\, du \;\Big|\; F_s \Big),$$

$$H_{B,s}^f = \prod_{i\in B} \int_0^{s_i} e^{-u_i}\, du_i \;\; U^{2(n-|B|)} \; f(Z_{u_B,\, s_{\bar B}})$$

$$= \int_0^{s_B} e^{-|u_B|}\, du_B \;\; U^{2(n-|B|)} \; f(Z_{u_B,\, s_{\bar B}}).$$

Alors,

$$M_s^f = \sum_{B\subset\{1,..,n\}} \exp(-|s_{\bar B}|)\, H_{B,s}^f .$$

Preuve : Cette formule résulte de l'identité suivante :

$$1_{R_+^n}(u) = \prod_{i\in\{1,...,n\}} (1_{[0,s_i]}(u_i) + 1_{]s_i,\infty[}(u_i))$$

$$= \sum_{B\subset\{1,..,n\}} \prod_{i\in B} 1_{[0,s_i]}(u_i) \prod_{j\notin B} 1_{]s_j,\infty[}(u_j) .$$

Utilisant cette identité et le lemme 5, on a alors :

$$M_s^f = E\Big( \int_{R_+^n} e^{-|u|} f(Z_u)\, du \;\Big|\; F_s \Big)$$

$$= E\Big( \sum_{B\subset\{1,..,n\}} \prod_{i\in B} \int_0^{s_i} e^{-u_i}\, du_i$$

$$\prod_{j\notin B} \int_0^{\infty} e^{-s_j-u_j} \; f(Z_{u_B,\, s_{\bar B}+u_{\bar B}})\, du_j \;\Big|\; F_{s_B,\, s_{\bar B}} \Big)$$

$$= \sum_{B\subset\{1,..,n\}} \exp(-\left|s_{\bar B}\right|) \prod_{i\in B} \int_0^{s_i} e^{-u_i}\, du_i \; U^{2(n-|B|)} f(Z_{u_B, s_{\bar B}}). \square$$

<u>Lemme</u> 7 : <u>Soient</u> $n\in N$. <u>Soit</u> f <u>une fonction borélienne de carré intégrable sur</u> E. <u>On a</u> :

$$N_2\Big(\int_{R_+^n} e^{-|u|}\, du \;\; f(Z_u)\Big) = N_2(U^n f).$$

<u>Preuve</u> : On a d'abord l'identité suivante :

$$1_{R_+^n}(u) = \prod_{i\in\{1,...,n\}} (1_{[0,v_i]}(u_i) + 1_{]v_i,\infty[}(u_i))$$

$$= \sum_{B\subset\{1,..,n\}} \prod_{i\in B} 1_{[0,v_i]}(u_i) \prod_{j\notin B} 1_{]v_j,\infty[}(u_j).$$

Utilisant cette identité, on a :

$$N_2\Big(\int_{R_+^n} e^{-|u|}\, du \;\; f(Z_u)\Big)^2$$

$$= \sum_{B\subset\{1,..,n\}} E\Big(\int_{u_B<v_B,\, u_{\bar B}>v_{\bar B}} e^{-|u|} e^{-|v|}\, du\, dv\, f(Z_u)\, f(Z_v)\Big)$$

$$= \sum_{B\subset\{1,..,n\}} E\Big(\int_{R_+^{2|B|}} e^{-2|u_B|} e^{-|v_B|}\, du_B\, dv_B$$

$$\int_{R_+^{2|\bar B|}} e^{-|u_{\bar B}|} e^{-2|v_{\bar B}|} \;\; du_{\bar B}\, dv_{\bar B}$$

$$f(Z_{u_B, u_{\bar B}+v_{\bar B}})\, f(Z_{v_B+u_B, v_{\bar B}})\Big)$$

$$= \sum_{B\subset\{1,..,n\}} \int_{R_+^{2|B|}} e^{-2|u_B|} e^{-|v_B|} du_B\, dv_B$$

$$\int_{R_+^{2|\bar{B}|}} e^{-|u_{\bar{B}}|} e^{-2|v_{\bar{B}}|} du_{\bar{B}}\, dv_{\bar{B}}$$

$$E\big( Q_{|u_B|} f(Z_{u_B,v_{\bar{B}}}) Q_{|v_B|} f(Z_{u_B,v_{\bar{B}}}) \big)$$

$$= N_2( U^n f )^2. \square$$

### §4 Inégalité entre $L^2$-norme et capacité-norme

Dans cette section, on fixe un espace de Fréchet séparable gaussien $(E,\mu)$. On fixe aussi un nombre naturel $n\in N$. On pose $Z = Z^{(n)}(E,\mu)$, $V = V_{(n)}(E,\mu)$, $F_s = F_s^{(n)}$, et $1_s = 1_s^{(n)}$, $s\in R_+^n$. On utilise le symbole $N_2$ pour désigner les $L^2$-normes sur différents espaces de probabilités (le contexte évitera la confusion).

**Théorème 1** : Pour toute fonction $u\in L^1(E,c_{n,2})$, la trajectoire $t \rightarrow u(Z_t)$, $t\in R_+^n$, est continue presque sûrement. De plus, il existe une constante $C_n$ dépendant de $n$ (ne dépendant pas de $(E,\mu)$) telle que :

$$(4,1,1) \qquad E[( \sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|} |u|(Z_t) )^2] \leq C_n\, c_{n,2}(u)^2.$$

Découpons la démonstration du théorème 1 en quelques lemmes.

**Lemme 2** : Il existe une constante $C_n$ dépendant de $n$ (ne dépendant pas de $(E,\mu)$) telle que

(4,2,1) $$E[(\sup_{t\in A} e^{-|t|}|u|(Z_t))^2] \le C_n\, c_{n,2}(u)^2,$$

pour tout sous-ensemble fini A de $R^n_+$, et pour toute fonction $u\in L^1(E,c_{n,2})$.

Preuve : Fixons un sous-ensemble fini A de $R^n_+$. Tout d'abord, on considère une fonction u qui est de la forme $u = U^{2n}f$ avec f une fonction de carré intégrable positive ou nulle. D'après le lemme §3,6, on a :

(4,2,2) $$e^{-|t|}\,U^{2n}f(Z_t) = M^f_t - \sum_{B\subset\{1,\dots,n\},B\neq\emptyset} \exp(-|t_{\bar{B}}|)\,H^f_{B,t}\,,\ t\in R^n_+.$$

Comme $H^f_{B,t} \ge 0$, on obtient $0 \le e^{-|t|}\,U^{2n}f(Z_t) \le M_t$ . En utilisant l'inégalité de martingale, on obtient l'estimation :

(4,2,3) $$(E[(\sup_{t\in A} e^{-|t|}\,u(Z_t))^2])^{1/2}$$

$$\le N_2(\sup_{t\in R^n_+} E(\int_{R^n_+} e^{-|s|} f(Z_s)\,ds \mid F_t))$$

$$\le C_n\ N_2(\int_{R^n_+} e^{-|s|} f(Z_s)\,ds)$$

$$= C_n\, N_2(U^nf) = C_n\, N_{n,2}(u), \quad \text{(lemme §3,7)}.$$

Considérons ensuite un (n,2)-potentiel $\Phi$ (voir Sugita [13]). Posons $\Phi_k = Q_{1/k}\Phi$, $k\in N$. Alors, $\Phi_k$ s'écrit sous forme de $\Phi_k = U^{2n}f_k$ avec $f_k$ une fonction de carré intégrable positive ou nulle et $\Phi_k$ converge vers $\Phi$ dans $W^{n,2}$. Puisque la loi de $Z_t$ est $\mu$ pour tout $t\in R^n_+$, l'inégalité (4,2,3) s'étend donc pour $\Phi$ :

(4,2,4) $$E[(\sup_{t\in A} e^{-|t|}\,\Phi(Z_t))^2] \le C_n\, N_{n,2}(\Phi)^2.$$

Soit maintenant $u\in L^1(E,c_{n,2})$ et soit $\Phi$ son (n,2)-potentiel. Alors, $\Phi \ge |u|$ $c_{n,2}$-quasi-partout et $c_{n,2}(u) = N_{n,2}(\Phi)$ (voir par exemple Song [12]). On a :

(4,2,7) $$E[(\sup_{t\in A} e^{-|t|}\, |u|(Z_t))^2]$$

$$\leq E[(\sup_{t\in A} e^{-|t|}\, \Phi(Z_t))^2]$$

$$\leq C_n\, N_{n,2}(\Phi)^2$$

$$= C_n\, N_{n,2}(u)^2.$$

Le lemme est prouvé. $\square$

__Lemme 3__ : __L'inégalité__ (4,1,1) __est vraie pour toute fonction__ s.c.i. __positive ou nulle et bornée__.

__Preuve__ : Soit u une fonction s.c.i. positive ou nulle bornée. il existe une suite croissante de fonctions continues positives ou nulles bornées $(u_k)$ telles que $u = \sup_k u_k$. On a :

$$\sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|}\, u(Z_t) = \sup_k\ \sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|}\, u_k(Z_t).$$

La continuité de chaque $u_k$ nous permet d'écrire :

$$E[(\sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|}\, u_k(Z_t))^2]$$

$$= \sup_{A\subset R_+^n,\ \text{fini}}\ E[(\sup_{t\in A} e^{-|t|}\, u_k(Z_t))^2].$$

D'où,

$$E[(\sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|}\, u(Z_t))^2]$$

$$= \sup_k\ \sup_{A\subset R_+^n,\ \text{fini}}\ E[(\sup_{t\in A} e^{-|t|}\, u_k(Z_t))^2]$$

$$\leq \sup_k\ C_n\, c_{n,2}(u_k)^2$$

$$= C_n\, c_{n,2}(u)^2.\ \square$$

**Lemme 4** : Soit B un sous-ensemble de E. Alors, pour tout $b \in R^n_+$, on a

$$P(\{\exists\, t \in [0,b], Z_t \in B\}) \le C_n\, e^{2|b|}\, c_{n,2}(B)^2.$$

Preuve : Il existe une suite $\{u_k\}$ de fonctions s.c.i. positives ou nulles telle que $u_k(x) \ge 1_B(x)$ pour tout $x \in E$, $k \in N$, et que $\inf_k c_{n,2}(u_k) = c_{n,2}(B)$. D'après les lemmes précédents, on a :

$$P(\{\exists\, t \in [0,b], Z_t \in B\})$$

$$\le \inf_k P[\{\sup_{t \in [0,b]} u_k(Z_t) \ge 1\}]$$

$$\le \inf_k C_n\, e^{2|b|}\, c_{n,2}(u_k)^2$$

$$= C_n\, e^{2|b|}\, c_{n,2}(B)^2.$$

Le lemme est prouvé. $\square$

**Lemme 5** : Pour toute fonction $u \in L^1(E, c_{n,2})$, $u(Z_t)$ est continue en $t \in R^n_+$ presque partout.

Preuve : Une telle fonction u est $c_{n,2}$-quasi-continue. Il existe une suite d'ensembles fermés $\{F_k\}$ tels que $\lim_n c_{n,2}(E - F_k) = 0$ et u est continue sur chaque $F_k$, $k \in N$. Soit $b \in R^n_+$ fixé. Pour chaque $k \in N$ fixé, pour tout $\xi \in \{\forall t \in [0,b]\,;\, Z_t \in F_k\}$, la trajectoire $t \to u(Z_t)(\xi)$ est continue sur $[0,b]$. Or, d'après le lemme 4, on a :

$$\lim_k P[\{\exists\, t \in [0,b]\,;\, Z_t \in E - F_k\}] = 0.$$

D'où,

$$P[\, u(Z_t) \text{ est discontinue }] = \sup_{b \in R^n_+} P[\, u(Z_t) \text{ est discontinue sur } [0,b]\,]$$

$$\le \sup_{b \in R^n_+} P[\cap_{k \in N} \{\exists\, t \in [0,b], Z_t \in E - F_k\}] = 0. \ \square$$

**Lemme 6** : L'inégalité (4,1,1) est vraie pour toute fonction $u \in L^1(E, c_{n,2})$.

Preuve : D'après le lemme 5, $e^{-|t|}\,|u|(Z_t)$ est continue en t presque sûrement. On peut donc écrire :

$$E[(\sup_{t\in R_+^n} e^{-|t|}\,|u|(Z_t)\,)^2]$$

$$=\sup_{A\subset R_+^n,\ \text{fini}}\ E[(\sup_{t\in A}\ e^{-|t|}\,|u|(Z_t)\,)^2]$$

$$\leq\ C_n\, c_{n,2}(u)^2\quad \text{(lemme 2).}$$

Le théorème 1 est prouvé. □

## §5 Inégalités entre $L^2$-norme et capacités-norme (suite)

Lemme 1 : Pour tout $n\geq 1$, pour tout $t\in R_+^n$, il existe une version $E_t^{(n)}$ de la probabilité conditionnelle sachant la tribu $F_t^{(n)}$ qui satisfait les conditions suivantes :

1° Pour toute fonction continue bornée f qui dépend d'un nombre fini de coordonnées, l'application $t\to E_t^{(n)}f(\xi)$ est continue pour tout $\xi\in\Xi^{(n)}$ et l'application $\xi\to E_t^{(n)}f(\xi)$ est continue pour tout $t\geq 0$.

2° $E_t^{(n)}$ commute avec $T_s^{(n)}$ et $V^{(n)}$ pour tout $t\in R_+^n$,, $s\geq 0$.

Preuve : Lorsque n = 1, l'énoncé du lemme est assez évident. Il résulte de la propriété de Markov du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et la continuité du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, et la formule de Mehler (voir Song [12]). Pour n >1, on peut utiliser le lemme §3,4 et le lemme §3,1 pour démontrer le lemme. □

Dans cette section, on fixe un nombre naturel n, et on utilise les même notations Z, V, $F_s$, $l_s$, etc, qu'on a introduit dans la section précédente. De plus, on pose $E_t = E_t^{(n)}$.

Théorème 2 : Il existe une constante $C_n$ telle que pour toute fonction borélienne de carré intégrable f, on a l'inégalité suivante :

$$N_2(\sup_{t\in R_+^n}\left|\int_{s\in[0,t]} e^{-s}\ f(Z_s^{(n)})ds\right|\,)\leq C_n\, N_2(U^n f).$$

Preuve : Si n = 1, on a

$$\int_{s\in[0,t]} e^{-s}\, f(Z_s^{(1)})ds = M_t^f - e^{-t}\, U^2 f(Z_t^{(1)}).$$

Appliquons le résultat du théorème §4,1, du lemme §3,7 et l'inégalité de martingale. On obtient

$$N_2(\sup_{t\in R_+}\left|\int_{s\in[0,t]} e^{-s}\, f(Z_s^{(1)})ds\right|)$$

$$\leq N_2(\sup_{t\in R_+}\left|M_t^f\right|) + N_2(\sup_{t\in R_+}\left|e^{-t}\, U^2 f(Z_t^{(1)})\right|)$$

$$\leq C_1\, [N_2(Uf) + c_{1,2}(U^2 f)]$$

$$\leq 2\, C_1\, N_2(Uf).$$

Supposons que le théorème 2 est démontré pour les indices de 1 à n − 1. D'après le lemme §3,6, on a

$$\int_{s\in[0,t]} e^{-|s|}\, f(Z_s)ds$$

$$= M_t^f - \sum_{B\subset\{1,\ldots,n\},\bar{B}\neq\emptyset} \exp(-\left|t_{\bar{B}}\right|)\, H_{B,t}^f,\quad t\in R_+^n.$$

La partie martingale $M_t$ ne pose pas de problème nouveau. Considérons $H_{B,t}^f$. Puisqu'il s'agit uniquement d'estimer l'intégrale du carré de $H_{B,t}^f$, d'après le lemme §3,1, on peut ne considérer que $H_{B,t}^f$ pour le sous ensemble $B = \{1,\ldots,k\}$, $k<n$. Posons

$$Y = Z^{(n-k)}(\Xi^{(k)}(E),\, m^{(k)}(E,\mu)),$$

considéré comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(k)}(E)$ à n−k paramètres. Posons ensuite:

$U_{(k)} = U(\Xi^{(k)}(E),\, m^{(k)}(E,\mu))$,
$c_{r,p}^{(k)}$ les capacités associées à $U_{(k)}$ sur $\Xi^{(k)}(E)$.

D'après le lemme 3,2, on a :

$$V[f\circ l_{s_B,\, t_{\bar{B}}}](\xi) = (Uf)(l_{s_B,\, t_{\bar{B}}}(\xi)) = U_{(k)}[f\circ l_{s_B}](l_{t_{\bar{B}}}(\xi)).$$

D'où,

$$H^f_{B,t} = U^{n-k}_{(k)} \left[\int_0^{t_B} (U^{n-k} f)(1_{s_B})\, e^{-|s_B|}\, ds_B\right](Y_{t_{\bar{B}}})$$

Posons :

$$G_B = \sup_{t_B \in R^k_+} \left| \int_0^{t_B} (U^{n-k} f)(Z^{(k)}_{s_B})\, e^{-|s_B|}\, ds_B \right|.$$

Alors, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$N_2(G_B) \leq C_k\, N_2(U^k U^{n-k} f) = C_k\, N_2(U^n f).$$

D'où :

$$N_2(\sup_{t \in R^n_+} \exp(-|t_{\bar{B}}|)\, |H^f_{B,t}|)$$

$$\leq N_2(\sup_{t_{\bar{B}} \in R^{n-k}_+} \exp(-|t_{\bar{B}}|)\, [U^{n-k}_{(k)}\, G_B](Y_{t_{\bar{B}}}))$$

$$\leq C_{n-k}\, c^{(k)}_{n-k,2}(U^{n-k}_{(k)}\, G_B)$$

$$\leq C_{n-k}\, N_2(G_B)$$

$$\leq C_n\, N_2(U^n f). \square$$

Pour terminer cette section, on démontre un résultat qui pourrait être intérèssant.

**Théorème 3** : Il existe une constante $C_n$ telle que pour tout ensemble fini A de $R^n_+$, pour toute fonction de carré intégrable f, pour tout $k \leq n$,

$$c^{(n)}_{k,2}(\sup_{t \in A} |M^f_t|) \leq C_n\, N_2(U^{n-k} f).$$

Preuve : Remarquons que

$$M_t^f = E_t\Big( \int_{R_+^n} e^{-|s|} f(l_s)\, ds \Big).$$

Supposons d'abord que f est de la forme $f = U^k g$, avec g une fonction borélienne de carré intégrable. Alors, d'après lemme §3,2, $f(l_s) = V^k(g \circ l_s)$. Il en résulte

$$\int_{R_+^n} e^{-|s|} f(l_s)\, ds \ = \ V^k \Big[ \int_{R_+^n} e^{-|s|}\, g \circ l_s\, ds \Big].$$

Comme V et $E_t$, $t \geq 0$, commutent, on obtient $M_t^f = V^k M_t^g$, $t \geq 0$. D'où,

$$c_{k,2}^{(n)}\big( \sup_{t\in A} \big|M_t^f\big| \big) \leq c_{k,2}^{(n)}\big( V^k \sup_{t\in A} \big|M_t^g\big| \big)$$

$$\leq N_2\big(\sup_{t\in A} \big|M_t^g\big| \big) \leq C_n\, N_2\big( \big|M_\infty^g\big| \big)$$

$$= C_n\, N_2(U^n g) = C_n\, N_2(U^{n-k} f).$$

On a prouvé le théorème dans le cas particulier. Le cas général peut être fait en passant à la limite. $\square$

## §6 Potentiels et mesures aléatoires

On utilise les mêmes symboles que ceux de la section 4. On montre dans cette section que toute mesure dans le dual du $W^{n,2}$ admet une représentation probabiliste.

<u>**Théorème**</u> **1**: <u>Soit</u> $\nu$ <u>une mesure dans le dual de</u> $W^{n,2}$. <u>Alors, il existe une mesure aléatoire</u> $A(\xi, ds)$ <u>sur</u> $R_+^n$, $\xi \in \Xi^{(n)}$, <u>telle que</u>

$$\int U^{2n} h(x)\, g(x)\, \nu(dx) = E\Big[ h(Z_0) \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|}\, g(Z_s)\, A(ds) \Big]$$

<u>pour toutes fonctions</u> g <u>et</u> h <u>boréliennes bornées sur</u> E.

<u>Preuve</u> : Si $\nu(dx) = f(x)dx$ avec $f \in L^2(E,\mu)$ positive ou nulle, on pose

$$A(\xi,ds) = f(Z_s(\xi))ds.$$

Alors, on a :

$$E[\, h(Z_0) \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|}\, g(Z_s)\, f(Z_s)ds\,]$$

$$= \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|}\, ds\, E[\, h(Z_0)\, g(Z_s)\, f(Z_s)\,]$$

$$= \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|}\, ds\, E[\, h(Z_0)\, Q_{|s|}(gf)(Z_0)\,]$$

$$= \int h(x)\, U^{2n}(gf)(x)\, \mu(dx)$$

$$= \int U^{2n}h(x)\, g(x)\, \nu(dx).$$

Soit maintenant $\nu$ un élément positif quelconque du dual de $W^{n,2}$. Posons $u = U^{2n}\nu$ et $u_k = Q_{1/k}u$, $k\in N$. Alors, $u_k$ est de la forme $u_k = U^{2n}f_k$, avec une fonction $f_k\in L^2(E,\mu)$ positive ou nulle, et $u_k$ tend vers u dans $W^{n,2}$. Appliquons le résultat du théorème §5,2. On a

$$N_2(\sup_{t\in R_+^n} \left| \int_{s\in [0,t]} e^{-s}\ (f_k-f_m)(l_s)ds \right| )$$

$$\leq C_n\, N_2(U^n(f_k-f_m)) = C_n\, N_{n,2}(u_k-u_m) \to 0,$$

quand k et m tendent vers l'infini. Il en résulte que, pour presque tout $\xi\in\ \Xi^{(n)}$, la suite de mesures $e^{-s}\, f_k(Z_s(\xi))ds$ converge étroitement, quitte à extraire une sous-suite, vers une mesure $e^{-s}\, A(\xi,ds)$. Alors, pour toutes fonction continues bornées g et h, on a :

$$E[\, h(Z_0) \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|}\, g(Z_s)\, A(ds)\,]$$

$$= \lim_k E[\, h(Z_0) \int_{s\in R_+^n} e^{-|s|}\, g(Z_s)\, f_k(Z_s)ds\,]$$

$$= \lim_k \int U^{2n}h(x)\, g(x)\, f_k(x)\mu(dx)$$

$$= \lim_k \int Q_{1/k}[gU^{2n}h](x)\, \nu(dx)$$

$$= \int U^{2n}h(x)\, g(x)\, \nu(dx).$$

Grâce au théorème de classe monotone, cette relation reste encore vraie pour toutes fonctions h, g boréliennes bornées sur E. Le théorème est démontré. $\square$

## §7 Une application

**Théorème 1** : Un ensemble borélien B est de $c_{n,2}$ - capacité nulle si et seulement si la probabilité pour $Z^{(n)}$ de rencontrer B est nulle.

Preuve : Rappelons que, pour tout ensemble borélien B, il existe une mesure $\nu$ dans le dual de $W^{n,2}$ telle que $c_{n,2}(B)^2 = \int U^{2n}\nu(x)\nu(dx)$ et que le support de $\nu$ est contenu dans la fermeture de B (cf. Sugita [13], Kazum-Shigekawa [8]). Alors, si B est un compact, la suffisance du théorème résulte du théorème §6,1. Pour un ensemble B quelconque, nous prouvons la suffisance du théorème en utilisant l'égalité suivante :

$$c_{n,2}(B) = \sup_{K \text{ compact},\, K\subset B} c_{n,2}(K).$$

Pour démontrer la nécessité du théorème, il suffit d'utiliser le lemme §4,4. $\square$

**Remerciement** : Je remercie F.Hirsch pour les discussions que j'ai eues avec lui sur les idées essentielles du présent travail et pour les nombreuses corrections qu'il a faites sur une version préliminaire.

## Références

[1] Albeverio,S., Ma,Z., Röckner,M. : Non-symmetric Dirichlet forms and Markov processes on general state space. Preprint. 1992.

[2] De La Pradelle,A., Feyel,D : Capacités Gaussiennes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble , 41, 1 (1991), 49-76

[3] Denis,L. : Comportement des martingales positives sur l'espace de Wiener vis-à-vis de la capacité. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, Série I pp. 771-773, 1992.

[4] Dynkin,E.B. Additive functionals of several time-reversible Markov processes. J.Funct. Anal., 42 (1981), 64-101.

[5] Evans,S.N. : Multiple points in the sample paths of a Lévy process. Probab. Th. Rel. Fields, 76 (1987), 359-367.

[6] Fitzsimmons,P.J., Salisbury,T.S. : Capacity and energy for multiparameter Markov processes. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.25, n°3, p.325-350, 1989.

[7] Fukushima,M. : Dirichlet forms and Markov processes. North-Holland-Kodansha. 1980.

[8] Kazumi,T., Shigekawa,I : Measures of finite (r,p)-energy and potentials on a separable metric space. Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics, 1526, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[9] Meyer,P.A. : Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Séminaire de Probabilités XVI, p.95-133, Lecture Notes in Mathematics, n°920, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[10] Proceedings, Paris 1980 : Processus aléatoires à deux indices. Lecture Notes in Mathematics. 863. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York.

[11] Ren,J. : Topologie p-fine sur l'espace de Wiener et théorème des fonctions implicites. Bull.Sc.Math.,2e série ,114 (1990),99-114.

[12] Song,S : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et ensembles $W^{2,2}$-polaires. Preprint, 1992.

[13] Sugita, H. : Positive generalized Wiener functions and potential theory over abstract Wiener spaces. Osaka J. Math. 25 (1988), 665-696.