MICHEL WEBER

Opérateurs réguliers sur les espaces L^p

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 207-215
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__207_0>

OPERATEURS REGULIERS SUR LES ESPACES L^p .

MICHEL WEBER

Résumé. — *Nous étendons le critère d'entropie de J. Bourgain [1] au cas de suites d'opérateurs définis sur des espaces $L^p(\mu)$ avec $1 < p \leq 2$. Nous obtenons, à l'aide d'une technique de randomisation analogue à celle introduite par E. M. Stein dans l'étude du principe de continuité, et en utilisant les propriétés des fonctions aléatoires p-stables, un critère d'entropie similaire contrôlant le fait que pour un $0 < r < p$ et tout $f \in L^r(\mu)$, la suite $\{S_n(f), n \geq 1\}$ soit μ-p.s. bornée.* .

1 Introduction-Enoncé.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Dans [4], nous obtenions une extension du critère d'entropie de Bourgain [1] et en donnions une preuve simple et directe. Ce critère concerne la régularité de suites d'opérateurs définis sur les espaces $L^p(\mu)$ avec $2 \leq \mu < \infty$, et utilise la notion de GB ensemble. Rappelons à ce propos, qu'une partie K non vide d'un espace de Hilbert H est un GB (resp. GC) ensemble, si le processus isonormal Z sur H, c'est à dire le processus gaussien indexé sur H, dont la covariance est donnée par le produit scalaire, possède une version à trajectoires bornées sur K (resp. continues en norme sur K). Rappelons maintenant l'énoncé de ce critère.

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$, avec μ-continus, et commutant avec une suite d'isométries $\{T_j, j \geq 1\}$ positives, de $L^2(\mu)$, préservant 1, et vérifiant le théorème ergodique en moyenne dans $L^1(\mu)$:*

$$(1.1) \qquad \forall f \in L^1(\mu), \qquad \lim_{J\to\infty} J^{-1} \sum_{j\leq J} T_j f = \int f d\mu, \ dans\ L^1(\mu).$$

On suppose que

(1.2) *pour tout $f \in L^p(\mu)$, la suite $\{S_n(f), n \geq 1\}$est bornée presque sûrement.*

Alors les ensembles $C_f = \{S_n(f), n \geq 1\}$ sont des GB ensembles. En particulier, il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout $f \in L^p(\mu)$,

$$(1.3) \qquad \sup\{\epsilon\sqrt{\log N_f^2(\epsilon)}, \epsilon > 0\} \leq C\|f\|_2$$

où $N_f^2(\delta)$ désigne le nombre minimal de boules hilbertiennes de rayon δ suffisant pour recouvrir C_f.

Dans [5], nous obtenions une extension dans $L^{\infty}(\mu)$ de ce critère et l'appliquions aux rotations sur le tore. Introduisons les éléments de Stein

$$F_{J,f}(\omega,x)=\frac{1}{\sqrt{J}}\sum_{j\leq J}g_j(\omega)T_j(f)(x)$$

où $g_1,\cdots,g_n$ est une suite isonormale définie sur un autre espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{B},P)$. Cette extension requérait sur ces éléments un contrôle de leurs normes-sup. Supposons qu'en fait $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ soit un espace métrique compact et que pour une distance continue d

(1.4) *il existe une probabilité de Radon π sur X, telle que :*

$$\sup_{x\in X}\int_0^{diam(X,d)}\sqrt{\log\frac{1}{\pi(y:\ d(x,y)\leq u)}}\,du\quad<\infty\cdot$$

Soit τ un endomorphisme ergodique sur $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$, et associons à tout $f\in L^{\infty}$, l'écart

$$\forall x,x'\in X,\quad D_f(x,x')=\sup_{J\geq 1}\sqrt{\frac{1}{J}\sum_{j\leq J}\{f\circ\tau^j(x)-f\circ\tau^j(x')\}^2}$$

THÉORÈME 1.2. — *Soit $\{S_n,n\geq 1\}$ une suite d'opérateurs linéaires μ-continus sur $L^2(\mu)$, et commutant avec τ. Supposons que*

(1.5) $\qquad$ *$\forall f\in L^{\infty}(\mu)$, la suite $\{S_n(f),n\geq 1\}$ soit bornée $\mu-p.p.$,*

alors pour tout f telle que

$$\forall x,x'\in X,\qquad D_f(x,x')\leq d(x,x'),$$

les ensembles $C_f=\{S_n(f),n\geq 1\}$ sont des GB ensembles de $L^2(\mu)$. En particulier, si $\tau\in Lip(d)$, alors pour tout $f\in Lip(d)$, C_f est un GB ensemble de $L^2(\mu)$.

Comme application, nous obtenions le

COROLLAIRE 1.3. — *Soit $\Pi^d=[0,1[^d$ le tore d-dimensionnel muni de la mesure de Haar λ_d et soit $\tau_\theta=(T_{\theta_1},\cdots,T_{\theta_d})$ une rotation telle que $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_d)$ soit à coordonnées rationnellement indépendantes. Soit alors $\{S_n(f),n\geq 1\}$ une suite d'opérateurs sur $L^2(\lambda_d)$-continus et commutants avec τ_θ. Supposons que (1.5) soit réalisée. Alors pour tout $f\in Lip(d)$, C_f est GB ensemble de $L^2(\lambda_d)$.*

Considérons maintenant une suite d'opérateurs linéaires, μ-continus, $\{S_n,n\geq 1\}$ définis sur $L^p(\mu)$, $1<p\leq 2$, et satisfaisant le condition de bornitude (3.1). Peut-on ici aussi, en déduire un contrôle sur l'entropie métrique des sous-ensembles C_f de $L^p(\mu)$? Nous y répondons de façon affirmative en démontrant le critère suivant :

THÉORÈME 1.4. — *Soient $1 < p \leq 2$ et $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs linéaires de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu)$, μ-continus. Supposons qu'il existe un endomorphisme ergodique τ sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$, commutant avec les $S_n, n \geq 1$. Si, pour un $0 < r < p$ on a :*

(1.6) *pour tout $f \in L^r(\mu)$, la suite $\{S_n(f), n \geq 1\}$ est $\mu - p.s.$ bornée.*

Alors, pour tout $f \in L^p(\mu)$,

$$\sup\{\epsilon\{\log N_f^p(\epsilon)\}^{\frac{1}{q}}, \epsilon > 0\} \leq C(r,p)\|f\|_p, \tag{1.7}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N_f^p(\epsilon)$ désigne le nombre minimal de L^p-boules de rayon ϵ suffisant pour recouvrir C_f, et $0 < C(r,p) < \infty$ est une constante ne dépendant que de r et p et de la suite d'opérateurs $\{S_n, n \geq 1\}$, et tendant vers l'infini quand r tend vers p.

2. Démonstration

Notons pour tout $j \geq 1$, par T_j l'opérateur normal associé à τ^j. Nous allons modifier les éléments de Stein. Soit $\{\theta_i\, i \geq 1\}$ une suite de v.a.r. indépendantes, équidistribuées, p-stables, symétriques, de paramètre 1 et d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P) \otimes (\Omega', \mathcal{A}', P')$, (on note $\widetilde{P} = P \otimes P'$ dans la suite). Pour tout $f \in L^p(\mu)$, tout $J \geq 1$, tout $x \in X$, on pose

$$F^p_{f,J}(\omega, \omega', x) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \theta_j(\omega, \omega')(T_j f)(x) \tag{2.1}$$

Alors $F^p_J = \{F^p_{f,J}(\omega, \omega', x),\ x \in X\}$ détermine une fonction aléatoire p-stable de mesure spectrale

$$m = \sum_{j \leq J} \delta_{T_j f}$$

On peut représenter F^p_J comme un mélange aléatoire de fonctions aléatoires gaussiennes; c'est une propriété classique. Plus exactement, suivant [3], remarque 1.8, p. 261, il existe une suite de v.a.r. gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et une suite de v.a.r. positives, i.i.d. $(\eta_j, j \geq 1)$, d'espace d'épreuves $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ telles que la fonction aléatoire H^p_J définie par

$$H^p_{J,f}(\omega, \omega', x) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \eta_j(\omega) g_j(\omega')(T_j f)(x),$$

a même loi que F^p_J. Observons tout d'abord que pour tout $r < p$,

$$\mathsf{E}(|F^p_J|^r) = \mathsf{E}(|\theta_1|^r)\Big(\frac{1}{J} \sum_{j \leq J} |T_j f|^p\Big)^{\frac{r}{p}},$$

puisque

$$\frac{1}{J^{\frac{1}{p}}}\sum_{j\leq J}\theta_j T_j f \overset{\mathcal{D}}{=} \theta_1\Big(\frac{1}{J}\sum_{j\leq J}|T_j f|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $f \in L^\infty(\mu)$. A l'aide du théorème de Birkhoff, et du théorème de convergence dominée on obtient :

$$\lim_{J\to\infty}\int\Big(\frac{1}{J}\sum_{j\leq J}|T_j f|^p\Big)^{\frac{r}{p}}\,d\mu = \Big(\int |f|^p\,d\mu\Big)^{\frac{r}{p}}.$$

D'où, pour tout J assez grand,

$$\int \mathbf{E}(|F_J^p|^r)\,d\mu \leq 2^r\mathbf{E}(|\theta_1|^r)||f||_p^r.$$

Ainsi, pour tout J assez grand, et $r < p$

$$||F_J||_{r,\mu\otimes\widetilde{P}} \leq 2||\theta_1||_r||f||_{p,\mu}.$$

En argumentant alors comme suivant les alinéas (2.2) à (2.4) de [4], on tire du principe de Banach et des hypothèses faites, que pour tout $\epsilon > 0$, tout J assez grand, il existe un ensemble mesurable $X_\epsilon^J \subset X$, tel que $\mu(X_\epsilon^J) \geq 1-\sqrt{\epsilon}$, et un réel $0 < C(\epsilon) < \infty$, tels que

$$\text{(2.2)}\qquad \forall x\in X_\epsilon^J,\quad \widetilde{P}\{\sup_{n\geq 1}|S_n(F_{J,f})| \leq C(\epsilon)||\theta_1||_r||f||_{p,\mu}\} \geq 1-2\sqrt{\epsilon}.$$

D'où :

$$\text{(2.3)}P'\{\omega' : P\{\sup_{n\geq 1}|S_n(F_{J,f}(\omega,\omega',x))| \leq C(\epsilon)||\theta_1||_r||f||_{p,\mu}\} \geq 1-\sqrt{\epsilon}\} \geq 1-3\sqrt{\epsilon}.$$

En vertu de l'évaluation 2.3.3 de [2] sur les semi-normes gaussiennes, on a alors sur X_ϵ^J, pour tout $0<\epsilon<\frac{1}{4}$, en notant $\mathbf{E}_{(P)}$le symbole d'intégration par rapport à P,

$$\text{(2.4)}\qquad 1-\sqrt{\epsilon} \leq P'\{\omega' : \mathbf{E}_{(P)}\{sup_{n\geq 1}|S_n(F_{J,f}(.,\omega',x))|\} \leq \frac{4C(\epsilon)}{1-\sqrt{\epsilon}}||\theta_1||_r||f||_{p,\mu}\},$$

Considérons la fonction aléatoire p-stable indexée sur les entiers et définie par :

$$S_n(F_{J,f}^p) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}}\sum_{j\leq J}\theta_j S_n(T_j(f)),\quad n\geq 1,$$

égale aussi grâce à l'hypothèse de commutation à

$$S_n(F^p_{J,f}) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \le J} \theta_j T_j(S_n(f)), \quad n \ge 1,$$

Elle a donc même loi que la fonction aléatoire p-stable ci-dessous :

$$H^p_J(n) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \le J} \eta_j g_j T_j(S_n(f)), \quad n \ge 1,$$

Introduisons l'écart aléatoire gaussien sur $\mathbb{N}$

$$d_{J,\omega',x}(n,m) = \left[\frac{1}{2}\mathbb{E}_{(P)}(H^p_J(n) - H^p_J(m))^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

ainsi que l'écart associé à H^p_J :

$$d_{J,x}(n,m) = \left(\frac{1}{2}\int |\beta(n) - \beta(m)|^p dm_{H^p_J}(\beta)\right)^{\frac{1}{p}},$$

où $m_{H^p_J}$ désigne la mesure spectrale de H^p_J. Pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$, tout écart d sur $\mathbb{N}$, tout $\epsilon > 0$, on notera $N(A,d,\epsilon)$ le cardinal minimal d'un recouvrement de A par des d-boules de rayon ϵ, centrées dans A. De même, $\sigma(A,d,n)$ est la fonction définie pour chaque entier n comme étant le plus petit nombre $\epsilon > 0$ tel que A puisse être recouvert par au plus n d-boules de rayon ϵ centrées dans A. En vertu de [4], lemme 2.1, p. 263, on peut assigner un ensemble mesurable Ω'_o tel que $P'\{\Omega'_o\} > \frac{1}{2}$; (en fait les mêmes calculs montrent que sa mesure peut être choisie arbitrairement proche de 1 ; et on supposera pour la *seule* commodité de l'exposé que $P'\{\Omega'_o\} > 1 - \sqrt{\epsilon}$), tel que :

$$\forall \omega' \in \Omega'_o, \forall n \ge 1, \sigma(\mathbb{N}, d_{J,\omega',x}, n) \ge \beta(p)\frac{\sigma(\mathbb{N}, d_{J,x}, n)}{(log(n+1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}, \tag{2.5}$$

On en déduit à l'aide de (2.4) et de la minoration de Sudakov, que pour tout $x \in X^J_\epsilon$, on a :

$$\frac{4C(\epsilon)}{1-\sqrt{\epsilon}}||\theta_1||_r||f||_{p,\mu} \ge \gamma(p) \sup_{\delta>0} \delta\Big(logN(\mathbb{N}, d_{J,x}, \delta)\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.6}$$

où $\gamma(p) > 0$. Soit $\bar{N}$ une partie finie de $\mathbb{N}$. En vertu des hypothèses faites, on peut trouver un index partiel $\mathcal{J}$ dépendant de $\bar{N}$ tel que :

$$\mu\{\forall j \in \mathcal{J}, \forall n,m \in \bar{N}, d_{J,x}(n,m) \ge \delta(p)||(S_n - S_m)(f)||_{p,\mu}\} \ge 1 - \sqrt{\epsilon}, \tag{2.7}$$

où $\delta(p) > 0$. En combinant (2.6) et (2.7), on obtient :

$$C(\epsilon)||\theta_1||_r||f||_{p,\mu} \ge \epsilon(p) \sup_{\delta>0} \delta\Big(logN(\bar{N}, ||.||_{p,\mu}, \delta)\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.8}$$

oú $\epsilon(p) > 0$. On conclut en faisant tendre $\bar{N}$ vers $\mathbb{N}$. On en déduit le résultat annoncé pour tout élément g de $L^p(\mu)$ en procédant par approximation.

3. Cas des procédés de sommation.

Dans le cas où les opérateurs S_n sont définis à partir de procédés de sommation matricielles, on peut renforcer très nettement l'énoncé du théorème 1.4. Soit $A = \{a_{n,k}, n, k \geq 1\}$ une matrice infinie de réels. Soit $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de LEBESGUE et notons $\mathcal{T}$ le groupe des automorphismes de $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$. Posons formellement

$$\forall T \in \mathcal{T}, \forall f \in L^p(\mu), \forall n \geq 1, \ S_n^T f = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \, f \circ T^k \, . \tag{3.1}$$

Etant donnée une suite $\{b_n, \, n \geq 1\}$ de réels, l'écriture formelle

$$\forall f \in L^p(\mu) \ , \ \sigma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, f \circ T^k \, . \tag{3.2}$$

détermine en vertu du théorème de la borne uniforme un opérateur linéaire comme L^p-limite des opérateurs continus $\sigma_N(f) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, f \circ T^k$, $N \geq 1$, si et seulement si $\sup_{N \geq 1} \| \sigma_N \| < \infty$; et alors σ lui même est continu. Ici nous allons simplement supposer que $\mathcal{A} = \{a_n = \{a_{n,k}, k \geq 1\}, n \geq 1\}$ est borné dans l_1 ; et donc les opérateurs S_N^T sont toujours L^p-continus, $p \leq \infty$· Nous montrons

THÉORÈME 3.1. —

i) $(2 \leq p < \infty)$ *Si pour un automorphisme ergodique* T

$$\forall f \in L^p(\mu), \quad \{S_n^T(f), \, n \geq 1\} \text{ est borné p.s.}, \tag{3.3}$$

alors nécessairement,

$$\sup_{S \in \mathcal{T}} \ \sup_{f \in L^p(\mu), \|f\|_2 \leq 1} \mathbb{E}\Big(\sup_{n \geq 1} | \, Z(S_n^S(f)) \, |\Big) < \infty, \tag{3.4}$$

où Z est le processus isonormal sur $L^2(\mu)$.

Si, plus particulièrement $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ est un espace produit $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)^{\otimes \mathbb{Z}}$, alors $\mathcal{A}$ est un GB ensemble de l_2.

ii)$(1 < p \leq 2)$ *Si pour un automorphisme ergodique T et pour un $0 < r < p$*

$$\forall f \in L^r(\mu), \quad \{S_n^T(f), \, n \geq 1\} \text{ est borné p.s.}, \tag{3.5}$$

alors nécessairement,

$$\sup_{S \in \mathcal{T}} \ \sup_{f \in L^p(\mu), \|f\|_2 \leq 1} \ \sup\{\epsilon \{\log N_{f,S}^p(\epsilon)\}^{\frac{1}{q}}, \epsilon > 0\} \leq C(r,p), \tag{3.6}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N_{f,S}^p(\epsilon)$ désigne le nombre minimal de L^p-boules de rayon ϵ suffisant pour recouvrir $\{S_n^S f, n \geq 1\}$, et $0 < C(r,p) < \infty$ est une constante ne dépendant que de r et p et tendant vers l'infini quand r tend vers p.

Note : les conditions (3.4), (3.6) sont fortes. En effet, du critère de BOURGAIN [1] on tire immédiatement par exemple (3.4) sans le passage au sup sur $\mathcal{T}$. Il suffit d'ailleurs ([4], théorème 3.1) que les S_n soient simplement continus en mesure. L'intérêt supplémentaire de (3.4) réside dans la contrôle uniforme sur $\mathcal{T}$ de la propriété GB qu'elle indique. Donnons-en brièvement la preuve, l'autre inégalité se traitant de manière similaire.

Du principe de BANACH , on tire que pour un $K < \infty$ que

$$\sup_{f\in L^p(\mu),\|f\|_p\leq 1} \mu\Big(\sup_{n\geq 1} | S_n^T(f) |> K\Big) \leq \frac{1}{8}. \tag{3.5}$$

Soit maintenant T^* le sous-groupe distingué associé à T. Par le lemme de conjugaison , T^* est faiblement dense dans $\mathcal{T}$, si T est apériodique, donc *a fortiori* si T est ergodique. De plus

$$S_n^{R^{-1}TR}(f) = R^{-1}\Big(S_n^T f\Big)\, R\cdot \tag{3.6}$$

Ceci montre comme dans [4], avec la même constante K que dans (3.5)

$$\sup_{S\in\mathcal{T}}\ \sup_{f\in L^p(\mu),\|f\|_p\leq 1} \mu\Big(\sup_{n\geq 1} | S_n^S(f) |> K\Big) \leq \frac{1}{8}\ \cdot \tag{3.7}$$

A l'aide de l'estimation (2.8) dans [4], il est maintenant aisé de conclure à (3.4). Dans le cas des espaces produits, prenons

$$f\in 1_\nu^\perp,\ \|f\|_2 = 1,\ f\in L^p(\mu)$$

et observons que $\|(S_n^T - S_{n'}^T)\|_{2,\mu} = \|a_n - a_{n'}\|_2$, qui amène facilement par (3.4) la propriété pour $\mathcal{A}$.

Lorsque les procédés de sommation décrits au paragraphe précédents vérifient de plus

$$\forall n\geq 1,\ S_n(f) = \sum_{k=1}^{N_n} a_{n,k} f\circ T^k, \tag{3.8}$$

où les $N_n, n\geq 1$, sont des entiers positifs, la propriété (3.3) se traduit directement sur la suite $\mathcal{A} = \{a_n = \{a_{n,k}, 1\leq k\leq N_n\}, n\geq 1\}$. On peut en effet démontrer l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Soit $\{S_n, n\geq 1\}$ une suite d'opérateurs définis par (3.1) et satisfaisant la condition (3.8). Alors,*

i) $(2\leq p<\infty)$ Si pour un automorphisme ergodique T

$$\forall f\in L^p(\mu),\quad \{S_n^T(f),\ n\geq 1\}\ \textit{est borné p.s.}, \tag{3.3}$$

alors nécessairement,

$$(3.9) \qquad \mathcal{A} \textit{ est un } GB - \textit{ensemble de } l_2.$$

ii)$(1 < p \leq 2)$ *Si pour un automorphisme ergodique* T *et pour un* $0 < r < p$

$$(3.5) \qquad \forall f \in L^r(\mu), \quad \{S_n^T(f), n \geq 1\} \textit{ est borné p.s.},$$

alors nécessairement,

$$(3.10) \qquad \sup\{\epsilon\{\log N^p(\mathcal{A}, \epsilon)\}^{\frac{1}{q}}, \epsilon > 0\} < \infty$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N^p(\mathcal{A}, \epsilon)$ *désigne le nombre minimal de* L^p*-boules de rayon* ϵ *suffisant pour recouvrir* $\mathcal{A}$.

Démonstration : A l'aide du lemme de Rokhlin-Halmos-Kakutani, pour tout $\epsilon > 0$, tout $N \geq 0$, il existe A ensemble mesurable tel que $A, TA, \cdots, T^{N-1}A$, soient deux à deux disjoints et $\frac{1-\epsilon}{N} \leq \mu(A) \leq \frac{1}{N}$. On pose $f = 1_A$. Soient n, m tels que $N_n \leq N_m \leq N$. Alors :

$$\begin{aligned} ||S_n(f) - S_m(f)||_{2,\mu} &= ||\sum_{k=1}^{N_n}(a_{n,k} - a_{m,k})f \circ T^k + \sum_{k=N_n+1}^{N_m} a_{m,k} f \circ T^k||_{2,\mu} \\ &= [\sum_{k=1}^{N_n}(a_{n,k} - a_{m,k})^2 + \sum_{k=N_n+1}^{N_m} a_{m,k}^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= ||a_n - a_m||_2 \sqrt{\mu}(A). \end{aligned}$$

Notons pour toute partie B de $\mathbb{N}$, tout écart d sur $\mathbb{N}$ et tout $\epsilon > 0$, par $N(B, d, \epsilon)$, le cardinal minimal d'un recouvrement de B par des d-boules de rayon ϵ, centrées dans B. A l'aide de l'estimation (2.8) de [4], il existe un nombre K indépendant de A tel que :

$$K\sqrt{\mu(A)} \geq \sup_{\delta > 0} \delta \sqrt{log\ N(C_f, ||.||_2, \delta)}.$$

Mais,

$$\begin{aligned} N(C_f, ||.||_{2,\mu}, \epsilon) &\geq N(\{S_m(f) : N_m < N\}, ||.||_{2,\mu}, \epsilon) \\ &= N(\{a_m : N_m < N\}, \sqrt{\mu(A)}||.|_2, \epsilon). \end{aligned}$$

D'où,

$$K\sqrt{\mu(A)} \geq \sup_{\delta > 0} \delta \sqrt{log\ N(\{a_m : N_m < N\}, \sqrt{\mu(A)}||.|_2, \delta)}.$$

Si $\delta = \epsilon\sqrt{\mu(A)}$, on obtient,

$$K \geq \sup_{\epsilon>0} \epsilon\sqrt{log\ N(\{a_m : N_m < N\}, ||.||_2, \epsilon)},$$

le résultat (3.9) s'en suit en faisant tendre N vers l'infini. Enfin, (3.10) s'obtient en argumentant de façon similaire. □

References

[1]BOURGAIN, J. *Almost sure convergence and bounded entropy.* Israël J. Math. V. 63, no 63, p. 79-95, (1988).

[2] FERNIQUE, X. *Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens* . Expo. Math. V. 8, p. 289-364 (1990).

[3] MARCUS, M.B., PISIER, G. *Characterizations of almost surely p-stable random Fourier series and strongly stationary processes.* Acta mathematica, V. 152, p. 245-301,(1984).

[4] SCHNEIDER, D., WEBER, M. *Une remarque sur un théorème de Bourgain.* preprint, (1991).

[5] WEBER, M.*GC sets, Stein's elements and matrix summation methods.* preprint, (1992).

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cedex