SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC ARNAUDON

Propriétés asymptotiques des semimartingales à valeurs dans des variétés à bord continu

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 182-201

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__182_0>

Propriétés asymptotiques des semi-martingales à valeurs dans des variétés à bord continu

Marc Arnaudon

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.

Résumé

Dans la première partie, on considère une semi-martingale continue et convergente, à valeurs dans une variété C^∞ munie d'une connexion, et on détermine une condition sur la direction de la dérive pour que la semi-martingale soit une semi-martingale jusqu'à l'infini. On applique ensuite cette condition aux martingales réfléchies convergentes dans des variétés à bord continu, avec des réflexions au bord vérifiant certaines propriétés de régularité, et en particulier aux martingales normalement réfléchies dans des variétés riemanniennes à bord convexe.

Dans la deuxième partie, on étudie les semi-martingales de crochet fini dans une variété riemannienne, et on montre que, soit elles convergent dans les compacts inclus dans des ouverts où la dérive s'annule, soit elles les quittent définitivement. On applique ensuite ce résultat à l'étude des martingales réfléchies à valeurs dans des variétés à bord pour montrer que, soit il y a convergence dans l'intérieur, soit il y a convergence vers le bord ou le point à l'infini du compactifié d'Alexandroff est valeur d'adhérence, les deux dernières possibilités ne s'excluant pas mutuellement. On montre enfin que dans une variété compacte à bord convexe sur lequel tous les vecteurs normaux sont entrant, une martingale normalement réfléchie et de crochet fini est convergente.

Introduction

Toutes les semi-martingales étudiées ici seront supposées continues. Un résultat de Zheng ([Z]) affirme qu'une martingale à valeurs dans une variété munie d'une connexion est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur l'événement où elle converge. Emery fait une démonstration ([E1 4.48]) à l'aide d'un système de coordonnées convexes au voisinage de chaque point. Les coordonnées de la martingale sont alors des sous-martingales bornées convergentes, donc des semi-martingales jusqu'à l'infini. Dans un article précédent ([A]), cette méthode était utilisée pour démontrer le même résultat avec des martingales à valeurs dans des variétés à bord dont la direction de réflexion sur le bord ne s'approchait pas trop de l'espace tangent au bord. Une démonstration identique sera utilisée ici pour prouver (proposition 1) qu'une semi-martingale à valeurs dans une variété munie d'une connexion est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur l'événement où elle converge et où la dérive reste asymptotiquement dans un cône saillant. La condition sur la dérive porte uniquement sur sa direction, et la propriété recherchée est qu'un choix de carte permette à l'une des coordonnées de la semi-martingale de devenir une sous-martingale bornée, alors que la partie à variation finie des autres coordonnées sera contrôlée par celle de la première. Ce résultat est motivé par l'étude des martingales à valeurs dans des variétés dont le bord ne serait plus C^∞, mais seulement convexe par exemple. On démontre dans ce cas (corollaire 6) que si la martingale se réfléchit normalement et est convergente, c'est une semi-martingale jusqu'à l'infini, en remarquant que les vecteurs normaux au bord restent localement dans un demi-espace.

On s'intéresse ensuite à une semi-martingale de variation quadratique finie dans une variété riemannienne. Darling a démontré ([D]) que s'il s'agit d'une martingale, elle converge dans le compactifié d'Alexandroff. On supposera ici que la dérive s'annule seulement lorsque la semi-martingale est dans un ouvert de la variété, et on étudiera le comportement dans les compacts inclus dans cet ouvert (proposition 7). En démontrant que soit il y a convergence dans un compact, soit le processus quitte le compact définitivement, on voudrait déduire des résultats sur les martingales réfléchies dans une variété à bord. Dans le cas d'un bord C^∞, on sait ([A]) que si la dérive reste asymptotiquement dans un cône saillant, il y a convergence dans le compactifié d'Alexandroff. Si le bord n'est pas de classe C^∞, on va chercher une fonction f bornée ainsi que ses dérivées d'ordre 1 et 2, qui croît suffisamment à chaque réflexion pour que l'on puisse contrôler la norme de la dérive, et aboutir au même résultat. On donne une telle fonction dans le cas de la réflexion normale dans une variété compacte à bord localement graphe de fonction convexe et sur lequel tous les vecteurs normaux sont entrant.

Toutes les variétés seront supposées séparables. Comme dans [E1], [M] et [S], une connexion sur une variété N désignera un opérateur F qui à un vecteur d'ordre 2 associe sa partie d'ordre 1. En coordonnées locales, on notera $F(D_i) = D_i$, et $F(D_{ij}) = \Gamma_{ij}^k D_k$, où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christofell. On reprendra les notations de [E1] et [A]. Le lien avec ∇ est $F(AB) = \nabla_A B$ pour tous A et B champs de vecteurs d'ordre 1. Si f est une fonction de classe C^∞ sur N, on notera

$$\operatorname{Hess} f(A \otimes B) = \nabla_A df(B) = ABf - \nabla_A Bf = ABf - F(AB)\, f.$$

Pour tout x dans N, on notera $d^2 f(x)$ la forme d'ordre 2 qui à λ, un vecteur d'ordre 2 associe $\langle d^2 f(x), \lambda\rangle = \lambda(f)$.

Si X est une semi-martingale continue à valeurs dans N, on notera $\mathcal{D}X$ sa différentielle d'ordre 2. Elle admet la décomposition $\mathcal{D}X = d\overset{m}{X} + \mathcal{D}\tilde{X}$, où $\mathcal{D}\tilde{X}$ est un vecteur formel d'ordre 2 qui désigne les caractéristiques locales de la martingale

([M], [S]), et $\overset{m}{dX}$ est un vecteur formel d'ordre 1. En coordonnées locales, si on note $X^i = M^i + A^i$ la décomposition de X^i en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie, on a

$$\mathcal{D}X = dX^i D_i + \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j\rangle D_{ij},$$

$$\mathcal{D}\tilde{X} = dA^i D_i + \frac{1}{2} d\langle M^i, M^j\rangle D_{ij}, \text{ et } \overset{m}{dX} = dM^i D_i.$$

Pour toute fonction f de classe C^∞ sur N, on a la décomposition

$$f(X) - f(X_0) = \int_0 \langle d^2 f(X), \mathcal{D}X\rangle = \int_0 \langle df(X), \overset{m}{dX}\rangle + \int_0 \langle d^2 f(X), \mathcal{D}\tilde{X}\rangle$$

en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie. On notera $d\tilde{X} = F(\mathcal{D}\tilde{X})$. Cela donne

$$\langle d^2 f(X), \mathcal{D}\tilde{X}\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Hess} f(dX \otimes dX) + \langle df(X), d\tilde{X}\rangle.$$

Si X est une semi-martingale réelle sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ et $A \in \mathcal{F}$, on dira que X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A si son crochet et la variation totale de sa partie à variation finie convergent sur A. Ceci revient à dire que X est une semi-martingale jusqu'à l'infini pour la probabilité $P[\cdot|A]$ ([E2]). Si X est une semi-martingale à valeurs dans N, on dira que X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A si pour toute fonction $f \in C^\infty(N)$, $f(X)$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A.

Soient N une variété de classe C^∞, de dimension n, munie d'une connexion F, et X une semi-martingale continue, à valeurs dans N. En se restreignant à l'événement où X converge, on va déterminer une condition sur la dérive pour que X soit une semi-martingale jusqu'à l'infini.

Définitions. *Soient V le domaine d'une carte ϕ et λ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. On notera $A(V, \lambda, p, k)$ pour p et k entiers naturels ($p \neq 0$), l'événement*

$$\{X \textit{ converge dans } V\} \cap \left\{\forall\, s > k,\ \left\langle \lambda, \phi_*\left(d\tilde{X}_s\right)\right\rangle \geq \frac{1}{p} \left\|\phi_*\left(d\tilde{X}_s\right)\right\|\right\}.$$

Soient $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans l'ensemble des formes linéaires de $\mathbb{R}^n$ de norme 1, et $((V_l, \phi_l))_{l\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de N par des cartes. Si l, m, p et k sont quatre entiers naturels ($p \neq 0$), on notera $A(l, m, p, k)$ l'événement $A(V_l, \lambda_m, p, k)$, et

$$A = \cup_{l,m,p,k\in\mathbb{N}} A(l, m, p, k).$$

On peut vérifier que A ne dépend ni de la suite dense de formes linéaires, ni du recouvrement dénombrable choisis ; A est l'ensemble sur lequel X converge et la dérive reste asymptotiquement dans un cône saillant.

Enonçons le résultat principal de cette partie.

Proposition 1 *La semi-martingale X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur A.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout quadruplet (l, m, p, k), X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A(l, m, p, k)$. Pour cela, on démontre tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 2 *Soient l, m et p trois entiers naturels ($p \neq 0$). Tout point de V_l possède un voisinage ouvert $U(l, m, p)$ tel que toute semi-martingale X soit une semi-martingale jusqu'à l'infini sur l'événement*

$$A'(l,m,p) = \Big\{ \textit{Il existe } t(\omega) < \infty \textit{ tel que pour tout } s \geq t(\omega),$$
$$X_s(\omega) \textit{ appartienne à } U(l,m,p), \textit{ et } \left\langle \lambda_m, \phi_{l*}\left(d\tilde{X}_s\right)\right\rangle \geq \frac{1}{p}\left\|\phi_{l*}\left(d\tilde{X}_s\right)\right\| \Big\}.$$

Admettons un instant ce lemme. Pour démontrer la proposition, il suffit de recouvrir V_l par une suite d'ouverts $(U(l,m,p)_q)$, et de constater que

$$\{X \text{ converge dans } V_l\} = \cup_q \{X \text{ converge dans } U(l,m,p)_q\}.$$

Démonstration du lemme Soit $x \in V_l$. On peut supposer, quitte à composer ϕ_l avec une isométrie de $\mathbb{R}^n$, que λ_m est la première coordonnée dans $\mathbb{R}^n$. On notera $(y^1, \ldots, y^n)$ les composantes de la carte, et $D_1, \ldots, D_n$ les vecteurs correspondants. On peut supposer que x a pour coordonnées $(0, \ldots, 0)$ et que les y^i sont bornés. Pour un réel positif c suffisamment grand, et quitte à se restreindre à un ouvert U inclus dans V_l et contenant x, l'application $(x^1, \ldots, x^n)$ définie par $x^i = y^i + c\sum_j (y^j)^2$ pour tout i est une carte locale dont chaque coordonnée est convexe. Définissons $U(l,m,p)$ comme l'ensemble des éléments de U qui vérifient $\sum |y^j| < (4pc)^{-1}$. Pour tout point x' de $U(l,m,p)$ et tout vecteur v de $T_{x'}N$ dont la première coordonnée dans la base $(D_1, \ldots, D_n)$ est positive et qui forme dans la carte ϕ_l un angle supérieur à $\dfrac{1}{p}$ avec tout vecteur non nul de $\Gamma(D_2, \ldots, D_n)$, on a $|\langle dy^i, v\rangle| \leq p\langle dy^1, v\rangle$. Et puisque $\langle dx^1, v\rangle$ est égal à $\langle dy^1, v\rangle + 2c\sum\langle y^j dy^j, v\rangle$, on a $\langle dx^1, v\rangle \geq 0$.

On a

$$d(x^1 \circ X) = dS^1 + \frac{1}{2}\operatorname{Hess} x^1(dX \otimes dX) + \left\langle dx^1, d\tilde{X}\right\rangle$$

où S^1 est une martingale locale. Pour des temps suffisamment grands, les deux derniers termes du membre de droite deviennent positifs sur $A'(l,m,p)$. Notons $x^1 \circ X = S^1 + A^1$. Le processus A^1 est asymptotiquement croissant, ce qui implique

que S^1 soit majorée donc converge sur $A'(l,m,p)$, puis que A^1 converge et soit à variation totale finie. En conclusion, $x^1 \circ X = S^1 + A^1$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A'(l,m,p)$.

Il reste à montrer que $x^i \circ X$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A'(l,m,p)$, pour $i \geq 2$. On a toujours

$$d(x^i \circ X) = dS^i + \frac{1}{2}\operatorname{Hess} x^i(dX \otimes dX) + \left\langle dx^i, d\tilde{X}\right\rangle$$

avec S^i martingale locale. Si nous montrons que l'intégrale du dernier terme est un processus à variation totale finie sur $A'(l,m,p)$, nous pourrons nous ramener à la démonstration précédente.

Ce dernier point est obtenu en constatant que sur $U(l,m,p)$, on a $|\langle dx^i, v\rangle| \leq 2p\langle dy^1, v\rangle$ et $\langle dy^1, v\rangle \leq 2\langle dx^1, v\rangle$, ce qui implique $|\langle dx^i, v\rangle| \leq 4p\langle dx^1, v\rangle$. On a donc asymptotiquement sur $A'(l,m,p)$,

$$\left|\left\langle dx^i, d\tilde{X}\right\rangle\right| \leq 4p\left\langle dx^1, d\tilde{X}\right\rangle$$

et on sait que l'intégrale du dernier terme est finie, ce qui achève la démonstration.

Il semble intéressant d'étudier les martingales réfléchies dans des variétés à bord, car si la réflexion n'est pas trop irrégulière, l'ensemble A de la première proposition peut être égal à l'ensemble de convergence.

Définitions. *On dira qu'une variété topologique à bord N est une variété C^∞ à bord continu de dimension n lorsque l'intérieur de N est une variété C^∞ de dimension n et lorsqu'elle est munie d'un atlas recouvrant le bord dont la restriction des cartes à l'intérieur de N est C^∞, dont les cartes ont des domaines de la forme $\{x^1 \geq f(x^2, \ldots, x^n)\}$ avec f continue définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et sont telles que les changements de cartes sont des restrictions de difféomorphismes C^∞ définis sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dira que ces cartes sont C^∞.*

Une fonction g sur une variété à bord continu N sera dite de classe C^∞ si sa restriction à l'intérieur de N est une fonction C^∞ au sens des variétés C^∞ et si pour toute carte φ de classe C^∞ et de domaine U, l'application $g \circ \varphi^{-1}$ est la restriction à $\varphi(U)$ d'une fonction C^∞ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On notera $C^\infty(N)$ l'ensemble constitué des telles fonctions.

On dira qu'un processus continu X à valeurs dans une variété à bord continu est une semi-martingale lorsque pour toute fonction g appartenant à $C^\infty(N)$, le processus $g \circ X$ est une semi-martingale réelle continue.

Remarque. Il est équivalent de dire que N est une variété à bord continu ou de dire que N est un fermé d'une variété $\tilde{N}$ sans bord et de classe C^∞, tel que quel que soit x dans ∂N, il existe une carte C^∞ de $\tilde{N}$ de domaine U contenant x et telle que $N \cap U$ soit de la forme $\{x^1 \geq f(x^2, \ldots, x^n)\}$ avec f continue. Une fonction de $C^\infty(N)$ est alors une restriction à N d'une fonction de $C^\infty(\tilde{N})$, et un processus à valeurs dans N est une semi-martingale de N si et seulement si c'est une semi-martingale de $\tilde{N}$.

Puisque les changements de cartes d'une variété N à bord continu sont des restrictions de difféomorphismes C^∞, on peut définir les fibrés des vecteurs tangents d'ordre 1 et 2. On peut aussi définir une connexion ou une métrique riemannienne sur N.

Définition. *Si N est une variété à bord continu munie d'une connexion F, si U est un ouvert inclus dans $\overset{\circ}{N}$, et si Y est une semi-martingale à valeurs dans N, on dira que Y est asymptotiquement une F-martingale dans U s'il existe $t(\omega)$ p.s. fini tel que pour tout $s \geq t(\omega)$, on ait $1_{\{Y_s \in U\}} d\tilde{Y}_s = 0$, c'est à dire si, asymptotiquement, la dérive de Y s'annule dans U.*

Si N est une variété à bord continu munie d'une connexion F, et si Y est une semi-martingale à valeurs dans N, qui est asymptotiquement une F-martingale dans $\overset{\circ}{N}$, alors l'ensemble A est déterminé par la réflexion asymptotique des trajectoires convergeant vers un point du bord.

Examinons le cas de la réflexion normale dans les variétés riemanniennes dont les singularités du bord sont convexes.

Définitions. *Soit N une variété à bord continu munie d'une connexion. On dira que le bord de N est convexe lorsque pour tout point x de ∂N, il existe un voisinage V de x tel que pour tout couple (y, z) de points de V, il existe dans V une unique géodésique minimisante γ telle que $\gamma(0) = y$ et $\gamma(1) = z$.*

Soit N une variété à bord continu. On dira que le bord de N est localement le graphe d'une fonction convexe s'il existe un recouvrement d'un voisinage de ∂N par des cartes dont le domaine est de la forme $\{x^1 \geq f(x^2, \ldots, x^n)\}$ avec f convexe bornée.

Il est facile de vérifier que si le bord d'une variété est C^∞, c'est localement le graphe d'une fonction convexe. Plus généralement, si on peut représenter un bord comme graphe de fonction convexe, cela veut seulement dire que ses singularités sont convexes. Par conséquent, si N est une variété munie d'une connexion, et dont le bord est localement le graphe d'une fonction convexe, alors le bord n'a aucune raison d'être convexe. En revanche, nous allons démontrer que si le bord est convexe, alors il est localement graphe d'une fonction convexe.

Proposition 3 *Soit N une variété munie d'une connexion, à bord convexe. Alors le bord de N est localement graphe d'une fonction convexe.*

La preuve va être décomposée en trois étapes. Dans la première, on va démontrer que l'on peut recouvrir un voisinage du bord par des cartes dont le domaine est de la forme $\{x^1 \geq f(x^2, \ldots, x^n)\}$ avec f lipschitzienne. Ceci étant établi, on pourra considérer $x_0 \in \partial N$ et un voisinage U de x_0 vérifiant la propriété de convexité de la définition. On pourra supposer que U est le domaine d'une carte ϕ dans laquelle le bord $U \cap \partial N$ se représente comme l'ensemble $\{x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)\}$, avec f lipschitzienne, que les symboles de Christoffel sont bornés dans cette carte, et que x_0 a pour coordonnées $(0, \ldots, 0)$.

Nous allons montrer que, quitte à réduire U, il existe une constante c telle que l'application qui à $(x_2, \ldots, x_n)$ associe $f(x_2, \ldots, x_n) + c\sum_{i\geq 2}(x^i)^2$ soit convexe. Pour cela, nous utiliserons les deux dernières étapes de la démonstration. Dans la deuxième étape, nous montrerons que le bord $\partial N \cap U$ est supporté par une famille d'hypersurfaces $(H_x)_{x\in U\cap\partial N}$. La troisième étape consistera à montrer que chaque H_x se représente dans la carte ϕ comme le graphe d'une fonction C^∞ dont les dérivées secondes sont bornées indépendamment de x.

Etape 1. On va montrer qu'au voisinage de chaque point du bord, il existe une carte exponentielle centrée en un point de l'intérieur telle que sur le domaine de cette carte et en coordonnées polaires, le bord ait pour équation $r = f(\theta)$ avec f lipschitzienne. Pour cela, on va montrer qu'il existe une boule ouverte centrée sur l'origine de la carte exponentielle telle que tout cône ayant pour base l'image d'un point du bord et supporté par cette boule soit contenu dans l'image de N. Si on remplace le cône de droites par un cône de géodésiques, cette propriété est due à la convexité. On va donc utiliser un résultat d'Emery et Zheng ([E,Z]) qui majore uniformément l'écart entre une géodésique et une droite.

Soient $x_0 \in \partial N$ et U un ouvert convexe contenant x_0, tel que pour tout x dans U, l'application $\exp_x$ soit un difféomorphisme à valeurs dans U. Soit φ une carte de domaine U. On considère l'ensemble des cartes $\varphi_y = \varphi_*(y) \circ {\exp_y}^{-1}$, avec y dans U. Lorsque y et y' varient dans un voisinage ouvert convexe relativement compact de x_0 inclus dans U, les dérivées premières et secondes des changements de cartes $\varphi_y \circ {\varphi_{y'}}^{-1}$ sont uniformément bornées. On remplacera désormais U par cet ouvert. Si z et z' sont dans $\varphi_y(U)$ et λ est dans $[0,1]$, on notera $w_y(z, z', \lambda) = \varphi_y(\gamma(\lambda))$, avec γ géodésique de U telle que $\gamma(0) = {\varphi_y}^{-1}(z)$ et $\gamma(1) = {\varphi_y}^{-1}(z')$. Alors Emery et Zheng ([E,Z]) ont démontré qu'il existe une constante c_y telle que quel que soit (z, z', λ), on ait

$$\|w_y(z, z', \lambda) - [(1-\lambda)z + \lambda z']\| \leq c_y \lambda(1-\lambda)\|z - z'\|^2,$$

et comme les dérivées premières et secondes des changements de cartes sont uniformément bornées, on peut reprendre la démonstration de [E,Z] et remplacer c_y par une constante c uniforme. Nous pourrons ainsi majorer dans toutes les cartes l'écart angulaire entre une géodésique et le segment qui l'interpole.

Pour $y \in U$, soit d^y la distance sur U induite par φ_y, et soient $B^y(\cdot, \cdot)$ les boules correspondantes. Soit $C \geq 1$ une constante telle que pour tout y, y' on ait $d^y \leq C d^{y'}$.

On choisit $D > 0$ telle que $B^{x_0}(x_0, D) \subset U$, y dans $\overset{\circ}{N} \cap B^{x_0}(x_0, D)$ et $\varepsilon' > 0$ tel que $B^{x_0}(y,\varepsilon') \subset \overset{\circ}{N} \cap B^{x_0}(x_0,D)$. Soit a tel que $\exp_{x_0} a = y$. Posons $\exp_{x_0} ta = y_t$ pour $t \in]0,1]$. Alors $y_t \in \overset{\circ}{N} \cap B^{x_0}(x_0,tD)$ et il existe $\varepsilon \leq \varepsilon'$ indépendant de t et non nul tel que $B^{x_0}(y_t,t\varepsilon) \subset \overset{\circ}{N} \cap B^{x_0}(x_0,tD)$, donc

$$B^{y_t}\left(y_t,\frac{t\varepsilon}{C}\right) \subset \overset{\circ}{N} \cap B^{x_0}(x_0,tD).$$

Posons $\beta = \dfrac{\varepsilon}{2C^2D}$ et montrons que pour t suffisamment petit, pour tout x dans $\partial N \cap B^{x_0}(x_0,tD)$, le cône $\mathcal{C}(\varphi_{y_t}(x),\varphi_{y_t}(y_t),\beta)$, de sommet $\varphi_{y_t}(x)$, ensemble des points z tels que l'angle entre $z-\varphi_{y_t}(x)$ et $\varphi_{y_t}(y_t)-\varphi_{y_t}(x)$ soit de mesure inférieure à β, est dans $\varphi_{y_t}(N)$ au voisinage de $\varphi_{y_t}(x)$.

Soit t tel que $cCDt < \dfrac{\beta}{2}$. On va montrer que si une géodésique γ part de x, est telle que

$$\|\varphi_{y_t}(\gamma(1)) - \varphi_{y_t}(x)\| = \|\varphi_{y_t}(y_t) - \varphi_{y_t}(x)\|,$$

et ne passe pas dans $B^{y_t}\left(y_t,\dfrac{t\varepsilon}{C}\right)$, alors $\varphi_{y_t}(\gamma)$ ne passe pas dans $\mathcal{C}(\varphi_{y_t}(x),\varphi_{y_t}(y_t),\beta)$ au voisinage de $\varphi_{y_t}(x)$.

Posons $z = \varphi_{y_t}(x)$, $z' = \varphi_{y_t}(\gamma(1))$, et soit $\lambda \in]0,1]$. Alors

$$\frac{\|w_{y_t}(z,z',\lambda) - [(1-\lambda)z + \lambda z']\|}{\lambda\|z-z'\|} \leq c(1-\lambda)\|z-z'\| \leq ctDC \leq \frac{\beta}{2}$$

ce qui permet de dire que l'angle entre $z'-z$ et $w_y(z,z',\lambda)-z$ est inférieur à $\dfrac{\beta}{2}$. Or l'angle entre $z'-z$ et $\varphi_{y_t}(y_t)-z$ est supérieur à 2β, donc $w_y(z,z',\lambda)$ n'est pas dans $\mathcal{C}(\varphi_{y_t}(x),\varphi_{y_t}(y_t),\beta)$.

Une fois que l'on a prouvé cela, il est facile de voir que sur le voisinage $B^{x_0}(x_0,tD)$ de x_0, dans la carte φ_{y_t} et en coordonnées polaires, le bord a pour équation $r = f(\theta)$, avec f lipschitzienne de rapport inférieur à $\dfrac{CDt}{\beta}$. La première étape est achevée.

Etape 2. Soient $x_0 \in \partial N$ et un voisinage U de x_0 vérifiant la propriété de convexité de la définition. Intéressons-nous à l'existence des hypersurfaces. On peut maintenant supposer que U est le domaine d'une carte ϕ dans laquelle le bord $U \cap \partial N$ se représente comme l'ensemble $\{x_1 = f(x_2,\ldots,x_n)\}$, avec f lipschitzienne, que les symboles de Christoffel sont bornés dans cette carte, et que x_0 a pour coordonnées $(0,\ldots,0)$. Nous allons montrer que pour tout $x \in \partial N \cap U$, le bord $\partial N \cap U$ est dans un cône convexe de géodésiques, de base x.

On associe à $u' = (u^2,\ldots,u^n) \in I\!R^{n-1}$ suffisamment proche de 0, le réel u^1 tel que la géodésique γ de conditions initiales $\gamma(0) = x$ et $\phi_*(\dot\gamma(0)) = (u^1,\ldots,u^n)$, vérifie $\gamma(1) \in \partial N$. On notera $u^1 = l(u')$. Remarquons que l'unicité de u^1 au voisinage de $u' = 0$ provient du fait que f est lipschitzienne. L'hypothèse de convexité de ∂N se traduit par l'inégalité

$$l(\lambda u') \leq \lambda l(u') \text{ si } \lambda \leq 1,$$

car la géodésique γ passe dans N. Cela implique que la fonction qui à λ associe $\frac{1}{\lambda} l(\lambda u')$ soit croissante. On notera

$$f'(u') = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} l(\lambda u').$$

Il est clair que f' est homogène. Montrons qu'elle est convexe. Si elle ne l'était pas, alors il existerait u_1', u_2' et t tels que

$$f'((1-t)u_1' + tu_2') > (1-t)f'(u_1') + tf'(u_2').$$

On peut supposer dans ce calcul pour simplifier, que x a pour coordonnées $(0, \dots, 0)$ dans la carte ϕ. Soit alors γ_ε pour $\varepsilon \in]0,1]$, la géodésique telle que $\gamma_\varepsilon(0)$ ait pour coordonnées $(f(\varepsilon u_1'), \varepsilon u_1')$ et $\gamma_\varepsilon(1)$ ait pour coordonnées $(f(\varepsilon u_2'), \varepsilon u_2')$.

Puisque f est lipschitzienne et

$$\|(l(\varepsilon u_i'), \varepsilon u_i')\| < \varepsilon M$$

pour une constante M, l'écart au temps 1 entre la géodésique reliant x au point de coordonnées $(f(\varepsilon u_i'), \varepsilon u_i')$ et le vecteur tangent à l'origine de coordonnées $(l(\varepsilon u_i'), \varepsilon u_i')$ est en ε^2, i.e. il existe M' telle que

$$|f(\varepsilon u_i') - l(\varepsilon u_i')| < M' \varepsilon^2,$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(f(\varepsilon u_i'), \varepsilon u_i') = (f'(u_i'), u_i').$$

Si nous montrons que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \phi(\gamma_\varepsilon(t)) = ((1-t)f'(u_1') + tf'(u_2'), (1-t)u_1' + tu_2'),$$

nous pourrons en déduire puisque f est lipschitzienne, en notant $\phi'(\gamma_\varepsilon(t)) = (\gamma_\varepsilon^2(t), \dots, \gamma_\varepsilon^n(t))$, que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} f(\phi'(\gamma_\varepsilon(t))) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon((1-t)u_1' + tu_2')) = f'((1-t)u_1' + tu_2'),$$

et par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\gamma_\varepsilon^1(t) - f(\phi'(\gamma_\varepsilon(t))) \right) < 0,$$

et ce dernier point contredira le fait que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, le point $\gamma_\varepsilon(t)$ est dans N. Nous en déduirons que f' est convexe.

Montrons donc ce point. Nous savons que $\ddot{\gamma}_\varepsilon^i(s) = -\Gamma_{jk}^i(\gamma_\varepsilon(s))\,\dot{\gamma}_\varepsilon^j(s)\dot{\gamma}_\varepsilon^k(s)$. Le dernier terme est $O(\varepsilon^2)$, uniformément en $s \in [0,1]$. Comme pour tout i et tout ε, il existe $\theta \in [0,t]$ tel que

$$\gamma_\varepsilon^i(t) = \gamma_\varepsilon^i(0) + t\dot{\gamma}_\varepsilon^i(0) - \frac{t^2}{2}\Gamma_{jk}^i(\gamma_\varepsilon(\theta))\,\dot{\gamma}_\varepsilon^j(\theta)\dot{\gamma}_\varepsilon^k(\theta),$$

on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\gamma_\varepsilon^i(t) - \gamma_\varepsilon^i(0) - t\dot{\gamma}_\varepsilon^i(0)\right) = 0$$

et de même,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\gamma_\varepsilon^i(1) - \gamma_\varepsilon^i(0) - \dot{\gamma}_\varepsilon^i(0)\right) = 0.$$

Cela donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\gamma_\varepsilon^i(t) - (1-t)\gamma_\varepsilon^i(0) - t\gamma_\varepsilon^i(1)\right) = 0,$$

ce qui est exactement le résultat recherché.

On a montré que le graphe de f était situé dans un cône convexe de géodésiques de sommet $\phi(x)$. On en déduit l'existence d'une hypersurface H_x supportant $\partial N \cap U$, et rencontrant cet ensemble au point x. Pour construire H_x, on considère une forme linéaire λ_x^0 de $\mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\lambda_x^0(u') \leq f'(u')$ pour tout $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ($\lambda_x^0 \in \partial f'(0)$), et on considère l'ensemble des points $\gamma_{u'}(1)$, u' appartenant à un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenant 0, $\gamma_{u'}$ étant la géodésique telle que $\gamma_{u'}(0) = x$ et $\dot{\gamma}_{u'}(0)$ ait pour coordonnées $(\lambda_x^0(u'), u')$. L'hypersurface H_x est l'exponentielle en x d'un voisinage de 0 d'un hyperplan de T_xN, et se représente dans la carte ϕ comme le graphe d'une fonction λ_x de classe C^∞, dont nous allons montrer dans la partie suivante que les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont bornées par des constantes indépendantes de x.

Etape 3. On revient à la supposition que x_0 ait pour coordonnées $(0,\ldots,0)$ dans la carte ϕ.

Nous allons tout d'abord procéder à la construction de familles de fonctions C^∞ dépendant de façon C^∞ d'un paramètre décrivant un compact, et nous montrerons ensuite que les λ_x appartiennent à l'une d'elles.

La carte ϕ permet de définir pour chaque $y \in U$, un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et T_yN, en associant au vecteur ε_i de la base canonique, le vecteur D_i. De plus, l'application φ qui à (e,x,v) avec $e = (e_1,\ldots,e_{n-1})$ famille orthonormale de $n-1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$, $v = (v^1,\ldots,v^{n-1}) \in B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ associe $(\phi \circ \exp_x)(v^ie_i)$ est de classe C^∞. L'ensemble de départ peut être identifié à $SO(n) \times U \times B(0,\varepsilon)$. Notons $\psi_{(e,x)}$ l'application qui à v associe $(\varphi^2(e,x,v),\ldots,\varphi^n(e,x,v))$. Notons K_α, pour $\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}]$, l'ensemble compact des $e \in SO(n)$ tels que l'angle entre ε_1 et l'hyperplan engendré par e soit supérieur ou égal à α. Pour tout $e \in K_\alpha$, l'application $\psi_{(e,x)}$ est inversible au point 0. En choisissant ε suffisamment petit, et en réduisant ensuite U, les $\psi_{(e,x)}$ deviennent partout inversibles, à valeurs dans des ensembles contenant tous un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On peut alors définir l'application $\lambda_{(e,x)}$ qui à $y' = (y^2, \dots, y^n) \in U'$ associe $\varphi^1(e, x, \psi^{-1}_{(e,x)}(y')) = y^1$. Cette application dépend de manière C^∞ des paramètres e et x, variant dans $K_\alpha \times U$. On peut remplacer U par un ouvert relativement compact dans U, contenant x_0. On en déduit alors que les applications $\lambda_{(e,x)}$, pour (e, x) variant dans $K_\alpha \times U$, ont des dérivées premières et secondes uniformément bornées.

On sait que tout λ_x est égal à un $\lambda_{(e_x,x)} \in \lambda_{(So(n),U)}$, et il reste à montrer que les λ_x appartiennent à un ensemble $\lambda_{(K_\alpha,U)}$ pour un $\alpha > 0$. Comme f est lipschitzienne, majore les λ_x, et $f(x') = \lambda_x(x')$ lorsque $x' = \psi_{(e_x,x)}(0)$, cette propriété est vraie.

On déduit que les λ_x ont des dérivées premières et secondes uniformément bornées. Ceci achève la troisième étape.

Il reste maintenant à remplacer la première coordonnée x^1 par

$$y^1 = x^1 + c \sum_{i \geq 2} (x^i)^2,$$

et à réduire encore au besoin l'ouvert U. Pour c suffisamment grand, les applications

$$\lambda'_x = \lambda_x + c \sum_{i \geq 2} (x^i)^2$$

sont convexes. Dans les nouvelles coordonnées, le bord est le graphe de $g = \sup_x \lambda'_x$. La fonction g est donc convexe, et la démonstration de la proposition est achevée.

Soit N une variété à bord continu. On suppose que le bord est localement le graphe d'une fonction convexe.

Si x est dans ∂N et si (U, ϕ) est une carte au voisinage de x, de domaine $\{x^1 \geq f(x^2, \dots, x^n)\}$ avec f convexe, on définit l'ensemble $T_x\partial N$ des *vecteurs tangents* à ∂N comme étant l'ensemble des vecteurs de coordonnées $(df(x)(u'), u')$, u' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, et $df(x)(u')$ étant la dérivée de f au point x et dans la direction de u'. On peut vérifier que si on prolonge N en une variété sans bord au voisinage de x, l'ensemble $T_x\partial N$ est égal à l'ensemble des $\dot\gamma(0)$, γ étant une courbe C^∞ vérifiant $\gamma(0) = x$, et telle que la distance de $\gamma(t)$ à l'intérieur de N et la distance de $\gamma(t)$ au complémentaire de N soient $o(t)$ lorsque t décroît vers 0, ceci pour une métrique riemannienne quelconque (on utilise pour cela la continuité en u' des dérivées directionnelles de f, qui est due au fait que f est lipschitzienne). Cette propriété assure ensuite que la définition de $T_x\partial N$ ne dépend pas de la carte considérée.

On définit pour $x \in \partial N$ le *sous-différentiel* $T_x^{*+}\partial N$ de x comme étant l'ensemble des éléments λ de T_x^*N tels que dans la carte (U, ϕ), on ait $\langle \lambda, D_1 \rangle > 0$, et qui vérifient

$$\forall V \in T_x\partial N, \ \langle \lambda, V \rangle \geq 0.$$

La première condition est intrinsèque, et est équivalente à $\lambda \neq 0$ et $\langle \lambda, \dot\gamma(0) \rangle \geq 0$ pour toute courbe γ de classe C^∞ qui vérifie $\gamma(0) = x$, et est telle que la distance de $\gamma(t)$ à l'intérieur de N soit $o(t)$ lorsque t décroît vers 0.

On suppose de plus que N est une variété riemannienne. On notera $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire.

On dira qu'un vecteur V de T_xN est *normal* si $V = 0$ ou s'il existe $\lambda \in T_x^{*+}\partial N$ telle que $\langle V|\cdot\rangle = \lambda$.

On dira qu'une semi-martingale Y à valeurs dans N se réfléchit normalement sur le bord si $1_{\{Y\in\partial N\}}d\tilde{Y}$ est un vecteur normal.

Lemme 4 *Soit x un élément de ∂N. Il existe un voisinage U de x, et une forme différentielle λ_0 définie sur U, tels que si V est un vecteur normal en un point $y \in U \cap \partial N$, l'on ait*

$$\langle\lambda_0(y), V\rangle \geq \|V\|.$$

Démonstration. On choisit un ouvert U, domaine d'une carte ϕ dans laquelle le bord $\partial N \cap U$ se représente comme le graphe d'une fonction convexe bornée f définie sur un ouvert U' de $\mathbb{R}^{n-1}$, et dont tous les sous-différentiels $\partial f(x')$ pour $x' \in U'$ sont inclus dans un compact K. On cherche λ_0 de la forme $c\langle D_1|\cdot\rangle$, et cela revient à montrer qu'il existe une constante c positive, telle que pour tout y dans $\partial N \cap U$, pour tout λ dans $T_y^{*+}\partial N$, on ait

$$c\langle\lambda, D_1\rangle \geq \|\lambda\|.$$

Si λ est dans $T_y^{*+}\partial N$, alors $\phi_*(\mathrm{Ker}\,\lambda)$ est le graphe d'une forme linéaire $\delta \in \partial f(y)$. Si $\delta(V^2, \ldots, V^n) = \delta_2 V^2 + \cdots + \delta_n V^n$, alors

$$\lambda = \langle\lambda, D_1\rangle \left(dx^1 - \sum_{i\geq 2} \delta_i dx^i\right).$$

Comme les éléments de K sont uniformément bornés, il existe une constante c qui majore tous les $\left\|dx^1 - \sum_{i\geq 2} \delta_i dx^i\right\|$, et cela nous donne l'inégalité recherchée. La démonstration du lemme est achevée.

Il est facile de constater que le lemme implique que les vecteurs normaux restent localement dans un cône saillant. On obtient alors la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit X une semi-martingale à valeurs dans une variété riemannienne N de métrique g, dont le bord est localement le graphe d'une fonction convexe. On suppose que pour une connexion F, le processus X est asymptotiquement une F-martingale dans l'intérieur. On note A' l'événement $\{X$ converge dans $N\}$ et $B(F, g)$ l'événement*

$$\{\exists t(\omega) < \infty,\ \forall\, s > t(\omega),\ 1_{\{X\in\partial N\}}F(\mathcal{D}\tilde{X}_s) \text{ est un vecteur normal pour } g\}.$$

Alors X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A' \cap B(F, g)$.

Ce résultat, accompagné de la proposition 3 donne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 6 *Soit X une semi-martingale à valeurs dans une variété riemannienne N à bord convexe. On suppose que X est asymptotiquement une martingale dans l'intérieur pour la connexion associée à la métrique. On note A' l'événement $\{X$ converge dans $N\}$ et B l'événement*

$$\{\exists t(\omega) < \infty,\ \forall\, s > t(\omega),\ 1_{\{X \in \partial N\}} d\tilde{X}_s \textit{ est un vecteur normal}\}.$$

Alors X est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A' \cap B$.

Nous abordons la deuxième partie, dans laquelle nous nous intéressons à une semi-martingale X à valeurs dans une variété riemannienne munie d'une connexion F (qui n'est pas nécessairement la connexion associée à la métrique), et à l'ensemble de convergence de sa variation quadratique riemannienne. Notons

$$A = \left\{ \int_0^\infty \langle dX | dX \rangle < \infty \right\}.$$

La dérive $d\tilde{X}$ de X, ainsi que l'application Hess, seront calculées avec la connexion F.

Nous allons étudier le sous-ensemble de A sur lequel la dérive de X s'annule dans un ouvert, et en déduire des conséquences sur la convergence des martingales réfléchies dans des variétés à bord.

Proposition 7 *Soient U un ouvert et*

$$B(U) = \{\exists t(\omega) \text{ p.s. fini},\ \forall s \geq t(\omega),\ 1_{\{X_s \in U\}} d\tilde{X}_s = 0\}$$

l'événement sur lequel, asymptotiquement, la dérive de X pour la connexion F s'annule dans U.

Si K est un compact inclus dans U, alors $A \cap B(U)$ est inclus dans la réunion des événements
$\{X$ converge vers un point de $K\}$ et
$\{$il existe un temps fini après lequel X ne rencontre plus $K\}$.

Démonstration. Il faut montrer que sur $A \cap B(U)$, si X a une valeur d'adhérence dans K, alors X converge vers cette valeur d'adhérence. Pour tout p entier naturel non nul, soit $(U_i^p) = (B(x_i^p, \frac{1}{p}) \cap U)$ un recouvrement fini de K. Prouver la propriété ci-dessus équivaut à démontrer que pour tout (p, i) tel que $B(x_i^p, \frac{1}{p}) \subset U$, la probabilité pour que sur $A \cap B(U)$, X entre dans U_i^{2p} et sorte de U_i^p une infinité de fois est nulle. Pour obtenir ce dernier point, on choisit une fonction f positive de classe C^∞, valant 1 sur U_i^{2p} et à support dans U_i^p. De l'égalité

$$df(X) = \langle df(X), d\overset{m}{X} \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{Hess} f(dX \otimes dX)$$

vérifiée asymptotiquement sur $A \cap B(U)$, on déduit que $f(X)$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A \cap B(U)$, car df et Hess f sont bornés. La semi-martingale $f(X)$ est donc convergente sur $A \cap B(U)$, et cela prouve le résultat recherché.

Applications

Soient N une variété riemannienne à bord continu, et X une semi-martingale, qui est asymptotiquement une F-martingale dans l'intérieur. On notera d la fonction distance, et A l'événement $\left\{ \int_0^\infty \langle dX | dX \rangle < \infty \right\}$.

Proposition 8 *L'événement A est inclus dans la réunion de B_1, B_2 et B_3 avec*
$B_1 = \{X$ *converge dans* $\overset{\circ}{N}\}$,
$B_2 = \{d(X, \partial N)$ *tend vers* $0\}$,
$B_3 = \{$*le point à l'infini du compactifié d'Alexandroff de N est valeur d'adhérence de* $X\}$.

Remarque. L'événement B_1 est disjoint de $B_2 \cup B_3$, alors que les deux événements B_2 et B_3 peuvent avoir une intersection de probabilité non nulle, par exemple si X est à valeurs dans ∂N et converge vers le point à l'infini du compactifié d'Alexandroff.

Démonstration. Le complémentaire de B_3 est inclus dans l'événement où il existe un compact K dans lequel X revient définitivement. Soit pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$K_p = K \cap \left\{ d(X, \partial N) \geq \frac{1}{p} \right\}.$$

L'ensemble K_p est un compact inclus dans $\overset{\circ}{N}$, et la dérive de X s'annule asymptotiquement dans $\overset{\circ}{N}$. D'après la proposition 6, si quel que soit p, X ne converge pas dans K_p, alors $d(X, \partial N)$ tend vers 0, ce qui achève la preuve.

On choisit maintenant une fonction f bornée de classe C^∞ sur N, dont les dérivées premières sont bornées et telle que $|\operatorname{Hess} f|$ soit majorée par la métrique, et on s'intéresse à l'événement

$$B(f) = \left\{ \exists\ t(\omega) < \infty,\ \varepsilon(\omega) > 0,\ \forall\ s > t(\omega),\ \left\langle df, 1_{\{X_s \in \partial N\}} d\tilde{X}_s \right\rangle \geq \varepsilon(\omega) \left\| d\tilde{X}_s \right\| \right\}.$$

On suppose toujours que X est asymptotiquement une martingale dans l'intérieur.

Proposition 9 *Sur $A \cap B(f)$, la semi-martingale X converge dans le compactifié d'Alexandroff de N.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour toute fonction h de classe C^∞ à support compact, $h(X)$ est une semi-martingale convergente sur $A \cap B(f)$. Pour cela, on montre d'abord que $f(X)$ est une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A \cap B(f)$. Ceci est obtenu en écrivant

$$f(X) - f(X_0) = \int_0 \langle df(X), d\overset{m}{X} \rangle + \frac{1}{2} \int_0 \operatorname{Hess} f(dX \otimes dX) + \int_0 \langle df(X), d\tilde{X} \rangle.$$

Le membre de gauche est borné, les deux premiers termes du membre de droite sont des semi-martingales jusqu'à l'infini sur $A \cap B(f)$, et le dernier terme est asymptotiquement croissant sur $A \cap B(f)$, on en déduit que c'est aussi une semi-martingale jusqu'à l'infini sur $A \cap B(f)$.

Il reste à montrer que $h(X)$ est une semi-martingale convergente sur $A \cap B(f)$, lorsque h est C^∞ à support compact. On écrit

$$h(X) - h(X_0) = \int_0 \langle dh(X), d\overset{m}{X} \rangle + \int_0 \frac{1}{2} \operatorname{Hess} h(dX \otimes dX) + \int_0 \langle dh(X), d\tilde{X} \rangle,$$

et on doit seulement montrer que le dernier terme converge. Ceci est obtenu en constatant qu'il existe sur $A \cap B(f)$ une fonction $M(\omega)$ finie, telle que pour s suffisamment grand, on ait

$$|\langle dh(X_s), d\tilde{X}_s \rangle| \leq M(\omega) \langle df(X_s), d\tilde{X}_s \rangle.$$

Ceci achève la démonstration.

On suppose dans la suite que N est une variété riemannienne compacte à bord localement graphe de fonction convexe, munie d'une connexion F qui n'est pas nécessairement la connexion de Levi-Civita associée à la métrique. Si x est sur le bord, un vecteur V de $T_x N$ sera dit *entrant* si quel que soit λ dans $T_x^{*+} \partial N$, on a $\langle \lambda, V \rangle \geq 0$.

Soit X une semi-martingale à valeurs dans N. On note toujours A l'événement $\left\{ \int_0^\infty \langle dX | dX \rangle < \infty \right\}$, et on note

$$B(F) = \left\{ \exists t(\omega) \text{ p.s. fini}, \forall s \geq t(\omega),\ 1_{\left\{X_s \in \overset{\circ}{N}\right\}} d\tilde{X}_s = 0 \right\},$$

l'événement sur lequel la dérive de X pour la connexion F s'annule asymptotiquement dans l'intérieur.

On définit

$$C(F) = \{\exists t(\omega) < \infty,\ \forall\ s > t(\omega),\ 1_{\{X_s \in \partial N\}} d\tilde{X}_s \text{ est un vecteur normal}\},$$

l'événement sur lequel la dérive de X au bord pour la connexion F est asymptotiquement un vecteur normal.

On supposera aussi dans la suite que tout vecteur normal de ∂N est entrant, ce qui revient à dire que pour tous vecteurs n_x et n'_x normaux en $x \in \partial N$, on a $\langle n_x | n'_x \rangle \geq 0$.

Proposition 10 *La semi-martingale X est convergente sur l'événement*

$$A \cap B(F) \cap C(F).$$

Démonstration. Le résultat est immédiat en utilisant la proposition 9, une fois que l'on a construit une fonction f qui croît suffisamment à chaque réflexion au bord, afin que l'événement $C(F)$ soit inclus dans l'événement $B(f)$ de la proposition 9. La construction ne fait pas intervenir la connexion F, et est l'objet du lemme suivant.

Lemme 11 *Il existe sur N une fonction f de classe C^∞ et un réel $\alpha > 0$ tels que pour tout vecteur V normal unitaire au bord, on ait $\langle df, V \rangle \geq \alpha$.*

Démonstration du lemme. Les applications exp et les transports parallèles seront définis avec la métrique riemannienne. On considère une variété riemannienne sans bord $\tilde{N}$ dans laquelle N se plonge de façon riemannienne. Soit l la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui à $r < 1$ associe $\exp \dfrac{1}{r^2 - 1}$ et à $r \geq 1$ associe 0. On définit $c = \int_{\mathbb{R}^n} l(\|x\|)\, dx$. Pour $\varepsilon > 0$, soit φ_ε la fonction de $C^\infty(T\tilde{N})$ définie par $\varphi_\varepsilon(v) = (c\varepsilon^n)^{-1} l(\varepsilon^{-1} v)$. Alors $\varphi_\varepsilon(v)dv$ définit une mesure de masse 1 sur chaque espace tangent. On définit sur $\tilde{N}$ la fonction h qui vérifie $h(x) = 0$ si $x \in N$ et $h(x) = -d(x, N)$ sinon. La fonction $f(x)$ recherchée sera une moyenne f_ε de h sur voisinage de x, définie pour ε suffisamment petit sur un voisinage de N dans $\tilde{N}$ par

$$f_\varepsilon(x) = \int_{T_x \tilde{N}} \varphi_\varepsilon(y) h(\exp_x y)\, dy.$$

Elle est de classe C^∞, car on peut écrire

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\tilde{N}} \varphi_\varepsilon({\exp_x}^{-1} z) h(z) J({\exp_x}^{-1})(z)\, dz$$

où $J({\exp_x}^{-1})(z)$ est le jacobien de l'application ${\exp_x}^{-1}$ au point z. La fonction à l'intérieur de l'intégrale est de classe C^∞ en x sur un ouvert relativement compact contenant N, ce qui implique que l'intégrale dépende de façon C^∞ de x.

Soient x un point du bord de N et n_x un vecteur normal unitaire en x. On note $U(t)$ la géodésique partant de x avec une vitesse initiale n_x. Alors

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f_\varepsilon(U(t)) - f_\varepsilon(x)) = \langle df_\varepsilon, n_x \rangle.$$

Commençons par montrer que pour ε suffisamment petit, on a $\langle df_\varepsilon, n_x\rangle > 0$. Cela se fera en deux étapes. Pour t petit, on définit le transport parallèle τ_t au dessus de $U(t)$, qui est une isométrie de T_xN dans $T_{U(t)}\tilde{N}$, et on définit pour $y \in T_xN$ et t positif, $g(t,y) = \exp_{U(t)} \tau_t(y)$. L'application g est de classe C^∞, et sa dérivée par rapport à t en $(0,0)$ est n_x. On a l'égalité

$$f_\varepsilon(U(t)) - f_\varepsilon(x) = \int_{T_xN} \varphi_\varepsilon(y)(h(g(t,y)) - h(g(0,y)))\,dy,$$

due à la propriété d'isométrie de τ_t.

Puisque l'on travaille au voisinage de x, on peut supposer que $\tilde{N}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, que N est de la forme $\{x^1 \geq k(x^2,\dots,x^n)\}$ avec k convexe lipschitzienne, et que les coordonnées de x sont nulles. Notons que la métrique de $\tilde{N}$ n'est pas la métrique canonique de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ sera noté $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ pour le différencier du produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ de la variété. On pourra toutefois supposer qu'ils coïncident au point x. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront souvent représentés avec des couples dont le premier terme appartiendra à $\mathbb{R}$ et le deuxième à $\mathbb{R}^{n-1}$. Si $z = (z^1, z') \in \partial N$, un vecteur $V = (V^1, V') \in T_zN$ est entrant si et seulement si $V^1 \geq dk(z')(V')$.

Dans une première étape, montrons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|y\| < \delta$, on ait

$$\liminf_{t\to 0} \frac{1}{t}(h(g(t,y)) - h(g(0,y))) \geq -\alpha.$$

Posons $n(t,y) = \dfrac{1}{t}(g(t,y) - g(t,0))$. Alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|y\| < \delta$ et $0 \leq t < \delta$, on ait $\|n(t,y) - n_x\| < \dfrac{\alpha}{2}$. D'autre part, il existe $\delta' > 0$ tel que si $z \in \partial N$ et $d(x,z) < \delta'$, la distance entre n_x et l'ensemble des vecteurs unitaires entrant au point z soit inférieure à $\dfrac{\alpha}{2}$ (découle de [R], théorème 24.5 p233).

Si $g(0,y)$ n'appartient pas à $\mathring{N}$, alors il existe $z \in \partial N$ tel que $d(g(0,y),N) = d(g(0,y),z)$. Si $\|y\| < \delta$ et $d(x, g(0,y)) < \dfrac{1}{2}\delta'$, on déduit des majorations précédentes que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{1}{t} d(z + tn(t,y), N) \leq \alpha,$$

ce qui implique que

$$\liminf_{t\to 0} \frac{1}{t}(h(g(t,y)) - h(g(0,y))) \geq -\alpha.$$

De même, si $g(0,y)$ est dans $\mathring{N}$, alors on arrive à la même conclusion. La première étape est achevée.

Pour arriver à montrer que $\langle df_\varepsilon, n_x\rangle > 0$, il reste seulement à prouver qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma > 0$ et $m > 0$, tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe un ensemble $E_\varepsilon \subset T_xN$ de masse supérieure à m pour la mesure $\varphi_\varepsilon(y)dy$, tel que pour tout $y \in E_\varepsilon$, on ait

$$\liminf_{t\to 0} \frac{1}{t}(h(g(t,y)) - h(g(0,y))) \geq \gamma.$$

Cela constitue la deuxième étape. On choisira alors α vérifiant $m\gamma - \alpha > 0$, et on obtiendra l'existence d'un ε suffisamment petit pour que $\langle df_\varepsilon, n_x\rangle > m\gamma - \alpha > 0$.

On peut se restreindre au cas où dans la notation $n_x = (u^1, u_0)$, on a $0 < u^1 < 1$ (car si $u_1 = 1$, et comme k est lipschitzienne, on peut prendre pour E_ε lorsque ε est suffisamment petit, le support de la mesure $\varphi_\varepsilon(y)dy$ restreint à l'image réciproque par $\exp_x$ du complémentaire de N dans $\tilde{N}$). La partie essentielle de cette étape consiste à montrer qu'il existe une boule $\mathcal{U} = B(-u_0, \alpha')$ de centre $-u_0$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $s_0 > 0$ et $\gamma > 0$, tels que pour tous $s \in]0, s_0]$, $u \in \mathcal{U}$, $V \in T_{x_s}\partial N$ avec $x_s = (k(su), su)$, on ait

$$\langle V | n_x\rangle < (1-\gamma)\|V\|.$$

On peut écrire V sous la forme $(dk(su)(au_0 + u'), au_0 + u')$, avec $\langle u_0 | u'\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}} = 0$, en ne s'intéressant qu'aux valeurs de a dans $\{-1, 0, 1\}$. On a

$$\langle V | n_x\rangle_{\mathbb{R}^n} = a\|u_0\|^2 + u^1 dk(su)(au_0 + u'),$$

donc si $a = -1$ ou 0, cela donne $\langle V | n_x\rangle_{\mathbb{R}^n} \leq dk(su)(au_0 + u')$. Soit K le coefficient de Lipschitz de k. En utilisant l'inégalité $dk(su)(au_0 + u') \leq K\|au_0 + u'\|$, on obtient

$$\langle V | n_x\rangle_{\mathbb{R}^n} < \frac{K}{\sqrt{1+K^2}}\|V\| < (1-\gamma)\|V\|,$$

si $0 < \gamma < 1 - \dfrac{K}{\sqrt{1+K^2}}$. Il reste donc à traiter le cas $a = 1$. Puisque n_x est normal, on a

$$\langle u_0 | u\rangle + dk(0)(u)u^1 > 0,$$

et comme l'application qui à s associe $s\langle u_0 | u\rangle + k(su)u^1$ est convexe, sa dérivée à gauche en $s > 0$ est supérieure ou égale à sa dérivée à droite en 0, ce qui donne en utilisant l'inégalité précédente,

$$-\langle u_0 | u\rangle + dk(su)(-u)u^1 < 0.$$

On aimerait remplacer u par $-u_0$, mais en utilisant le fait que $dk(su)$ est lipschitzienne de rapport K, on obtient seulement

$$\|u_0\|^2 + dk(su)(u_0)u^1 < (\|u_0\| + K)\|u + u_0\| < (\|u_0\| + K)\alpha'.$$

Nous allons donner une formulation géométrique au problème à résoudre. Définissons $V_0 = (dk(su)(u_0), u_0)$ et $V_1 = (dk(su)(u'), u')$. Les vecteurs n_x, V_0, V_1 et V

sont dans l'espace vectoriel engendré par $(0, u_0)$, $(0, u')$ et $(1, 0)$, et la matrice de leurs coordonnées est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u^1 & dk(su)(u_0) & dk(su)(u') \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3 si α' est suffisamment petit. De plus, il existe $\gamma' > 0$ ne dépendant que de K et de α', tel que pour tout vecteur unitaire V' du plan vectoriel P engendré par V_0 et V_1, on ait $\langle n_x | V' \rangle < 1 - \gamma'$. Utilisant la convexité et l'homogénéité de $dk(su)$, on écrit

$$dk(su)(u_0 + u') \leq dk(su)(u_0) + dk(su)(u')$$

qui se traduit géométriquement par le fait que le plan P sépare n_x et V, ce qui implique

$$\langle n_x | V \rangle < (1 - \gamma')\|V\|.$$

On a donc montré l'existence de $\mathcal{U}$, s_0 et γ.

Quitte à restreindre s_0 et γ, et pour t et y suffisamment petits, on obtient encore pour tout $V \in T_{x_s}\partial N$, l'inégalité

$$\langle n(t, y) | V \rangle < (1 - \gamma)\|V\|.$$

On définit alors la boule B_s de centre $c_s = (k(su_0), su_0)$ et de rayon $s\left(\frac{\alpha'}{2} \wedge \frac{\|u_0\|^2}{2}\right)$, $E'_{2\|u_0\|s} = B_s \cap N^c$ (N^c est le complémentaire de N) et $E_\varepsilon = \exp_x{}^{-1}(E'_\varepsilon)$, de sorte que pour tout $y \in E_\varepsilon$, on ait $d(g(0, y), N) = d(g(0, y), z)$ avec z de la forme $(k(su), su)$, avec $u \in \mathcal{U}$ et $0 < s < s_0$.

Si on part de ce point z avec un vecteur vitesse $n(t, y)$, alors d'après les calculs précédents, on s'éloigne du bord avec une vitesse supérieure à γ, ce qui implique que

$$\liminf_{t \to 0} \frac{1}{t}(h(g(t, y)) - h(g(0, y))) \geq \gamma.$$

Par construction, les ensembles E_ε sont tels que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{E_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y) dy = 2m > 0,$$

donc pour ε suffisamment petit, on a

$$\int_{E_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y) dy \geq m,$$

cela achève la deuxième étape et permet de conclure que $\langle df_\varepsilon, n_x \rangle > 0$.

Pour achever la démonstration du lemme, nous allons montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la dernière inégalité soit vraie quel que soit x et quel que soit le vecteur normal unitaire n_x.

L'ensemble des vecteurs normaux unitaires en x est compact, donc on peut trouver un $\varepsilon_x > 0$ et un $\alpha_x > 0$ tels que pour tout n_x dans cet ensemble, on ait $\langle df_{\varepsilon_x}, n_x \rangle > \alpha_x$. Pour tout $x \in \partial N$, il existe un voisinage ouvert W_x de x tel que pour tout $y \in W_x \cap \partial N$ et tout vecteur n_y normal unitaire en y, on ait $\langle df_{\varepsilon_x}, n_y \rangle > \frac{1}{2}\alpha_x$ (résulte de [R], corollaire 24.5.1). Par un recouvrement fini du bord par de tels ouverts, on trouve $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout vecteur normal unitaire entrant n en un point du bord, on ait $\langle df_\varepsilon, n \rangle > \alpha$. Ceci achève la démonstration du lemme.

Remarque. Si ∂N possède des vecteurs normaux unitaires non entrant, cette démonstration ne marche pas, et cependant, dans le cas d'un secteur angulaire de $\mathbb{R}^2$, ou plus généralement lorsque N est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par $\{x^1 \geq k(x^2, \ldots, x^n)\}$ avec k convexe lipschitzienne, la fonction $f = x^1$ convient quelle que soit la direction des vecteurs normaux.

Références :

[A] : M. Arnaudon : Dédoublement des variétés à bord et des semi-martingales, à paraître dans Stochastics.

[D] : R.W.R Darling : Convergence of Martingales in a Riemannian Manifold, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 19, 753-763, 1983.

[E1] : M. Emery : Stochastic Calculus in Manifolds, Springer Verlag 1989.

[E2] : M. Emery : Note sur l'exposé de S.W. He, J.A. Yan, W.A. Zheng (Sur la convergence des semi-martingales continues dans $\mathbb{R}^n$ et des martingales dans une variété), Séminaire de Probabilités 17, p.185, Lecture Notes in Mathematics 986, Springer 1981.

[E,Z] : M. Emery, W.A. Zheng : Fonctions convexes et semi-matingales dans une variété, Séminaire de Probabilités 18, Lecture Notes in Mathematics 1059, Springer 1983.

[M] : P.A. Meyer : Géométrie stochastique sans larmes, Séminaire de Probabilités 15, Lecture Notes in Mathematics 850, Springer 1981.

[R] : R.T. Rockafellar : Convex Analysis, Princeton University Press 1970.

[S] : L. Schwartz : Géométrie différentielle du deuxième ordre, semimartingales et Equations Différentielles Stochastiques sur une variété différentielle, Séminaire de Probabilités 16, LN 921, Springer 1982.

[Z] : W.A. Zheng : Sur le théorème de convergence des martingales dans une variété riemannienne, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 63, 511-515, 1983.