SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Représentation des fonctions conditionnellement de type positif, d'après V.P. Belavkin

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 114-121
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__114_0>

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS CONDITIONNELLEMENT DE TYPE POSITIF

exposé de P.A. Meyer, d'après V.P. Belavkin

M. Schürmann a fait dans [4] une étude approfondie des processus à accroissements indépendants non commutatifs. Reprenant sa construction, Belavkin a montré que la structure des fonctions conditionnellement de type positif sur un semi-groupe est étroitement liée au calcul différentiel stochastique non commutatif. On se propose ici de présenter son article [1] dans un langage plus familier. Depuis lors, Belavkin a remarqué qu'il s'étend sous une forme très générale, celle des "algèbres d'Ito", que nous signalons au passage (j'ai appris cela par un exposé de Belavkin à Paris VI en Novembre 1992, dont les résultats sont partiellement présentés dans [2]). Il est très intéressant de voir apparaître *naturellement* ici les matrices $(3,3)$ et la forme hermitienne non positive, introduits par Belavkin dans des articles antérieurs.

1. L'algèbre de Belavkin. Nous allons d'abord rappeler l'origine de cette algèbre, qui vient du calcul stochastique quantique. Mais une fois données ces motivations, l'exposé n'exigera aucune connaissance de celui-ci.

Plaçons nous d'abord sur l'espace de Fock simple, construit sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, et considérons un élément différentiel

$$dX_t = \gamma\, da_t^+ + C\, da_t^\circ + \gamma'\, da_t^- + c\, dt \ .$$

Ces éléments différentiels se multiplient selon la table d'Ito, suivant laquelle les seuls produits non nuls sont

$$da_t^- da_t^\circ = da_t^- \quad , \quad da_t^- da_t^+ = dt \quad , \quad da_t^\circ da_t^\circ = da_t^\circ \quad , \quad da_t^\circ da_t^+ = da_t^+ \ .$$

La remarque de départ de Belavkin est la suivante : si on associe à l'élément différentiel dX_t la matrice $(3,3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & C & 0 \\ c & \gamma' & 0 \end{pmatrix} ,$$

alors *la multiplication des éléments différentiels correspond à la multiplication ordinaire des matrices*. Cependant, le passage à l'adjoint sur l'élément différentiel ne correspond pas à l'adjoint ordinaire sur les matrices : il faut prendre les conjugués des éléments et faire une symétrie par rapport à la diagonale montante (voir (1.2)). Belavkin interprète cela comme le passage à l'adjoint pour un certain produit hermitien non positif sur $\mathbb{C}^3$, voir (1.3) ci-dessous.

Si l'on travaille sur l'espace de Fock de multiplicité $\mathcal{K}$, *i.e.* l'espace de Fock sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ où $\mathcal{K}$ est un certain espace de Hilbert, on a une situation analogue, mais où les "matrices $(3,3)$" représentent maintenant des opérateurs sur l'espace $\widehat{\mathcal{K}} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{C}^3$

$$(1.1) \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & C & 0 \\ c & \gamma' & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ |\gamma> & C & 0 \\ c & <\widetilde{\gamma}| & 0 \end{pmatrix}$$

où c est un scalaire, γ un élément de $\mathcal{K}$, C un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$, γ' un élément de $\mathcal{K}'$ (mais $\widetilde{\gamma}$ un élément de $\mathcal{K}$). Pour faire du vrai calcul stochastique quantique, il faudrait élargir tout cela en tensorisant avec l'espace de Fock jusqu'à l'instant t, mais cela ne nous concerne pas ici.

L'*algèbre de Belavkin* est formée de ces matrices triangulaires inférieures, avec une règle de multiplication simple donnée plus bas en (1.5), et avec une involution $\mathbf{C} \longmapsto \mathbf{C}^\star$ qui n'est pas l'involution ordinaire, mais

$$(1.2) \qquad \mathbf{C}^\star = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ |\widetilde{\gamma}> & C^* & 0 \\ \bar{c} & <\gamma| & 0 \end{pmatrix} .$$

Cette involution peut être interprétée comme un passage à l'adjoint relativement à un produit hermitien non positif sur $\widehat{\mathcal{K}}$, que nous noterons

$$(1.3) \quad [u+V+w \,|\, u'+V'+w'] = \bar{u}w' + <V,V'> + \bar{w}u' \quad (u,w,u',w' \in \mathbb{C},\ V,V' \in \mathcal{K}) .$$

En fait, on a besoin d'une situation plus générale que celle des opérateurs bornés : $\mathcal{K}$ sera un espace préhilbertien, et l'opérateur au centre de la matrice sera un opérateur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ non nécessairement borné, mais admettant un adjoint du même type. Ces opérateurs forment encore une algèbre à involution.

L'algèbre de Belavkin est encore munie d'une forme linéaire naturelle, $\psi(\mathbf{C}) = c$, qui satisfait à $\psi(\mathbf{C}^\star\mathbf{C}) = <\gamma,\gamma> \geq 0$. Notons aussi que *l'algèbre à unité* associée à l'algèbre des matrices (1.1) est formée des matrices du type

$$(1.4) \qquad U = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ |\gamma> & C & 0 \\ c & <\widetilde{\gamma}| & u \end{pmatrix}$$

pour lesquelles le produit est

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ |\beta> & B & 0 \\ b & <\widetilde{\beta}| & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ |\gamma> & C & 0 \\ c & <\widetilde{\gamma}| & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv & 0 & 0 \\ |\beta>v + B|\gamma> & BC & 0 \\ bv + <\widetilde{\beta}|\gamma> + uc & <\widetilde{\beta}|C + u<\widetilde{\gamma}| & uv \end{pmatrix}$$

Cette algèbre à unité porte une forme linéaire multiplicative, $\delta(U) = u$.

2. Fonctions conditionnellement de type positif. Nous désignons par $\mathcal{G}$ un semigroupe admettant un élément unité e, une multiplication associative (notée sans signe de produit) et une involution *. Nous désignons par $\mathcal{M}$ l'algèbre de convolution des mesures à support fini sur $\mathcal{G}$ (aussi notée sans signe de produit). Les éléments de $\mathcal{G}$ seront notés $x, y \ldots$ et ceux de $\mathcal{M}$ $\lambda = \sum_i l_i \varepsilon_{x_i}$, $\mu = \sum_i m_i \varepsilon_{y_i}$, etc. L'involution sur

$\mathcal{M}$ est définie par $\lambda^*\{x\} = \overline{\lambda\{x^*\}}$. La mesure ε_e, élément unité pour la convolution, est notée $\mathbf{1}$. La masse totale de la mesure λ est notée $\delta(\lambda)$ et c'est une forme linéaire multiplicative : $\delta(\mu\lambda) = \delta(\mu)\delta(\lambda)$ et $\delta(\lambda^*) = \overline{\delta(\lambda)}$. Pour le lecteur de Schürmann, rappelons que $\mathcal{M}$ est une bigèbre, le coproduit étant donné par $\Delta(\varepsilon_x) = \varepsilon_x \otimes \varepsilon_x$; la notation δ est un souvenir de la co-unité.

On ne va pas étudier des semi-groupes de convolution de mesures positives (*i.e.* des processus à accroissements indépendants à valeurs dans $\mathcal{G}$), mais des semi-groupes multiplicatifs de fonctions de type positif sur $\mathcal{G}$.

Nous considérons une fonction *conditionnellement de type positif* (c.t.p.) $\psi(x)$ sur $\mathcal{G}$, telle que $\psi(e) = 0$ mais non identiquement nulle. Rappelons que cela signifie que $e^{t\psi}$ est de type positif pour tout $t > 0$, et que cette propriété admet (classiquement) deux autres formes équivalentes

$$(2.1) \qquad \begin{gathered} \sum_{ij} \bar{c}_i c_j (\psi(x_i^* x_j) - \psi(x_i^*) - \psi(x_j)) \geq 0 \,, \\ \sum_{ij} \bar{c}_i c_j \psi(x_i^* x_j) \geq 0 \quad \text{si} \quad \sum_i c_i = 0 \,. \end{gathered}$$

Nous prolongeons ψ en une forme linéaire $\mu \longmapsto \mu(\psi)$ sur l'algèbre $\mathcal{M}$. Les propriétés précédentes se lisent alors ainsi : pour tout couple de mesures λ, μ (décomposées en mesures ponctuelles avec la notation expliquée plus haut) posons

$$(2.2) \qquad \begin{gathered} [\mu \,|\, \lambda] = \sum_{ij} \overline{m}_i l_j \psi(y_i^* x_j) = \psi(\mu^* \lambda) \,, \\ < \mu \,|\lambda >= \sum_{ij} \overline{m}_i l_j (\psi(y_i^* x_j) - \psi(y_i^*) - \psi(x_j)) \,. \end{gathered}$$

Alors,

1) $[\mu \,|\, \lambda]$ et $< \mu \,|\, \lambda >$ sont des formes hermitiennes, la seconde est positive, et elles sont égales sur le sous espace $\mathcal{M}_0$ des mesures de masse nulle (le noyau de δ).

2) On a $[\mu \,|\, \lambda] =< \mu \,|\, \lambda > + \delta(\mu^*)\psi(\lambda) + \psi(\mu^*)\delta(\lambda)$.

Noter que $< \mu \,|\, \mathbf{1} >= 0$, $[\mu \,|\, \mathbf{1}] = \psi(\mu^*)$. Posons $\eta(\lambda) = \lambda_0 = \lambda - \delta(\lambda)\mathbf{1}$, mesure de masse nulle; alors on a $< \mu \,|\, \lambda >= [\mu_0 \,|\, \lambda_0]$ et donc

$$(2.3) \qquad [\mu \,|\, \lambda] =< \mu_0 \,|\, \lambda_0 > + \delta(\mu^*)\psi(\lambda) + \psi(\mu^*)\delta(\lambda) \,.$$

REMARQUE. La fonction $[\mu \,|\, \lambda]$ est elle conditionnellement de type positif sur $\mathcal{M}$? autrement dit, si $\sum_i c_i = 0$ a-t-on

$$\sum_{ij} \bar{c}_i c_j \, [\mu_i \,|\, \mu_j] \geq 0 \; ?$$

La réponse est non : si l'on écrit $\mu_i = \sum_\alpha p_{i\alpha} \varepsilon_{x_\alpha}$, cela devient $\sum_{\alpha\beta} \bar{q}_\alpha q_\beta \psi(x_\alpha^* x_\beta)$ avec $q_\alpha = \sum_i c_i p_{i\alpha}$, et la somme des q_α n'est nulle que si les mesures μ_i ont *la même masse,* pas forcément 0. Nous allons plus loin construire les représentations GNS des fonctions de type positif correspondantes.

Désignons par $\mathcal{N}$ le noyau de la forme hermitienne $[\cdot \,|\, \cdot]$, par $\mathcal{K}$ l'espace préhilbertien séparé associé à $\mathcal{M}_0$. Nous allons montrer que *le quotient* $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ *est isomorphe, par* *l'application* $\lambda \longmapsto (\delta(\lambda), \lambda_0, \psi(\lambda))$, *à un sous-espace de* $\widehat{\mathcal{K}} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathbb{C}$ *muni du produit scalaire tordu (1.3).*

Notons d'abord que $[\mu^* \mid \lambda^*] = \overline{[\mu \mid \lambda]}$, de sorte que $\mathcal{N}$ est stable par l'involution. Si μ appartient à $\mathcal{N}$ on a $[\mu \mid \mathbf{1}] = \psi(\mu^*) = 0$, et donc aussi $\psi(\mu) = 0$. Par conséquent,

$$\forall \lambda \quad 0 = [\mu \mid \lambda] =< \mu_0, \lambda_0 > +\delta(\mu^*)\psi(\lambda) \; .$$

Prenant $\lambda = \mu$ nous trouvons que $< \mu_0 \mid \mu_0 >= 0$; ce produit scalaire étant positif, l'inégalité de Schwarz entraîne $< \mu_0 \mid \lambda_0 >= 0$ pour toute mesure λ, et la relation devient $\delta(\mu^*)\psi(\lambda) = 0$, soit $\delta(\mu^*) = 0$ puisque ψ est non triviale. Inversement, si μ possède les trois propriétés $\delta(\mu) = 0$, $< \mu_0, \mu_0 >= 0$, $\psi(\mu) = 0$ on vérifie que μ appartient à $\mathcal{N}$. Le produit scalaire se calcule alors aisément.

3. Construction d'un "quadruplet de Schürmann". Dans son exposé des résultats de Schürmann sur les bigèbres, Parthasarathy a donné le nom de ***triplet de Schürmann*** à un triplet (ψ, η, ρ) d'applications linéaires définies sur une $*$-bigèbre $\mathcal{M}$, et à valeurs respectivement dans $\mathbb{C}$, dans un espace préhilbertien séparé $\mathcal{K}$, et dans l'algèbre des opérateurs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ admettant un adjoint, possédant les propriétés suivantes :

1) ρ est une $*$-représentation de $\mathcal{M}$.

2) η est un cocycle : on a

$$\eta(\nu\mu) = \rho(\nu)\,\eta(\mu) + \eta(\nu)\,\delta(\mu) \; . \tag{3.1}$$

La co-unité δ intervient dans cette définition, en tant que forme linéaire multiplicative sur $\mathcal{M}$, mais le coproduit de la structure de bigèbre n'est pas utilisé.

3) La forme linéaire ψ satisfait à

$$\psi(\mu\lambda) - \psi(\mu) - \psi(\lambda) =< \eta(\mu^*), \eta(\lambda) > \; . \tag{3.2}$$

Nous oublierons alors le coproduit, et nous appellerons ***quadruplet de Schürmann*** un ensemble d'applications $(\psi, \eta, \rho, \delta)$ possédant les propriétés ci-dessus.

Nous nous trouvons ici devant une telle situation : $\mathcal{K}$ sera l'espace préhilbertien séparé défini plus haut, quotient de $\mathcal{M}_0$ par le noyau de $<,>$; ρ sera déduit de l'opération de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}_0$ par convolution à gauche; $\eta(\mu)$ sera (la classe de) la mesure $\mu - \delta(\mu)\varepsilon_e$, précédemment notée μ_0 ; la vérification des propriétés précédentes est immédiate.

Introduisons alors la matrice $(3,3)$, définissant un opérateur sur $\widehat{\mathcal{K}}$

$$\mathbf{R}(\nu) = \begin{pmatrix} \delta(\nu) & 0 & 0 \\ |\eta(\nu)> & \rho(\nu) & 0 \\ \psi(\nu) & <\eta(\nu^*)| & \delta(\nu) \end{pmatrix} . \tag{3.3}$$

Il résulte aussitôt des propriétés du quadruplet de Schürmann que $\mathbf{R}(\mu)\,\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{R}(\mu\lambda)$, et aussi $\mathbf{R}(\mu^*) = (\mathbf{R}(\mu))^\star$, l'adjoint tordu. D'autre part, on a la relation

$$\begin{pmatrix} \delta(\nu\mu) \\ \eta(\nu\mu) \\ \psi(\nu\mu) \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\nu) \begin{pmatrix} \delta(\mu) \\ \eta(\mu) \\ \psi(\mu) \end{pmatrix} , \tag{3.4}$$

de sorte que, si l'on identifie une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ à la colonne (!) $(\delta(\mu), \eta(\mu), \psi(\mu))$, l'opération de $\mathbf{R}(\nu)$ s'identifie à l'action de $\mathcal{M}$ sur lui même par convolution à gauche, à la manière de la représentation GNS.

EXTENSION. Au lieu de travailler sur l'algèbre de convolution concrète $\mathcal{M}$, tout ce que nous avons dit s'applique si l'on part d'une *-algèbre abstraite $\mathcal{M}$ à unité e, munie d'une forme linéaire δ multiplicative telle que $\delta(e) = 1$, et d'une forme linéaire ψ conditionnellement de type positif[1], telle que $\psi(e) = 0$. Le raisonnement précédent montre que le modèle ***universel*** de cette structure est fourni par l'algèbre des matrices U du type (1.4) avec $\delta(U) = u$, $\psi(U) = c$. Ce que nous disons sur la représentation des semi-groupes s'applique aussi à la représentation de ces algèbres — le noyau du produit scalaire tordu (qui est un idéal de l'algèbre) est perdu dans cette opération.

Le cas particulier le plus intéressant est celui d'une fonction ψ *de type positif* sur une *-algèbre $\mathcal{A}$ (en général sans unité) : on construit alors l'algèbre $\mathcal{M}$ par adjonction d'une unité e, et on applique ce qui précède avec $\delta(te + x) = t$, $\psi(te + x) = \psi(x)$.

QUELQUES EXEMPLES. Arrêtons ici la discussion pour donner quelques exemples de ces algèbres de différentielles, et de leurs représentations comme algèbres de matrices, d'après un exposé oral de Belavkin.

1) *Algèbre du calcul différentiel d'Ito.* Les éléments sont de la forme $dX_t = adt + bdw_t$ avec $dw_t^2 = dt$ comme seul produit non nul. La forme linéaire d'espérance est $\mathbb{E}[dX_t] = adt$. Voici une représentation matricielle de cette algèbre

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi(X) = a \, .$$

2) *Inclusion du processus de Poisson.* Les éléments sont de la forme $adt + bdw_t + cdn_t$ avec le nouveau produit non nul $dn_t^2 = dn_t$, et l'espérance $\mathbb{E}[dX_t] = (a + c)\,dt$. En voici une représentation matricielle — en dimension 4, parce que l'espace $\mathcal{K}$ est de dimension 2

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi(X) = a + c \, .$$

3) *Algèbre du calcul stochastique quantique.* Eléments différentiels de la forme $dX_t = adt + bda_t^+ + b'da_t^- + cda_t^0$, espérance $\mathbb{E}[dX_t] = adt$, représentation matricielle

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ a & b' & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi(X) = a \, .$$

Le théorème de Belavkin dit que toutes ces algèbres de différentielles (modulo un certain idéal associé à la forme linéaire "espérance") sont représentables au moyen des différentielles du calcul stochastique quantique.

---

[1] *i.e.* de type positif sur le noyau de δ ; on perd l'interprétation des fonctions c.t.p. comme fonctions dont l'exponentielle est de type positif.

4. Passage à une représentation sur le Fock. Le résultat présenté dans cette section est le suivant : ayant construit plus haut une sorte de représentation infinitésimale de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{K}$, on peut construire simultanément toutes les représentations GNS associées aux fonctions de type positif $e^{t\psi}$, au moyen de l'espace de Fock au dessus de $\mathcal{K}$.

Nous allons en fait utiliser deux espaces de Fock : $\Gamma(\mathcal{K})$ au dessus de $\mathcal{K}$, et $\Gamma'(\widehat{\mathcal{K}})$ au dessus de $\widehat{\mathcal{K}}$, le $'$ indiquant que l'on conserve l'espace vectoriel sous-jacent, mais que l'on tord le produit scalaire à la façon de (1.3). Nous allons décrire cela plus en détail.

Commençons par l'espace de Fock tordu sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$: nous considérons l'espace des suites $(c) = c_{kn}$ de nombres complexes telles que $\sum_{kn} |c_{kn}|^2 < \infty$, et nous posons (noter le c'_{nk} au lieu de c'_{kn})

$$[(c)\,|\,(c')] = \sum\nolimits_{kn} \frac{\overline{c}_{kn} c'_{nk}}{k!n!}\,;$$

alors si l'on prend $c_{kn} = u^k w^n$, $c'_{km} = u'^k w'^n$ on a $[c\,|\,c'] = e^{\overline{u}w' + \overline{w}u'}$, qui est bien le produit scalaire tordu désiré pour les vecteurs exponentiels. On voit alors comment introduire l'espace $\mathcal{K}$: le Fock $\Gamma'(\widehat{\mathcal{K}})$ est l'espace des suites doubles $(f) = f_{km}$, où les coefficients appartiennent au Fock ordinaire sur $\mathcal{K}$ et $\sum_{km} \| f_{km} \|^2 / k!m! < \infty$, avec le produit scalaire tordu

$$[(f)\,|\,(g)] = \sum\nolimits_{kn} \frac{< f_{kn}\,|\,g_{nk} >}{k!n!}.$$

Le vecteur exponentiel tordu $\mathcal{E}(u + V + w)$ apparaît alors comme la suite $u^k w^m \mathcal{E}(V)$, c'est à dire le vecteur exponentiel $\mathcal{E}(u + V + w)$ de l'espace de Fock *ordinaire* $\Gamma(\widehat{\mathcal{K}})$, seul le produit scalaire étant changé.

Les opérateurs $\mathbf{R}(\mu)$ sur $\widehat{\mathcal{K}}$ sont étendus par seconde quantification au Fock $\Gamma(\widehat{\mathcal{K}})$ (non complété), avec la même notation. On a alors une *-représentation, pour le produit scalaire tordu. Le problème consiste alors à redescendre en une vraie *-représentation sur $\Gamma(\mathcal{K})$.

Pour accomplir cela, Belavkin définit pour tout p réel une isométrie de $\Gamma(\mathcal{K})$ dans $\Gamma'(\widehat{\mathcal{K}})$, de la manière suivante : pour $f \in \Gamma(\mathcal{K})$, on pose

$$(Jf)_{kn} = 0 \quad \text{si } n \neq 0 \qquad , \quad (Jf)_{k0} = p^k f\ .$$

Ainsi, $J\mathcal{E}(\lambda_0) = \mathcal{E}(p + \lambda_0 + 0)$. L'adjoint tordu $J^\star$ transforme la suite $(g) = g_{kn}$ en

$$J^\star(g) = \sum\nolimits_n \frac{p^n g_{0n}}{n!}\ .$$

En effet, on a

$$[Jf\,|\,(g)] = \sum\nolimits_n p^k < f, g_{0k} > /k! = < f\,|\,J^\star(g) > \ .$$

Ainsi $J^\star$ transforme $\mathcal{E}(a + \lambda_0 + b)$ en $e^{pb}\mathcal{E}(\lambda_0)$. On constate bien que $J^\star J = I$, J étant une isométrie, tandis que $JJ^\star \mathcal{E}(a + \lambda_0 + b) = e^{pb}\mathcal{E}(p + \lambda_0 + 0)$. En particulier, $JJ^\star = I$ sur les vecteurs de la forme $\mathcal{E}(p + \lambda_0 + 0)$.

Nous faisons alors opérer $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{K}$ par

$$\mathrm{S}(\mu) f = J^\star \mathbf{R}(\mu) J f \; . \tag{4.1}$$

Il est clair que $\mathrm{S}(\mu^*) = \mathrm{S}(\mu)^*$ (adjoint ordinaire), et nous avons, après un petit calcul utilisant (3.3), pour λ de masse nulle et μ arbitraire

$$\mathrm{S}(\mu)\, \mathcal{E}(\lambda) = e^{p^2\psi(\mu)+p<\eta(\mu^*)\,|\,\lambda>} \mathcal{E}(p\eta(\mu) + \rho(\mu)\,\lambda) \; . \tag{4.2}$$

Si μ est de masse 1, on vérifie alors que $\mathrm{S}(\nu)\,\mathrm{S}(\mu) = \mathrm{S}(\nu\mu)$, et on a construit une $*$-représentation du semi-groupe de convolution des mesures de masse 1 (à support fini) sur l'espace de Fock associé à l'espace préhilbertien des mesures de masse nulle (à support fini), qui est une représentation de Weyl généralisée

On a en particulier, pour $\lambda = 0$ (cas du vecteur vide)

$$\begin{aligned} < \mathrm{S}(\nu)\,\mathbf{1}, \mathrm{S}(\mu)\,\mathbf{1} > &=< e^{p^2\psi(\nu)} \mathcal{E}(p\eta(\nu), e^{p^2\psi(\mu)} \mathcal{E}(p\eta(\mu) > \\ &= e^{p^2(\psi(\nu^*)+\psi(\mu)+<\eta(\nu)\,|\eta(\mu)>} = e^{p^2\,[\nu\,|\,\mu]} \; . \end{aligned}$$

On a donc construit les représentations GNS associées aux fonctions de type positif $e^{\psi(\nu^*\mu)}$, pour μ, ν de masse p.

EXEMPLE. Considérons un espace préhilbertien $\mathcal{G}$ et posons $x^* = -x$, $x^*y = y - x$, et considérons la fonction de type négatif $\psi(x) = -\| x \|^2/2$. Alors l'espace $\mathcal{M}_0$ des mesures de masse nulle contient les mesures $\varepsilon_x - \varepsilon_0$ pour lesquelles le produit scalaire associé à ψ plus haut est exactement le produit scalaire hilbertien $< x, y >$. Le semi-groupe des mesures de masse 1 pour la convolution contient les mesures ε_x, qui opèrent par translation sur $\mathcal{G}$. La représentation que nous avons construite est alors la représentation de Weyl.

REMARQUE. Belavkin donne un calcul explicite de l'opérateur $\mathrm{S}(\mu)$ sous la forme

$$e^{p^2\psi(\mu)}\, e^{pa^+(\eta(\mu))}\, \Gamma(\rho(\mu))\, e^{pa^-(\eta(\mu^*)}$$

Cela vient de ce que l'on a construit en fait une représentation du semi-groupe des matrices (du type (1.4) avec $u = 1$)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta & \rho & 0 \\ \psi & \eta' & 1 \end{pmatrix}$$

et qu'une telle matrice est décomposable en un produit de matrices plus élémentaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \psi & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \eta' & 1 \end{pmatrix}$$

pour chacune desquelles on peut faire un calcul simple.

5. Lien avec le calcul stochastique. Le travail de Belavkin ne comporte pas de calcul stochastique. Nous allons donc comparer la construction précédente avec les résultats généraux de Schürmann. Celui-ci considère une *-bigèbre $\mathcal{A}$, sur laquelle a été défini un triplet de Schürmann (ρ, η, ψ) à valeurs dans un espace préhilbertien $\mathcal{K}$. Il construit une famille adaptée de *-homomorphismes X_t de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'algèbre des opérateurs sur l'espace de Fock $\Gamma(\mathcal{K})$, solution de l'équation différentielle stochastique suivante. Si $\lambda \in \mathcal{A}$ est tel que $\Delta(\lambda) = \sum_i \mu_i \otimes \nu_i$,

$$X_t(\lambda) = \delta(\lambda)\, I + \sum_i \int_0^t X_s(\mu_i) \Big(da_s^+(|\eta(\nu_i)>)+$$

$$+ da_s^\circ(\rho(\nu_i) - \delta(\nu_i)\, I) + da_s^-(<\eta(\nu_i^*\,|)) + \psi(\nu_i)\, ds \Big) \,.$$

Dans la situation qui nous occupe, on a $\Delta\varepsilon_x = \varepsilon_x \otimes \varepsilon_x$ et l'équation relative aux différents points est découplée, et prend la forme

$$X_t(x) = I + \int_0^t X_s(x) \left(da_s^+(x-e) + da_s^\circ(\rho(x) - I) + da_s^-(x^* - e) + \psi(x)\, ds \right)$$

qui est une équation à coefficients constants. Nous remarquons que l'élément différentiel à l'instant t commute avec le passé, de sorte qu'il n'y a pas lieu de distinguer l'équation droite de l'équation gauche. On peut résoudre cette équation par une formule explicite, où 1_t désigne l'indicatrice de $[0, t[$

$$X_t(x) = e^{t\psi(x)} \exp(a^+((x-e)\otimes 1_t))\, \Gamma(\rho(x)\, 1_t + I(1-1_t)) \, \exp(a^-((x^*-e)\otimes 1_t) \,.$$

En effet, comme ce produit est normalement ordonné, la formule d'Ito ne comporte aucune correction de "crochet droit". D'autre part, on sait d'après Hudson–Parthasarathy que pour tout opérateur U le processus $Y_t = \Gamma(U 1_t + I(1-1_t))$ est solution de l'é.d.s. $Y_t = I + \int_0^t Y_s(U-I)\, dN_s$. On constate alors que l'opérateur X_t sur l'espace de Fock jusqu'à l'instant t réalise la représentation construite plus haut, pour $p = \sqrt{t}$.

RÉFÉRENCES

[1] BELAVKIN (V.P.). Kernel representations of *-semigroups associated with infinitely divisible states, prépublication de Heidelberg 1990. Paru dans *Quantum Probability VII*, World Scientific 1992, p. 31–50.

[2] BELAVKIN (V.P.). The unified Ito formula has the Pseudo-Poisson structure, prépublication du Centro Vito Volterra, Rome 1992.

[3] BELAVKIN (V.P.). Chaotic states and stochastic integration in quantum systems, *Uspekhi Mat. Nauk*, **47**, 1992 et *Russian Math. Surveys*, **47**, 1992, p. 53–116.

[4] SCHÜRMANN (M). *White Noise on Bialgebras,* Lecture Notes in Mathematics n° 1544, Springer 1993.