YAO-ZHONG HU

Sur un travail de R. Carmona et D. Nualart

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 587-594
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__587_0>

Sur un travail de R. Carmona et D. Nualart

par Yao–Zhong HU

1. Introduction. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de Wiener canonique, associé au mouvement brownien (W_t) sur l'intervalle $[0,1]$, et soit F une fonctionnelle de Wiener, donnée par son développement en chaos $F = \sum_n I_n(f_n)/n!$ où les f_n sont des fonctions symétriques. On cherche des conditions de régularité sur les f_n permettant de donner un sens à la valeur $F(h)$ en un point h de l'espace de Cameron–Martin — et pour simplifier les notations nous traiterons le cas où $h = 0$. On sait (voir par exemple le *Sém. Prob. XXII*, p. 53, (7)) que cette valeur est donnée formellement par l'expression

$$F(0) = \sum_k \frac{(-1)^k}{2^k\, k!}\, \mathrm{Tr}^k(f_{2k}) \tag{1.1}$$

où Tr est l'opérateur de trace. D'autre part, il n'est pas facile de donner un sens à cet opérateur. Nous avons présenté dans l'article [2] une méthode générale pour faire cela, qui justifie la formule (1.1) dans des cas simples et unifie un certain nombre de calculs de ce type figurant dans la littérature.

La justification de la formule (1.1) vient d'être traitée par Carmona–Nualart dans le remarquable article [1], où la valeur en 0 est définie comme limite de $\int_{B_\varepsilon} F(\omega)\mathbb{P}(d\omega)\,/\,\mathbb{P}(B_\varepsilon)$, où B_ε est la boule de rayon ε au sens de la convergence uniforme. Ils traitent d'abord le cas d'une seule intégrale multiple d'ordre $n = 2m$, en montrant que lorsque le coefficient f_n appartient à L^q (avec $q > 1 + n/2$, l'existence de la limite en 0 au sens précédent équivaut à celle de la trace itérée $\mathrm{Tr}^m(f_n)$, définie au moyen d'un certain procédé d'approximation explicite, et que la formule (1.1) a lieu. Ce résultat est ensuite étendu à un développement chaotique infini, sous des conditions de nature trop contraignante — mais c'est la première fois que l'on peut donner un sens rigoureux à la formule (1.1) dans le cas de développements chaotiques infinis, à l'exception du cas évident des exponentielles stochastiques. L'article de Carmona–Nualart présente aussi une application des résultats précédents aux fonctionnelles d'Onsager–Machlup, qui est en dehors du sujet de cette note.

L'article de Carmona–Nualart comporte des calculs longs et difficiles. Nous nous proposons dans cette note d'en présenter l'idée l'essentielle sous une forme très simplifiée.

2. Notations et calculs préliminaires. Les noyaux sur $\mathbb{R}$ sont désignés par des lettres majuscules, et leur densité par rapport à la mesure de Lebesgue (qui existera toujours ci-dessous) par la minuscule correspondante. La densité d'un noyau composé $C = AB$ est notée

$$c = a * b \quad \text{avec} \quad c(x,y) = \int a(x,u)\, b(u,y)\, du$$

On pose de même $Af = a * f = \int a(\cdot, y)\, f(y)\, dy$.

On désigne par ε un nombre > 0, par T_ε le temps de rencontre du complémentaire de l'intervalle $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, par M_t^ε la fonctionnelle multiplicative $I_{\{T_\varepsilon < t\}}$, par $Q_t^\varepsilon f(x) = \mathbb{E}^x [f \circ W_t M_t^\varepsilon]$ le semi-groupe tué. La densité de probabilité admet pour $\varepsilon = 1$ l'expression explicite

$$q_t^1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} r_k(x)\, r_k(y) \tag{2.1}$$

avec $\lambda_k = k^2\pi^2/8$ et $r_k(x) = \sin \frac{k\pi}{2}(x+1)$. On a ensuite la forme générale

$$q_t^\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t/\varepsilon^2} r_k(\frac{x}{\varepsilon})\, r_k(\frac{y}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon}\, q_{t/\varepsilon^2}(x/\varepsilon\,, y/\,\varepsilon)\ . \tag{2.2}$$

Il est possible de calculer le développement en chaos de la v.a. $f(W_t)\, M_t^\varepsilon$: un calcul analogue a été fait dans le *Sém. Prob. XXI*, p. 22-23, et nous ne le referons pas en détail. Recopions en le résultat, en omettant par endroits la mention de t ou ε pour alléger. Le n–ième coefficient du développement en chaos de $f(W_t)\, M_t^\varepsilon$ vaut, en désignant par $R_s f$ la dérivée en x de $Q'_s(x,f)$ (l'opérateur R_s est un noyau, mais non positif)

$$g_\varepsilon(t_1, \ldots, t_n) = Q_{t_1}(0, R_{t_2-t_1} \ldots R_{t-t_n} f)\ .$$

Le cas qui nous intéresse est $t = 1,\ f = 1$.

Dans une première étape, on considère une seule intégrale stochastique multiple $F = I_n(f_n)$ d'ordre n, (étendue au simplexe croissant Σ_n). On se propose d'étudier l'existence de la limite

$$L = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathbb{E}[F M_1^\varepsilon]}{\mathbb{E}[M_1^\varepsilon]} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}[F \mid \|W\| < \varepsilon]\ . \tag{2.3}$$

On peut se borner au cas où n est pair. Sinon, : la symétrie $\omega \to -\omega$ sur l'espace de Wiener préserve M_1^ε et change F en $-F$, donc l'expression à calculer est toujours nulle.

> Toutefois cet argument s'applique seulement au calcul de la valeur en 0, que se passe-t-il si l'on fait une translation?

Le dénominateur est connu (et peut aisément se déduire du calcul de q_t^ε)

$$\mathbb{E}[M_1^\varepsilon] \sim \frac{4}{\pi} e^{-\lambda_1/\varepsilon^2}\ . \tag{2.4}$$

D'après ce résultat, et le développement en chaos de M_1^ε ci–dessus, on peut aussi bien écrire

$$L = \lim_\varepsilon \frac{\pi}{4} e^{\lambda_1/\varepsilon^2} \int_{\Sigma_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, g_\varepsilon(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n \tag{2.5}$$

$$g_\varepsilon(t_1, \ldots, t_n) = q_{t_1/\varepsilon^2} * q'_{(t_2-t_1)/\varepsilon^2} * \cdots * q'_{(1-t_n)/\varepsilon^2}(x,y) * 1(0)\ . \tag{2.6}$$

3. Le terme principal. Nous allons montrer que le calcul de la limite (2.6) se ramène à l'application d'un certain procédé d'approximation explicite.

Nous considérons deux systèmes orthonormés (ce ne sont pas des bases) dans $L^2(\mathbb{R})$, $\rho_k(x) = (1/\sqrt{\varepsilon})\, r_k(x/\varepsilon)$ $(k \geq 1)$, $\widetilde{\rho}_k(x) = (1/\sqrt{\varepsilon})\, \widetilde{r}_k(x/\varepsilon)$ $(k \geq 0)$, avec

$$r_k(x) = I_{\{|x|<1\}} \sin \frac{k\pi}{2}(x+1)\ ,\ \widetilde{r}_k(x) = I_{\{|x|<1\}} \cos \frac{k\pi}{2}(x+1)\ . \tag{3.1}$$

Notons la formule

$$\int \widetilde{\rho}_k(x)\, \rho_\ell(x)\, dx = 0 \quad \text{si } k \equiv \ell\,(mod\,2), \quad = 4\ell/\pi(\ell^2 - k^2) \text{ sinon.} \tag{3.2}$$

Dans ces conditions, on peut écrire (en omettant ε de q_t^ε pour alléger)

$$\begin{aligned} q_{t/\varepsilon^2} &= \sum\nolimits_k e^{-\lambda_k t/\varepsilon^2} \rho_k(x)\, \rho_k(y) \\ q'_{t/\varepsilon^2} &= \sum\nolimits_k \frac{k\pi}{2\varepsilon} e^{-\lambda_k t/\varepsilon^2} \widetilde{\rho}_k(x)\, \rho_k(y) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nous posons ensuite

$$q_t = e^{-\lambda_1 t}(a + b_t)\ , \qquad q'_t = e^{-\lambda_1 t}(a' + b'_t)$$

où a, a' viennent du premier terme de la série correspondante (et ne dépendent pas de t), tandis que b_t ou b'_t désigne le reste. Ainsi

$$\begin{gathered} a(x,y) = \rho(x)\, \rho(y)\ , \qquad a'(x,y) = \frac{\pi}{2\varepsilon}\, \widetilde{\rho}(x)\, \rho(y)\ , \\ b_t(x,y) = \sum\nolimits_{k\geq 2} e^{-(\lambda_k - \lambda_1)t} \rho(x)\, \rho(y) \\ b'_t(x,y) = \sum\nolimits_{k\geq 2} e^{-(\lambda_k - \lambda_1)t} \frac{k\pi}{2\varepsilon}\, \widetilde{\rho}(x)\, \rho(y) \end{gathered}$$

Dans l'expression (2.6), on décompose ainsi q et chaque q', et on développe le produit. On a d'abord en facteur $e^{-\lambda_1/\varepsilon^2}$, qui est de l'ordre de grandeur du dénominateur. On recherche alors le terme principal de la somme, celui dont la décroissance est la moins rapide lorsque $\varepsilon \to 0$ (pour l'instant, nous faisons un calcul formel, dont la justification sera indiquée ensuite). Du fait que $a * a' = a' * a' = 0$, et que b'_{t/ε^2} commence par un terme en $e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t/\varepsilon^2}$, on doit placer le plus grand nombre possible de termes en a ou a', mais non consécutifs. Le terme principal est donc, pour $n = 2m$ pair, la valeur en 0 de la fonction

$$e^{-\lambda_1/\varepsilon^2} a * b'_{(t_2 - t_1)/\varepsilon^2} * a' \ldots * b'_{(t_n - t_{n-1})/\varepsilon^2} * a' * 1 \tag{3.4}$$

(composition de $n+1$ termes). Revenons alors à la limite à calculer. L'exponentielle en tête est la même qu'au dénominateur. Nous remarquons que $a' * 1$ vaut $\frac{4}{\pi}\sqrt{\varepsilon}\, \widetilde{\rho}_1$, le coefficient $4/\pi$ disparaissant avec celui du dénominateur. Il nous reste donc à trouver la limite de l'expression suivante

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Sigma_n} f_n(t_1, \ldots, t_n)\, j_\varepsilon(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

$$\begin{aligned} j_\varepsilon(t_1, \ldots, t_n) = (\frac{\pi}{2\varepsilon})^m \sqrt{\varepsilon}\, \rho_1(0) \int \rho_1(x_1)\, b'_{(t_2 - t_1)/\varepsilon^2}(x_1, x_2)\, \widetilde{\rho}_1(x_2)\, \rho_1(x_2)\, b'_{(t_4 - t_3)/\varepsilon^2} \cdots \\ \cdots b'_{(t_n - t_{n-1})/\varepsilon^2}(x_{n-1}, x_n)\, \widetilde{\rho}(x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n\ . \end{aligned}$$

Le coefficient en tête provient des termes en a', et le suivant vaut 1. Nous revenons à l'intervalle $[-1,1]$ en introduisant les fonctions

$$\beta'_t(x,y) = \sum\nolimits_{k\geq 2} e^{-(\lambda_k-\lambda_1)t}\,\widetilde{r}_k(x)\,r_k(y)$$
$$\varphi(t) = -\pi \int r_1(x)\,\beta'_t(x,y)\,\widetilde{r}_1(y)\,dxdy$$

(le signe $-$ pour rendre φ positive!) et alors l'expression à calculer s'écrit

$$j_\varepsilon(t_1,\ldots,t_n) = \frac{(-1)^m}{2^m\varepsilon^{2m}}\varphi((t_2-t_1)/\varepsilon^2)\ldots\varphi((t_n-t_{n-1})/\varepsilon^2)\,. \tag{3.5}$$

Ceci va nous donner à la limite la formule (1.1) avec une interprétation de la trace par régularisation. On peut calculer explicitement

$$\varphi(t) = \sum_{\substack{k\geq 2\\ k \text{ pair}}} \frac{8k^2}{(k^2-1)^2}\,e^{-(k^2-1)\pi^2 t/8}\,. \tag{3.6}$$

Carmona et Nualart vérifient par un calcul direct que $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 1$ — ce qui pourra aussi se vérifier sans calcul, lorsque nous aurons montré que le terme étudié est vraiment le "terme principal".

4. Majoration du reste. Il faut maintenant justifier rigoureusement ce fait. Carmona et Nualart utilisent pour cela une forme raffinée de l'inégalité de Young. Nous allons voir ce que peut donner ici un lemme tout à fait élémentaire, dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME 1. *Soient (ρ_k) et $(\widetilde{\rho}_k)$ deux familles orthonormées dans L^2, et G l'opérateur associé au noyau*

$$g(x,y) = \sum\nolimits_k a_k\,\widetilde{\rho}_k(x)\,\rho_k(y)$$

Alors la norme $\|G\|_{22}$ de G comme opérateur de L^2 dans L^2 vaut au plus $\sup_k |a_k|$, et sa norme $\|G\|_{2\infty}$ comme opérateur de L^2 dans L^∞ vaut au plus $\sup_x(\sum_k |a_k\widetilde{\rho}_k(x)|^2)^{1/2}$.

Nous avons à montrer que tous les termes (en nombre fini) du type suivant tendent vers 0

$$\int_{\Sigma_n} f_n(t_1,\ldots,t_n)\,h_\varepsilon(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n \tag{4.1}$$

où h_ε est un facteur, autre que le terme principal considéré plus haut, dans le développement (*cf.* (3.4))

$$(a+b_{t_1/\varepsilon^2})*(a'+b'_{(t_2-t_1)/\varepsilon^2})*\ldots*(a'+b'_{(t_n-t_{n-1})/\varepsilon^2})*(a'+b'_{(1-t)/\varepsilon^2})*1(0)\,.$$

Nous allons montrer que h_ε tend vers 0, non dans $L^2(\Sigma_n)$ mais dans certains L^p avec $p<2$, ce qui exigera que f_n appartienne à l'espace L^q conjugué.

L'idée de la majoration est simple : chacun de ces termes peut s'écrire sous la forme $u_0 * u_1 * \ldots u_n * 1(0)$, et se majore donc (avec les notations du lemme) par

$$\| u_0 \|_{2\infty} \| u_1 \|_{22} \cdots \| u_n \|_{22} \| 1 \|_2 \tag{4.2}$$

où la dernière norme concerne l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$, et vaut donc $\sqrt{2\varepsilon}$. Nous allons commencer par estimer les normes en question. On désigne par C une constante universelle, dont la valeur importe peu et qui change de place en place. On a d'abord

$$\| a \|_{2\infty} \leq \sup_x |\rho_1(x)| = 1/\sqrt{\varepsilon}\,, \qquad \| a' \|_{22} \leq \frac{1}{\varepsilon} \tag{4.3}$$

Ensuite, pour $\alpha \geq 0$ (on aura en fait $\alpha \in [0,1]$)

$$\begin{aligned} \| b \|_{2\infty} &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\textstyle\sum_k e^{-Ck^2t/\varepsilon^2})^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\textstyle\sum_k k^\alpha e^{-Ck^2t/\varepsilon^2})^{1/2} \\ &\leq C \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_0^\infty x^\alpha e^{-Ctx^2/\varepsilon^2} dx \right)^{1/2} \leq C \varepsilon^{\alpha/2} t^{-(1+\alpha)/4}\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Il est intéressant de noter que la dernière constante C peut être choisie indépendamment de $\alpha \in [0,1]$. On a enfin

$$\| b'_{t/\varepsilon^2} \|_{22} \leq \frac{C}{\varepsilon} \sup_{k \geq 2} k e^{-Ck^2t/\varepsilon^2}$$

En recherchant le maximum de xe^{-ux^2} pour $u = -Ct/\varepsilon^2$, puis en utilisant l'inégalité $e^{-x} \leq Cx^{-\alpha}$, on obtient (toujours avec C indépendant de $\alpha \in [0,1]$)

$$\| b'_{t/\varepsilon^2} \|_{22} \leq C \frac{\varepsilon}{t} e^{-C\varepsilon^2/t} \leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{1-\alpha}\,. \tag{4.5}$$

Enfin, le dernier ingrédient de la démonstration sera le fait que pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > -1$, l'intégrale suivante est finie

$$\begin{aligned} &\int_{s<s_1<\ldots<s_k<t} (s_1 - s)^{\alpha_1} (s_2 - s_1)^{\alpha_2} \ldots (t - s_k)^{\alpha_{k+1}} \, ds_1 \ldots ds_k \\ &\qquad = C(t-s)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k+1} + k}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Plus précisément, si les α_i sont pris dans $[0,1]$, la constante C est majorée par $1/k!$.

Pour illustrer le raisonnement, nous allons d'abord traiter le cas du second chaos, où l'on rencontre, en omettant le terme principal et les termes nuls, quatre termes à majorer

$$\begin{aligned} J_1 &= a * b'_{(t-s)/\varepsilon^2} * b'_{(1-t)/\varepsilon^2} * 1(0)\,, \qquad J_2 = b_{s/\varepsilon^2} * a' * b'_{(1-t)/\varepsilon^2} * 1(0)\,, \\ J_3 &= b_{s/\varepsilon^2} * b'_{(t-s)/\varepsilon^2} * a' * 1(0)\,, \qquad J_4 = b_{s/\varepsilon^2} * b'_{(t-s)/\varepsilon^2} * b'_{(1-t)/\varepsilon^2} * 1(0)\,. \end{aligned}$$

Ces quatre intégrales sont dans tout L^p avec $p < 2$, et par conséquent il suffit que le coefficient chaotique $f(s,t)$ appartienne à L^q pour un $q > 2$.

Nous traiterons les cas typiques J_1 (contenant a) et J_3 (contenant b). Le majorant auquel on est conduit pour J_1 vaut

$$\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^2}{t-s}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\varepsilon^2}{1-s}\right)^{1-\alpha}\sqrt{\varepsilon} = C\varepsilon^{4(1-\alpha)-2}(t-s)^{1-\alpha}(1-s)^{1-\alpha}$$

L'intégrabilité de $J_1^p(s,t)$ revient donc à trouver α tel que $-p(1-\alpha) > -1$ et $4(1-\alpha)-2 > 0$, inégalités compatibles si $p < 2$. Pour J_3 nous utilisons deux exposants différents $\beta, \alpha > 0$, et nous avons le majorant

$$C\,\frac{\varepsilon^{\beta/2}}{s^{(1+\beta)/4}}\,\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^2}{t-s}\right)^{1-\alpha}\sqrt{\varepsilon} = C\,\varepsilon^{\beta/2+2(1-\alpha)-3/2}\,s^{-(1+\beta)/4}\,(1-t)^{-(1-\alpha)}$$

Les conditions à imposer sont alors $\beta/2 - 2\alpha + 1/2 > 0$, $-p(1+\beta)/4 > -1$, $-p(1-\alpha) > -1$. Elles sont compatibles si $p < 2$, en prenant $\beta \sim 1$ et $\alpha \sim 1/2$.

L'idée est la même dans le cas général. Il y a deux types de termes à distinguer, ceux qui commencent par a, et qui s'obtiennent tous en remplaçant dans le terme principal k (parmi les m) facteurs a' par des b', et ceux qui commencent par b.

L'étude des premiers est plus simple. La majoration (4.3) de a' est la même que la majoration (4.5) de b' correspondant à $\alpha = 1$, donc nous pouvons raisonner comme s'il y avait eu un seul remplacement. Nous majorons alors les $m-1$ facteurs a' par (4.3), les $m+1$ facteurs b' par (4.5), et il nous reste une majoration en

$$\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\,\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\,\frac{\varepsilon^{2(m+1)(1-\alpha)}}{\prod_i \Delta_i^{1-\alpha}}\sqrt{\varepsilon}$$

où les indices i correspondent aux $m+1$ termes b' considérés, et $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$. Si on élève à la puissance p, on obtient (comme $n = 2m$) l'intégrale de la fonction

$$\varepsilon^{p((n+2)(1-\alpha)-n)}\prod_i \Delta_i^{-p(1-\alpha)}$$

et les inégalités à réaliser simultanément sont

$$p(1-\alpha) < 1\,, \qquad (n+2)(1-\alpha) > n \quad \text{donc} \quad p < \frac{n+2}{n}$$

dont l'exposant conjugué est $1 + \frac{n}{2}$.

La majoration des termes commençant par b est tout à fait comparable, mais il faut utiliser la majoration (4.4) pour b et la majoration (4.5) pour b', ce qui exige (comme ci-dessus pour J_3) l'utilisation de deux exposants β et α différents. La condition sur p est la même que ci-dessus, et les détails ne sont peut être pas nécessaires.

5 Le théorème 3.3 de l'article de Carmona-Nualart affirme que pour $F = \sum_n I_n(g_n)$, si la série $\sum_n n!\,k^n \,\| g_{2n} \|_\infty$ est convergente pour tout $k > 0$, et si les traces $\mathrm{Tr}^m g_{2m}$ existent au sens défini plus haut, alors $F(0)$ existe au sens de (2.3), et sa valeur est égale à la somme de la série (1.1). Dans la notation que nous utilisons ici ($g_n = f_n/n!$), la condition de C–N peut se récrire

$$\sum_n \| f_{2n} \|_\infty \frac{k^n}{n!} < \infty \quad \text{pour tout } k > 0. \tag{5.1}$$

Par comparaison, si l'on cherche à étudier simplement la convergence de la série (1.1) sur un intervalle $[0,a]$, on utilisera la majoration $\| \operatorname{Tr} f_m \|_\infty \leq a \| f_m \|_\infty$, et la condition qui apparaît naturellement est $\sum_n a^n \| f_{2n} \|_\infty / 2^n n! < \infty$. La condition (5.1) est donc à peu près la meilleure que l'on puisse exprimer en fonction des normes uniformes seulement.

La méthode présentée plus haut se prête aussi à l'étude de ce résultat. Nous allons seulement traiter ici la majoration de la somme infinie de tous les termes négligés (4.1) — pour l'étude des termes principaux, il n'y a rien à changer au travail de Carmona–Nualart.

Nous commençons par utiliser le fait que les constantes C dans (4.4)–(4.6) ne dépendent pas de $\alpha \in [0,1]$. Ensuite, la majoration faite plus haut pour chacun des termes h_ε considérés en (4.1), donne pour $n = 2m$ une estimation des termes du premier type (commençant par a) de la forme

$$C^{n+1}\, \varepsilon^{(n+2)(1-\alpha)-n} \prod_{i \in I_1} \Delta_i^{\alpha-1}$$

I_1 comportant $m+1$ éléments, et pour les termes du second type (commençant par b) une majoration comportant deux exposants α, β

$$C^{n+1}\, \varepsilon^{(1+\beta)/2+(1-\alpha)\,n-n} \Delta_1^{-(1+\beta)/4} \prod_{i \in I_2} \Delta_i^{\alpha-1}$$

I_2 comportant m éléments. Comme on va intégrer le produit de h_ε par f_n dans (4.1) en utilisant une majoration de $\| f_n \|_\infty$, c'est l'intégrale de h_ε qui doit être majorée. Le résultat que l'on obtient est, pour $n = 2m$, de la forme

$$\int_{\Sigma_n} | h_\varepsilon | \leq \varepsilon \frac{C^{2m}}{m!} \cdot$$

Si l'on note alors par R_n la somme de tous les termes négligés, en nombre au plus 2^{n+1}, on a une majoration de même forme

$$\int_{\Sigma_n} f_n R_n \leq \varepsilon \| f_n \|_\infty \frac{C^{2m}}{m!} \cdot$$

et il n'y a donc aucun problème de convergence, sous l'hypothèse de Carmona–Nualart.

Voici une dernière remarque. La fonction φ considérée plus haut en (3.6) a une forme assez compliquée, mais on peut montrer sans difficulté que l'étude des fonctions (3.5) peut être remplacée par celle des fonctions analogues, où $\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(\frac{t}{\varepsilon^2})$ est remplacé par $\frac{1}{\varepsilon}e^{-t/\varepsilon}$. On obtient ainsi une condition suffisante plus simple.

RÉFÉRENCES

[1] CARMONA (R.) et NUALART (D.). Traces on Wiener space and the Onsager–Machlup functional. A paraître au *J. Funct. Anal.*, 1992.

[2] HU (Y.Z.) et MEYER (P.A.). On the approximation of Stratonovitch multiple integrals. A paraître dans le volume dédié à G. Kallianpur, Springer 1992.

Note sur les épreuves. Nous remercions D. Nualart de nous avoir autorisé à publier cet exposé avant la parution de l'article [1]. D'autre part, il nous a fait remarquer que les résultats obtenus par notre méthode simple sont un peu moins précis que ceux de [1] : nous supposons $f_n \in L^q$, $q > 1 + n/2$ au lieu de $q > (1 + n/4) \vee 2$).

HU Yao-Zhong
IRMA, Université Louis Pasteur
F-67084 Strasbourg Cedex
et
Institute of Math. Science, Academia Sinica
Wuhan, Hubei 430071, CHINE