SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

YAO-ZHONG HU

Série de Taylor stochastique et formule de Campbell-Hausdorff, d'après Benarous

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 579-586
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__579_0>

SÉRIE DE TAYLOR STOCHASTIQUE ET FORMULE DE CAMPBELL–HAUSDORFF, D'APRÈS BEN AROUS

par Yao–Zhong HU

Après le travail d'Azencott [1] (voir aussi Platen [1]), Ben Arous [1] présente des résultats importants sur les séries de Taylor stochastiques. P.A. Meyer a suggéré d'expliquer pourquoi il se produit "une interaction miraculeuse entre des formules purement algébriques sur la série de Campbell–Hausdorff et des identités probabilistes entre intégrales d'Ito et de Stratonovitch", comme dit Ben Arous dans l'introduction. En même temps, nous avons voulu présenter quelques résultats essentiels du travail de Ben Arous. Nous trouvons qu'on peut le simplifier en utilisant des méthodes de Strichartz [1], déjà présentées dans le Séminaire XXIV (Hu [1]). Maintenant on s'intéresse moins à la série de Taylor stochastique. Les travaux récents s'intéressent plutôt à la densité de la diffusion en temps petit par les méthodes du Calcul de Malliavin.

1. Définitions et notations

On considère une équation différentielle stochastique (éds) au sens de Stratonovitch

$$X_t = x + \int_0^t a_0(X_s)\,ds + \sum_{i=1}^{\nu} \int_0^t a_i(X_s)\,\partial W_s^i \ , \tag{1.1}$$

où le processus X est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, les W^i sont des mouvements browniens indépendants, et les a_j ont la nature géométrique de champs de vecteurs C^∞. La même équation peut s'écrire sous la forme d'Ito

$$X_t = x + \int_0^t \widetilde{a}_0(X_s)\,ds + \sum_{i=1}^{\nu} \int_0^t \widetilde{a}_i(X_s)\,dW_s^i \ , \tag{1.1'}$$

avec $\widetilde{a}_i = a_i$ pour $i \geq 1$, mais $\widetilde{a}_0$ n'a plus la nature géométrique d'un champ de vecteurs (voir plus loin). On raccourcit l'expression en convenant de poser $ds = dW_s^0$ et en sommant à partir de $i=0$.

On peut se poser trois problèmes sur l'équation (1.1).

1) Est ce qu'il existe une formule *déterministe* dépendant d'une trajectoire arbitraire, permettant de calculer la solution en appliquant la formule à $X_\bullet(\omega)$?

2) Trouver le développement de la solution en temps petit.

3) Trouver le développement de la solution en chaos.

Les trois problèmes utilisent les intégrales multiples d'Ito et de Stratonovitch, mais de manière différente. Pour le problème (1), il y a une explication pas très difficile. Si l'on connaît une formule développant la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$x(t) = x + \sum_{i=0}^{\nu} a_i(x(s))\,w^i(s)\,ds \ , \tag{1.2}$$

avec des fonctions w^i quelconques, alors on obtient la formule probabiliste en remplaçant $w^i(t)\,dt$ par ∂W_t^i dans les intégrales multiples (c'est le principe de transfert de l'intégrale de Stratonovitch). Donc on n'a plus de probabilités, mais on trouve dans le cas déterministe quelque chose qui ressemble un peu aux chaos, les intégrales itérées de Chen (voir Fliess et Norman–Cyrot [1]).

Le second problème contient un peu plus de probabilités, parce que (au contraire de (1.2)) dW_t^0 et les autres dW_t^i ne sont pas les mêmes en tant petit. On dit que des v.a. ξ_t à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sont $O(t^\alpha)$ en temps petit si la loi de ξ_t/t^α reste tendue quant $t \to 0$, et d'ordre t^α si elles sont tendues dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors on sait bien que le mouvement brownien est d'ordre $t^{1/2}$. La série de Taylor stochastique est le développement de la solution en termes d'ordre $t^{m/2}$ avec m entier. Ce développement fait intervenir les intégrales multiples, mais regroupées d'une autre manière.

Le troisième problème est purement probabiliste, il utilise les intégrales d'Ito et de Stratonovitch, mais par rapport aux mouvements browniens seulement, sans le terme en dt. Nous en avons parlé dans le *Sém. Prob. XXII*, p. 61–63, et nous n'y revenons pas ici.

Voici les notations importantes. D'abord, si on applique une fonction f de classe C^∞ aux deux membres de (1.1), cela donne

$$f(X_t) = f(x) + \sum_{i=0}^{\nu} \int_0^t A_i f(X_s)\,\partial W_s^i \tag{1.3}$$

$$= f(x) + \sum_{i=0}^{\nu} \int_0^t \widetilde{A}_i f(X_s)\,dW_s^i \tag{1.3'}$$

où A_i est l'opérateur du premier ordre $\sum_\alpha a_i^\alpha D_\alpha$, et $\widetilde{A}_i = A_i$ pour $i \geq 1$ mais $\widetilde{A}_0$ est l'opérateur du second ordre $A_0 + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} A_i^2$.

Si on utilise la méthode d'itération sur cette équation (1.3) (ce n'est pas du tout la même chose que d'appliquer la méthode de Picard à l'équation non linéaire (1.1)) on obtient l'expression suivante, et les notations serviront dans toute la suite

$$f(X_t) = f(x) + \sum_{|J|<n} A^J f(x)\,S_J(t) + R_n \tag{1.4}$$

$$R_n = \sum_{|J|=n} \int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} A^J f(X_{s_1})\,\partial W_{s_1}^{i_1} \ldots \partial W_{s_n}^{i_n}\,. \tag{1.5}$$

On désigne par $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$ un multiindice de longueur $|J| = n$, dont les éléments i_k prennent les valeurs $0, \ldots, \nu$. Alors A^J est l'opérateur différentiel $A^{i_1} \ldots A^{i_n}$, et $S_J(t)$ est l'intégrale itérée de Stratonovitch

$$S_J(t) = \int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} \partial W_{s_1}^{i_1} \ldots \partial W_{s_n}^{i_n}\,. \tag{1.6}$$

Pour une expression explicite et une estimation de ces intégrales (d'après Ben Arous) voir la note de Meyer [1] dans le volume précédent du Séminaire.

Par exemple, si $r = 0$, $\nu = 1$, $A_0 = D$, l'équation différentielle a la solution évidente $X_t = x + t$ et la formule (1.4) est la formule de Taylor ordinaire avec reste intégral. De même, si $r = \nu$, $A_0 = 0$, $A_i = D_i$ pour $i \geq 1$, l'éds a la solution triviale $X_t = x + W_t$ et on obtient la formule de Taylor usuelle à plusieurs variables.

Le même raisonnement donne sous la forme d'Ito, en partant de l'équation (1.3'), et avec des notations parallèles

$$f(X_t) = f(x) + \sum_{|J|<n} \widetilde{A}^J f(x) \, I_J(t) + \widetilde{R}_n \tag{1.4'}$$

$$\widetilde{R}_n = \sum_{|J|=n} \int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} \widetilde{A}^J f(X_{s_1}) \, dW_{s_1}^{i_1} \ldots dW_{s_n}^{i_n} . \tag{1.5'}$$

Dans ces calculs, seule la formule de passage de la forme d'Ito à la forme de Stratonovitch utilise le caractère brownien des semimartingales directrices. En particulier, si l'on prend une "équation différentielle stochastique" triviale de la forme $X_t = x + \varphi(t)$ où φ est une courbe différentiable, on obtient des développement suivant les *intégrales itérées de Chen* de la courbe φ. Le caractère brownien sera utilisé au paragraphe suivant.

2. Formule de Taylor stochastique

La formule de Taylor classique donne un développement limité de la fonction $f(x+t)$ en temps petit, suivant les puissances de t. Ici on va rechercher un développement limité de $f(X_t)$ suivant les puissances de $\sqrt{t}$. Que peut on dire alors des intégrales itérées $S_J(t)$ ou $I_J(t)$? Soit $|J| = n$ et soit $n = p(J) + q(J)$, où $p(J)$ est le nombre des indices $i_k \in J$ égaux à 0. Alors la loi de $S_J(t)/t^{p(J)+\frac{1}{2}q(J)}$ ne dépend pas de t, et en fait $S_J(t)$ est exactement d'ordre $\|J\|/2$, où l'on pose $\|J\| = |J| + p(J)$. Il en est de même pour $I_J(t)$. Pour étudier le développement limité de X_t en temps petit, on est donc amené à regrouper les termes de la somme (1.4) ou (1.4') suivant les valeurs de $\|J\|$ au lieu des valeurs de $|J|$. Comme le développement est le même sous la forme d'Ito ou de Stratonovitch, et que les intégrales des deux types sont du même ordre, on voit qu'il se produit déjà une "interaction" (sans miracle) entre certains calculs de géométrie différentielle et les formules de transformation d'Ito en Stratonovitch.

Une bonne manière d'étudier le développement en temps petit, consiste à introduire l'éds dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$

$$X_t^\varepsilon = x + \varepsilon^2 \int_0^t a_0(X_s) \, ds + \varepsilon \sum_{i=1}^{\nu} a_i(X_s) \, \partial W_s^i , \tag{2.1}$$

$$= x + \varepsilon^2 \int_0^t \widetilde{a}_0(X_s) \, ds + \varepsilon \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{a}_i(X_s) \, dW_s^i . \tag{2.1'}$$

Alors le processus X_t^ε a même loi que le processus $X_{\varepsilon^2 t}$, et cela ramène l'étude de X en temps petit à celle de X^ε sur $[0,1]$. La série de Taylor stochastique formelle de $f(X_t^\varepsilon)$ est

$$f(X_t^\varepsilon) = f(x) + \sum_n \varepsilon^n \sum_{\|J\|=n} A^J f(x) \, S_J(t) , \tag{2.2}$$

$$(2.2') \qquad = f(x) + \sum_n \varepsilon^n \sum_{\|J\|=n} \widetilde{A}^J f(x)\, I_J(t) \; .$$

et on doit simplement regrouper les termes de même degré en ε (ils sont égaux dans les deux séries).

3. Convergence de la série de Taylor stochastique

C'est Azencott qui a démontré rigoureusement que la formule (2.2) donne vraiment un développement limité en temps petit lorsque f est de classe C^∞. Ben Arous a plutôt étudié la convergence de la série de Taylor stochastique lorsque les coefficients sont analytiques réels, et montré *qu'elle converge p.s. sur un intervalle* $[0,T[$, *où* T *est un temps d'arrêt strictement positif.* Nous allons présenter le raisonnement de Ben Arous un peu simplifié.

D'abord, on identifie $\mathbb{R}^d$ au sous espace réel de $\mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}$. Alors les coefficients a_i^α, supposés analytiques réels dans un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, s'étendent en des coefficients analytiques complexes dans un ouvert de $\mathbb{C}^d$. Pour simplifier, nous appelons encore U cet ouvert.

Nous prenons un ouvert V relativement compact un peu plus petit, et nous modifions les coefficients en dehors de V, de manière qu'ils soient C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^{2d}$ entier (bien sûr à valeurs complexes). Appelons les b_i^α et considérons l'éds suivante, définissant un processus complexe dépendant du paramètre complexe z

$$(3.1) \qquad X_t^z = x + z^2 \int_0^t \widetilde{b}_0(X_s)\, ds + z \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{b}_i(X_s)\, dW_s^i \; .$$

Il vaut mieux travailler sous la forme d'Ito parce que là on peut faire de l'analyse. On prend la donnée initiale x dans un compact de V et on calcule la solution par la méthode de Cauchy d'interpolation linéaire. Alors l'approximation est fonction holomorphe du paramètre z tant qu'elle ne sort pas de l'ouvert où les coefficients sont holomorphes. Mais les théorèmes généraux sur les éds disent qu'il existe un temps d'arrêt T sur lequel, mettons pour $|z| \leq 2$, la solution et ses approximations de Cauchy restent dans V. Alors sur $[0,T]$ la solution est une limite de fonctions holomorphes, que l'on sait aussi bien borner. Donc c'est une fonction holomorphe de z pour $|z| < 2$ et sa série de Taylor converge pour $|z| = 1$. On se restreint à $z = 1$ et au domaine réel et c'est fini.

Ce raisonnement montre autre chose : si on prend z au lieu de z^2 dans le premier terme, on montre aussi la convergence de la série regroupée suivant les valeurs de $|J|$, c'est à dire de la série du n° 1.

4. Utilisation de la formule de Campbell–Hausdorff

Les calculs de cette section sont entièrement rigoureux dans le cas où l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs a_i est nilpotente. (cas étudié par Kunita). Ils sont aussi rigoureux en temps petit pour les champs invariants à gauche sur les groupes de Lie, et Ben Arous en donne une extension très intéressante au cas de champs complets engendrant une algèbre de Lie de dimension finie, sur unc variété quelconque. Mais comme ce qui nous intéresse est surtout de comprendre le "miracle", nous ne mettons pas les détails.

Nous reprenons l'é.d.s. de Stratonovitch (1.1)

$$dX_t = \sum_{i=0}^{\nu} a_i(X_t)\,\partial W_t^i \ , \ X_0 = x \ . \tag{4.1}$$

Nous allons aborder le calcul de la série de Taylor stochastique par une autre méthode, qui repose sur la série de Campbell–Hausdorff. Mais au lieu d'utiliser la forme traditionnelle de celle–ci, nous allons utiliser la forme plus efficace due à Strichartz [1], et présentée dans le volume XXIV du Séminaire.

Rappelons d'abord cette forme. Il s'agit de ramener l'intégration d' une équation différentielle déterministe à coefficients dépendant du temps ("non autonome")

$$dX(s) = V(s, X(s))\,dt \quad , \quad X(0) = x \tag{4.2}$$

pour t fixé suffisamment petit, à la résolution d'une équation différentielle à coefficients indépendants du temps ("autonome"), autrement dit $X(t) = \exp Z(t)\,x$ où $Z(t)$ est un champ de vecteurs, qui s'exprime au moyen des crochets de Lie des champs $V(s,\cdot)$ par la formule

$$Z_t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\sigma\in P_m} \frac{(-1)^{e(\sigma)}}{m^2\binom{m-1}{e(\sigma)}} \int_{T_m(t)} \mathrm{ad}\,V(s_{\sigma(1)})\ldots\mathrm{ad}\,V(s_{\sigma(m)})\,ds_1\ldots ds_m \tag{4.3}$$

où σ parcourt l'ensemble P_m des permutations de $\{1,\ldots,m\}$, où $T_m(t)$ est le m-simplexe croissant, et $e(\sigma)$ désigne le "nombre d'erreurs" de σ c'est à dire le nombre d'entiers $i \in \{1,m\}$ tels que $\sigma(i+1) < \sigma(i)$. D'autre part, la longue expression avec des ad est un abus de notation : le dernier champ à droite ne devrait pas avoir de ad ($adX\,\mathrm{ad}\,Y$ veut dire en réalité $(\mathrm{ad}\,X)\,Y = [X,Y]$).

Nous récrivons cette formule en supposant que le vecteur $V(s,x)$ s'écrit sous la forme $\sum_j a_j(x)\,w^j(s)$, où l'indice j varie de 0 à ν. Dans ce cas

$$\begin{aligned} Z_t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{0\le j_1,\ldots,j_m\le\nu} \sum_{\sigma\in P_m} & \frac{(-1)^{e(\sigma)}}{m^2\binom{m-1}{e(\sigma)}}\,\mathrm{ad}\,a_{j_1}\ldots\mathrm{ad}\,a_{j_m} \\ & \int_{T_m(t)} w^{j_1}(s_{\sigma(1)})\ldots w^{j_m}(s_{\sigma(m)})\,ds_1\ldots ds_m \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nous remettons les variables dans leur ordre naturel pour l'intégration. On pose $\tau = \sigma^{-1}$, $e'(\tau) = e(\sigma)$, et on obtient

$$\begin{aligned} Z_t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{0\le j_1,\ldots,j_m\le\nu} \sum_{\tau\in P_m} & \frac{(-1)^{e'(\tau)}}{m^2\binom{m-1}{e'(\tau)}}\,\mathrm{ad}\,a_{j_{\tau(1)}}\ldots\mathrm{ad}\,a_{j_{\tau(m)}} \\ & \int_{T_m(t)} w^{j_{\tau(1)}}(s_1)\ldots w^{j_{\tau(m)}}(s_m)\,ds_1\ldots ds_m \ . \end{aligned}$$

Suivant les règles du "principe de transfert", pour résoudre l'équation (4.1) il suffit de remplacer dans cette formule la seconde ligne par l'intégrale stochastique de

Stratonovitch $S_J(t)$

$$Z_t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{0 \le j_1, \dots, j_m \le \nu} \sum_{\tau \in P_m} \frac{(-1)^{e'(\tau)}}{m^2 \binom{m-1}{e'(\tau)}} \operatorname{ad} a_{j_{\tau(1)}} \dots \operatorname{ad} a_{j_{\tau(m)}}$$

$$\int_{T_m(t)} \partial W_{s_1}^{j_{\tau(1)}} \dots \partial W_{s_m}^{j_{\tau(m)}} \ . \tag{4.5}$$

On obtient ainsi $X_t(\omega, x)$ comme l'exponentielle (ordinaire) $\exp Z_t(\omega)\, x$ d'un champ de vecteurs aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable. Pour obtenir un développement de Taylor stochastique en temps petit, il reste à regrouper les intégrales de Stratonovitch $S_J(t)$ ci-dessus suivant leur ordre de grandeur pour t petit, comme on l'a fait dans la première partie.

Nous allons maintenant étudier le "miracle" signalé par Ben Arous. Pour calculer la solution de l'équation (4.1), au lieu d'utiliser le principe de transfert à partir d'une expression continue, nous pouvons l'utiliser sous la forme suivante : *la solution de l'équation de Stratonovitch est limite des solutions déterministes pour des approximations polygonales des mouvements browniens.* Nous faisons le calcul sur l'intervalle $[0, t]$, au moyen d'une subdivision $\Delta = \{0 = t_0 < \dots < t_n = t\}$ dont le pas va tendre vers 0. On pose pour $k = 1, \dots, n$, $I_k = [t_{k-1}, t_k[$ et

$$\Delta_k = t_k - t_{k-1} \quad , \quad \Delta_k W^i = W^i_{t_k} - W^i_{t_{k-1}} \ ,$$

et sur l'intervalle I_k on remplace dW^i_s par $(\Delta_k W^i / \Delta_k)\, ds$. Alors l'é.d.s. admet la solution approchée $Y = X^\Delta$ (la mention de la subdivision est sous-entendue partout) solution d'une é.d. ordinaire (déterministe) à coefficients étagés, dépendant du temps et de ω

$$dY_t = B(t, Y_t)\, dt \ ,$$

avec pour $t \in I_k$

$$B(t, x) = B_k(x) = \sum_i a_i(x)\, \Delta_i W^k / \Delta_k \ .$$

Posons aussi $V_k = B_k \Delta_k$. On peut écrire (c'est la méthode de Kunita)

$$Y_t = \exp V_n \dots \exp V_1 \ .$$

On va développer Y_t par la formule de Campbell–Hausdorff sous la forme $\exp Z$, et passer à la limite. Il y a deux manières d'écrire la formule de Campbell–Hausdorff, l'expression traditionnelle, et celle de Strichartz. Nous écrivons plutôt la seconde :

$$Z_t = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\sigma \in P_m} \frac{(-1)^{e(\sigma)}}{m^2 \binom{m-1}{e(\sigma)}} \int_{T_m(t)} \operatorname{ad} V(s_{\sigma(1)}) \dots \operatorname{ad} V(s_{\sigma(m)})\, ds_1 \dots ds_m \ .$$

Pour voir que ceci a bien la forme d'une formule de Campbell–Hausdorff, examinons (pour simplifier les notations) le terme correspondant à la permutation identique,

$$I = \int_{T_m(t)} \operatorname{ad} V(s_1) \dots \operatorname{ad} V(s_m)\, ds_1 \dots ds_m \ .$$

Dans chacun des intervalles I_k, $k=1,\ldots,n$ se trouvent $p_k \geq 0$ points s_j avec $p_1+\ldots+p_n=m$ et on a (en appelant $i_1,\ldots,i_\ell$ les intervalles dans lesquels il y a effectivement des points $(p_k>0)$)

$$I=\sum_{\ell}\sum_{p_1+\ldots+p_\ell=m}\frac{1}{p_1!\ldots p_\ell!}\sum_{0<i_1\ldots<i_\ell\leq n}(\operatorname{ad}V_{i_1})^{p_1}\ldots(\operatorname{ad}V_{i_\ell})^{p_\ell}\ .$$

Ce regroupement fait pour tous les termes donne l'expression de Strichartz de la formule de Campbell–Hausdorff pour $\log(\exp V_n\ldots\exp V_1)$, et il n'est pas si facile de voir par un raisonnement combinatoire pourquoi elle équivaut à la formule classique.

Ensuite, on développe les V_i, on fait tendre le pas de la subdivision vers 0, et on passe à la limite sur chaque intégrale. Si le mouvement brownien était différentiable, chaque $(\Delta_k W^i)^p$ donnerait un élément différentiel dW^i_t pour $p=1$, 0 pour $p=1$, et on retomberait exactement sur la formule (4.4) — c'est l'une des deux manières dont Strichartz démontre sa formule à partir de la formule CBH classique. Le principe de transfert nous dit que ce calcul reste correct pour le mouvement brownien à condition d'interpréter les intégrales multiples au sens de Stratonovitch.

Si l'on n'invoque pas le principe de transfert, et que l'on regarde directement les intégrales, on a un calcul plus compliqué : chaque $(\Delta_k W^i)^p$ donne un élément différentiel d'Ito dW^i_t si $p=1$, 0 si $p>2$ ou $p=2$, $i=0$, dt si $p=2$, $i>0$. Le développement fait donc apparaître, au lieu des intégrales de Stratonovitch, les expressions de ces intégrales au moyen d'intégrales d'Ito. Mais ici il n'y a aucun vrai "miracle".

Le vrai "miracle" dans l'article de Ben Arous est qu'au fond, la formule de Taylor stochastique trouvée par celui–ci (et qui est une formule de Campbell–Hausdorff continue) équivaut au calcul combinatoire (non trivial!) qui fait passer de la formule discrète classique de CBH à la forme continue de Strichartz. Le calcul de Strichartz ressemble en fait beaucoup à l'appendice du travail de Ben Arous, et d'ailleurs on retrouve des méthodes assez voisines de celles de Ben Arous dans l'article plus récent de Chacon et Fomenko [1] (*cf.* l'équation (1') p. 202), qui pousse beaucoup plus loin les raisonnements combinatoires.

5. Deux applications

Nous allons donner, pour faire plaisir aux lecteurs du séminaire, les deux exemples les plus classiques de développement en temps petit. Le premier est dû à Malliavin, avant le développement de la théorie générale présentée ci–dessus. Il s'obtient maintenant en gardant les termes d'ordre $m=1,2$ dans le développement complet

$$(5.1)\quad Z_t=\sum_{i=1}^{\nu}a_i W^i_t+a_0\,t+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq\nu}[a_i,a_j]\,\Big(\int_0^t W^i_s dW^j_s-W^j_s\,dW^i_s\Big)+O(t^{3/2})\ .$$

Le second concerne la lecture du mouvement brownien d'une variété riemannienne M, issu du point x, dans la carte exponentielle au point x. Dans ce cas, Ben Arous montre que le développement en temps petit est donné par une expression universelle, dont les coefficients s'expriment au moyen du tenseur de courbure et de ses dérivées.

RÉFÉRENCES

AZENCOTT (R.) [1]. Formule de Taylor stochastique et développements asymptotiques d'intégrales de Feynman, *Sém. Prob. XVI* (Supplément), Lect. Notes in M. 921, 1982, p. 237–284.

AZENCOTT (R.) [2]. Densités des diffusions en temps petit, développements asymptotiques, *Sém. Prob. XVIII*, Lect. Notes in M. 1059, 1984, p. 402–498.

BEN AROUS (G.) [1]. Flots et séries de Taylor stochastiques, *Prob. Th. Rel. Fields*, **81**, 1989, p 29–77.

CHACON (R.V.) et FOMENKO (A.T) [1]. Recursion formulas for the Lie integral, *Advances in M.*, **88**, 1991, p. 200–257.

FLIESS (M.) et NORMAN–CYROT (D.) [1]. Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker–Campbell–Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen, *Sém. Prob. XVI*, Lect. Notes in M. 920, 1982, p. 257–267.

HU (Y.Z.). [1]. Calculs formels sur les é.d.s. de Stratonovitch, *Sém. Prob. XXIV*, Lect. Notes in M. 1426, 1990, p. 453–460.

KUNITA (H.) [1]. On the decomposition of solutions of stochastic differential equations, *Stochastic Integrals*, (LMS Durham Symposium, 1980), Lect. Notes in M. 851, 1981, p. 213–255.

MEYER (P.A.) [1]. Estimations d'intégrales de Stratonovitch, *Sém. Prob. XXVI*, Lect. Notes in M. 1485, 1991.

PLATEN (E.) [1]. A Taylor formula for semimartingales solving a stochastic equation. *Third conference in stochastic differential equations,* Visegrad 1980, p. 65–68.

STRICHARTZ (R.S.) [1]. The Campbell–Baker–Hausdorff–Dynkin formula and solutions of differential equations, *J. Funct. Anal.*, **72**, 1987, p. 320–345.

Note sur les épreuves. G. Benarous nous a signalé le travail suivant, simultané avec le nôtre,

CASTELL (F.). Développement asymptotique de flots stochastiques (prépublication, Orsay Déc. 1991),

qui est consacré lui aussi à l'étude du "miracle", utilise lui aussi la formule de Strichartz, et donne un très joli résultat de développement en temps petit (avec le reste hors de l'exponentielle, ce qui est important).

HU Yao-Zhong
IRMA, Université Louis Pasteur
F-67084 Strasbourg Cedex
et
Institute of Math. Science, Academia Sinica
Wuhan, Hubei 430071, CHINE