SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GLADYS BOBADILLA
ROLANDO REBOLLEDO
EUGENIO SAAVEDRA

Sur la convergence d'intégrales anticipatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 505-513
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__505_0>

SUR LA CONVERGENCE D'INTÉGRALES ANTICIPATIVES

GLADYS BOBADILLA, ROLANDO REBOLLEDO ET EUGENIO SAAVEDRA

1. Les faux amis de l'intégrale de Skorokhod

Il est bien connu que l'intégrale généralisée de Skorokhod, notée δ, est définie comme l'adjoint de l'opérateur de dérivation sur l'espace de Wiener. C'est le chemin emprunté, entre autres, par Nualart et Pardoux [3].

Cette approche a le mérite et la beauté de la géneralité. Cependant sa plus grande faiblesse est l'absence d'un "bon" théorème d'approximation par des sommes de Riemann. En effet, le domaine de définition de δ, soit $Dom(\delta)$ est un ensemble très méconnu de nos jours. D'ailleurs, ce n'est pas le domaine "historique" considéré par Skorokhod lui-même pour définir l'intégrale. Il est préférable à plusieurs égards de travailler sur le plus petit espace $\mathbb{L}^{1,2}$ contenant les éléments $u \in L^2(\Omega \times [0,1])$ pour lesquels le processus dérivée $D_s u_t$ est dans $L^2(\Omega\times[0,1]\times[0,1])$. Pour ce type d'élément u, son intégrale indéfinie $(u\bullet W)_t = \delta(uI_{[0,t]})$ a un sens puisque $uI_{[0,t]} \in \mathbb{L}^{1,2}$, pour tout *nombre réel* $t \in [0,1]$. Ce n'est malheureusement pas le cas si t est remplacé par une *variable aléatoire* T. Grorud, Nualart et Sanz en fournissent des contrexemples. L'un de nous (Rebolledo) a trouvé un résultat sur la C-tension des processus non adaptés (voir [5]), basé sur des anciens critères publiés dans [4]. Très heureux de cet acquis, il a essayé de l'appliquer aux suites de la forme $(u^n \bullet W)$. L'échec a été magnifique!. Le critère devenait inapplicable car l'on ne pouvait évaluer les intégrales indéfinies sur des temps aléatoires (condition indispensable du critère), autrement dit, on ne pouvait pas assurer l'intégrabilité (au sens de Skorokhod) des processus $u^n I_{[0,T]}$ où T est une variable aléatoire. Le problème de savoir quelle est la classe des processus non adaptés u pour lesquels $uI_{[0,T]} \in Dom(\delta)$, pour toute variable aléatoire T, reste ouvert.

Dans cette note nous abordons le problème de la convergence en loi d'intégrales anticipatives. Ceci est fait tout d'abord d'un point de vue "abstrait" afin de mettre en évidence les mécanismes communs aux deux intégrales de Stratonovich et de Skorokhod permettant d'étudier leur convergence. Puis, nous abordons séparément chaque type d'intégrale afin d'obtenir des critères de convergence plus maniables.

Cette recherche a reçu l'appui du Programme de Recherche DIUC "Contributions analytiques à la Physique Mathématique", du projet FONDECYT nr. 0807–91 et du projet FONDECYT DOC. 0008–90.

1.1. Notations. Soit $\Omega = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie uniforme. Le processus canonique sur Ω est $W_t(\omega) = \omega(t)$; $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $W_s, s \leq t$, sur Ω nous considérons la mesure P qui transforme W en un mouvement Brownien. Toutes les tribus sont completées par P.

1.2. Discrétisations et sommes de Riemann. Nous notons Π l'ensemble des partitions $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de $[0,1]$, muni de l'ordre $\prec$ défini par le raffinement: $\pi \prec \pi'$ si π' est plus fine que π. Une filtration $(\mathcal{G}_\pi; \pi \in \Pi)$ sur l'espace produit $\Omega \times [0,1]$ est *tranchée par* Π s'il existe une collection de tribus $\mathcal{H}_i, i = 0,\ldots,n$ sur Ω telle que $\mathcal{G}_\pi$ soit engendrée par les éléments de la forme $H_i \times [t_i, t_{i+1}[, i = 0,\ldots,n-1; H_n \times \{1\}$, où $H_i \in \mathcal{H}_i, i = 0,\ldots,n$.

Une *discrétisation de* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ c'est la donnée d'une filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_\pi; \pi \in \Pi)$ tranchée par Π et telle que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,1]) = \bigvee_{\pi\in\Pi} \mathcal{G}_\pi$.

Soit la probabilité produit $\mu(d\omega, dt) = P(d\omega)dt$ sur $\Omega \times [0,1]$. Nous notons E_μ (respectivement $E_\mu(\cdot|\mathcal{G}_\pi)$ l'espérance (resp. l'espérance conditionnelle) par rapport à μ. Un calcul élémentaire montre que pour tout élément $u \in L^2(\Omega \times [0,1])$, nous avons:

$$E_\mu(u|\mathcal{G}_\pi) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} E(u_s|\mathcal{H}_i)ds\right) I_{[t_i,t_{i+1}[}, \tag{1.1}$$

Par ailleurs, nous introduisons le *bruit blanc approché* défini comme:

$$\hat{W}^\pi = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) I_{[t_i,t_{i+1}[} \tag{1.2}$$

Nous notons de la même manière une classe de L^2 ainsi que l'une de ses versions. Autant $E_\mu(u|\mathcal{G}_\pi)(\omega,\cdot)$ que $\hat{W}^\pi(\omega,\cdot)$ sont dans $L^2([0,1])$ pour tout ω fixé. Aussi nous appellons *Somme de Riemann associée à la discrétisation* $\mathbb{G}$ le produit scalaire dans $L^2([0,1])$ de l'espérance conditionnelle et du bruit blanc approché:

$$S_\pi(u) = \langle E_\mu(u|\mathcal{G}_\pi), \hat{W}^\pi \rangle \tag{1.3}$$

C'est-à-dire,

$$S_\pi(u) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} E(u_s I_{[0,t]}(s)|\mathcal{H}_i)ds\right)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \tag{1.4}$$

Le *processus somme de Riemann* est défini comme $S_\pi(u;t) = S_\pi(uI_{[0,t]})$ pour tout $t \in [0,1]$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du théorème de convergence des martingales.

Lemme 1.1. *Etant donnée une discretisation* $\mathbb{G}$ *de* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ *et un élément* $u \in L^2(\Omega \times [0,1])$, *la famille* $(E_\mu(u|\mathcal{G}_\pi); \pi \in \Pi)$ *converge vers* u *dans* L^2 *et* μ*-p.s.*

1.3. Les intégrales anticipatives. Nous allons donner une définition "abstraite" d'intégrale anticipative associée à une discrétisation $\mathbb{G}$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,1])$. Puis nous retrouverons les cas "concrets" de Skorokhod et de Stratonovich.

Soit $\mathcal{I}(\mathbb{G})$ l'ensemble des éléments $u \in L^2(\Omega \times [0,1])$ tels que $(\langle E_\mu(u|\mathcal{G}_\pi), \hat{W}^\pi\rangle; \pi \in \Pi)$ converge en probabilité, lorsque π parcourt le filtre des partitions. Cela équivaut à dire que la convergence a lieu lorsque le diamètre $|\pi| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$ tend vers 0. La limite est notée $\delta_{\mathbb{G}}(u)$, c'est la $\mathbb{G}$*–intégrale stochastique* de u.

L'intégrale ainsi définie est évidemment linéaire. On peut lui associer un *processus intégrale indéfinie* $u \bullet_{\mathbb{G}} W$ en posant

$$(u \bullet_{\mathbb{G}} W)_t = \delta_{\mathbb{G}}(uI_{[0,t]}) \tag{1.5}$$

pour tout élément u tel que $uI_{[0,t]} \in \mathcal{I}(\mathbb{G})$, tout $t \in [0,1]$. Désignons par $\mathcal{PI}(\mathbb{G})$ l'ensemble des processus u satisfaisant la propriété précédente. Nous pouvons alors prouver un premier résultat de convergence:

Théorème 1.1. *Soit $(u^n; n \in \mathbb{N})$ une suite extraite de $\mathcal{PI}(\mathbb{G})$ et soit u^∞ un autre élément du même ensemble. Alors la suite $((u^n \bullet_{\mathbb{G}} W)_t; n \in \mathbb{N})$ converge en probabilité vers $(u^\infty \bullet_{\mathbb{G}} W)_t$, pour tout $0 \leq t \leq 1$, dès que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées:*

(1) *$sup_n \|u^n\|_{L^2([0,1]\times\Omega)} < \infty$*
(2) *La suite $(u_t^n; n \in \mathbb{N})$ converge en probabilité vers u_t^∞, pour tout $0 \leq t \leq 1$,*
(3) *La famille de sommes de Riemann $(S_\pi(u^n;t); n \in \mathbb{N}, \pi \in \Pi)$ est uniformément tendue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Preuve. Tout d'abord, l'hypothèse (1) implique l'uniforme intégrabilité de la suite (u^n) sur l'espace produit $([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{F}, \mu)$.

Fixons t dans $[0,1]$. Etant donné une partition quelconque π de $[0,1]$, la suite $(S_\pi(u^n;t))$ converge vers $S_\pi(u^\infty;t)$ en probabilité quand $n \nearrow \infty$. En effet, l'intégrabilité uniforme de (u^n) sur l'espace produit et l'hypothèse (2) déterminent sa convergence vers u^∞ dans $L^1([0,1] \times \Omega)$. Par conséquent, les espérances conditionnelles de $u^n 1_{[0,t]}$ de (1.4) convergent vers les espérances conditionnelles respectives de $u^\infty I_{[0,t]}$ dans $L^1(\Omega)$. Il en résulte la convergence en probabilité des sommes de Riemannn.

Or, $\delta_{\mathbb{G}}(u^\infty I_{[0,t]})$ est approché par des sommes de Riemann $S_\pi(u^\infty;t)$ si $|\pi|$ tend vers 0. La convergence a lieu en probabilité par définition. De même $(S_\pi(u^n;t))$ va vers $\delta_{\mathbb{G}}(u^n 1_{[0,t]})$ en probabilité quand $|\pi|$ approche 0, pour tout n. Dénotons par d une métrique consistente avec la convergence en probabilité. Pour simplifier, nous écrivons S_π^n la somme $S_\pi(u^n;t)$, et S_π la somme $S_\pi(u^\infty;t)$. L'hypothèse (3) entraîne l'uniforme tension de (S_π^n),c'est–à–dire, cette famille est bornée en probabilité.

Alors, étant donné une sous–suite convergente $(S_{\pi(j)}^{n(k)})$ arbitraire, sa limite est égal à $\delta_{\mathbb{G}}(u^\infty I_{[0,t]})$.

En effet, on choisit $(\pi(j,m))$, une sous-suite de $(\pi(j))$, telle que

$$d(\delta_{\mathbb{G}}(u^{\infty}I_{[0,t]}), S_{\pi(j,m)})) < 2^{-m-1}$$

et l'on prend $n(k,m))$ suffisamment grand pour avoir

$$d(S_{\pi(j,m)}, S^{n(k,m)}_{\pi(j,m)})) < 2^{-m-1}.$$

Par conséquent,

$$d(\delta_{\mathbb{G}}(u^{\infty}I_{[0,t]}), S^{n(k,m)}_{\pi(j,m)})) < 2^{-m}.$$

Ceci prouve que $\delta_{\mathbb{G}}(u^{\infty}I_{[0,t]})$ est la limite d'une sous-suite convergente arbitraire $(S^{n(k)}_{\pi(j)})$, donc c'est le point limite commun de toute la famille (S^{n}_{π}).

Finalement, étant donnée une suite d'indices quelconque $n(k)$, on peut choisir $\pi(k)$ tel que $d(\delta_{\mathbb{G}}(u^{n(k)}I_{[0,t]}), S^{n(k)}_{\pi(k)}) < 2^{-k}$. La suite $(S^{n(k)}_{\pi(k)})$ possède au moins une sous-suite convergente $(S^{n(k,m)}_{\pi(k,m)})$ dont la limite est égale à $\delta_{\mathbb{G}}(u^{\infty}I_{[0,t]})$. Alors $\delta_{\mathbb{G}}(u^{n(k,m)}I_{[0,t]})$ converge vers $\delta_{\mathbb{G}}(u^{\infty}I_{[0,t]})$.

Par conséquent, $\delta_{\mathbb{G}}(u^{n}I_{[0,t]})$ converge en probabilité vers $\delta_{\mathbb{G}}(u^{\infty}I_{[0,t]})$. □

1.4. Remarque. L'hypothèse (3) du théorème précédent est en particulier vérifiée si l'on a:

$$\sup_{n}\sup_{\pi}\|S_{\pi}(u^{n};t)\|_{L^2(\Omega)} < \infty \tag{1.6}$$

pour tout $t \in [0,1]$.

Si l'on ajoute une condition de tension à la suite de *processus* $(u^n \bullet_{\mathbb{G}} W; n \in \mathbb{N})$, on obtient comme corollaire un critère de convergence en loi.

Corollaire 1.1. *Soit $(u^n; n \in \mathbb{N})$ une suite extraite de $\mathcal{PI}(\mathbb{G})$ et soit u^{∞} un autre élément du même ensemble. Alors la suite $(u^n \bullet_{\mathbb{G}} W; n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers $u^{\infty} \bullet_{\mathbb{G}} W$, si les trois hypothèses du théorème* 1.1 *sont satisfaites et en outre:*

(4) $(u^n \bullet_{\mathbb{G}} W; n \in \mathbb{N})$ *est tendue*

Preuve. Pour établir la convergence énoncée il suffit de prouver la convergence des lois marginales. Ceci est accompli par une méthode "à la Cramér–Wold": étant donnée une collection finie $t_1, \dots, t_k$ dans $[0,1]$, et des coefficients réels $a_1, \dots, a_k$, la loi de $\sum_{i=1}^{k} a_i (u^{\infty} \bullet_{\mathbb{G}} W)_{t_i}$ est la limite des lois $\sum_{i=1}^{k} a_i (u^{n} \bullet_{\mathbb{G}} W)_{t_i}$.

Or, la dernière somme est égale à $\delta_{\mathbb{G}}(u^n \sum_{i=1}^{n} a_i I_{[0,t_i]})$ par la linéarité de l'intégrale. Il suffit alors de prouver que pour tout t dans $[0,1]$, la limite en loi de $\delta_{\mathbb{G}}(u^n I_{[0,t]})$ est $\delta_{\mathbb{G}}(u^{\infty} I_{[0,t]})$, mais cela découle du Théorème 1.1. □

Etudions maintenant les intégrales "concrètes" de Skorokhod et de Stratonovich, pour dériver des résultats de convergence mieux adaptés à leur structure spécifique.

2. La Convergence d'Intégrales de Skorokhod

Nous commençons par rappeller les notations usuelles pour ce type d'intégrales.

2.1. Les fonctions régulières. Soit $C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$ l'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment différentiables f définies sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que f et toutes leur dérivées soient croissantes d'ordre polinomial. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires *régulières* valeurs réelles; c'est–à–dire, la classe de toutes les fonctions $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pour lesquelles il existe une collection de points $t_1, \dots, t_m \in [0,1]$, et une fonction $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$, telles que

$$F = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}) \tag{2.1}$$

2.2. Dérivées. L'ensemble $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Pour tout F dans $\mathcal{S}$, la dérivée $D_t F$ est défini par

$$D_t F = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}) 1_{[0,t_i]}(t) \tag{2.2}$$

pour tout $0 \leq t \leq 1$.

Les propriétés de D sont bien connues: c'est un opérateur fermé dont le domaine est noté $\mathbb{D}^{1,2}$. Sur ce domaine on introduit la norme

$$\|F\|_{1,2} = \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|DF\|_{L^2([0,1]\times\Omega)} \tag{2.3}$$

$\mathbb{D}^{1,2}$ est la fermeture de $\mathcal{S}$ par rapport à la norme $\|.\|_{1,2}$. Nous dénotons $\mathbb{L}^{1,2}$ la classe de processus $u \in L^2([0,1] \times \Omega)$ telle que $u_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ pour presque tout t, et il existe une version mesurable du processus à deux indices $D_s u_t$ satisfaisant $E(\int_0^1 \int_0^1 (D_s u_t)^2 ds dt) < \infty$. Pour tout $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ nous définissons $\|u\|_{1,2}$ par l'expression

$$\|u\|_{L^2([0,1]\times\Omega)} + (\mathbb{E}(\int_0^1 \int_0^1 |D_s u_t|^2 ds dt))^{1/2}. \tag{2.4}$$

De manière plus générale, et suivant l'habitude, nous écrivons D^j la dérivée d'ordre j et introduisons les espaces de Sobolev $\mathbb{D}^{k,p}$ ($k \geq 1; p > 1$) définis comme la fermeture de $\mathcal{S}$ pour la norme:

$$\|F\|_{k,p} = \|F\|_p + \sum_{j=1}^k \| \|D^j F\|_{L^2([0,1])} \|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.5}$$

$F \in \mathcal{S}$.

Nous dénotons alors $\mathbb{L}^{k,p}$ l'espace $L^p([0,1]; \mathbb{D}^{k,p})$.

2.3. L'intégrale de Skorokhod. L'adjoint δ de D c'est l'intégrale de Skorokhod, telle comme elle est traité dans [3]. δ est fermé et non borné, défini sur le domaine $Dom(\delta)$ inclu dans $L^2([0,1] \times \Omega)$, à valeurs dans $L^2(\Omega)$. Le couple $(Dom(\delta), \delta)$ est caracterisé comme suit:

(i) $Dom(\delta)$ est défini comme l'ensemble de tous les éléments $u \in L^2([0,1] \times \Omega)$, telles que

$$|E(\int_0^1 D_t F u_t dt)| \le c\|F\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.6}$$

pour toute F dans $\mathcal{S}$, où $c > 0$ est une constante qui ne dépend que de u.

(ii) Si u appartient à $Dom(\delta)$ alors $\delta(u)$ c'est l élément de $L^2(\Omega)$ défini par

$$E(F\delta(u)) = E(\int_0^1 D_t F u_t dt), \tag{2.7}$$

pour toute $F \in \mathcal{S}$.

2.4. Discrétisations et Sommes de Riemann. Avec les notations de la première section, la filtration $\mathbb{G}$ que l'on considère pour construire l'intégrale de Skorokhod est définie comme dans 1.2 à l'aide des tribus $\mathcal{H}_i$ données par

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{F}_{[t_i,t_{i+1}]^c}, i = 0, \dots, n-1 \tag{2.8}$$

Nualart et Pardoux ont prouvé que $\mathbb{L}^{1,2}$ est inclu dans $\mathcal{I}(\mathbb{G})$ et dans$\mathcal{PI}(\mathbb{G})$. Puis Grorud, Nualart et Sanz ont établi que cette inclusion est stricte . Par ailleurs, pour toute partition π l'on a $S_\pi(u) = \delta(E_\mu(u|\mathcal{G}_\pi))$.

Dans ce qui suit, le symbole "$\bullet$", sans sous–indice, est reservé pour l'intégrale indéfinie de Skorokhod. Pour cette intégrale le théorème 1.1 s'écrit de façon identique; il nous semble important d'attirer l'attention sur quelques corollaires très spécifiques.

Corollaire 2.1. *Etant donné une suite (u^n) dans $\mathbb{L}^{1,2}$ et u^∞ dans le même espace, supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

(1) *Les suites des fonctions $t \mapsto E(|u_t^n|^2)$ et $(s,t) \mapsto E(|D_s u_t^n|^2)$ sont uniformément intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et sur $[0,1]^2$ respectivement;*

(2) *La suite (u_t^n) converge en probabilité vers u_t^∞, pour tout $0 \le t \le 1$.*

Alors la suite de variables aléatoires $((u^n \bullet W)_t)$ converge en probabilité vers $(u^\infty \bullet W)_t$, pour tout $t \in [0,1]$.

Preuve. L'hypothèse (1) entraîne en particulier que $sup_n \|u^n\|_{1,2} < \infty$, c'est–à–dire la première hypothèse du Théorème 1.1 est satisfaite. Puis, $sup_{n,\pi}\|E_\mu(u^n I_{[0,t]}|\mathcal{G}_\pi)\|_{1,2} < \infty$ et par conséquent $sup_{n,\pi}\|S_\pi(u^n;t)\|_2 < \infty$. De cette inégalité découle l'hypothèse (3) du théorème 1.1. $\square$

Finalement, le corollaire suivant donne des conditions suffisantes pour la convergence en loi d'une suite d'intégrales de Skorokhod.

Corollaire 2.2. *Soient (u^n) et u^∞ dans $\mathbb{L}^{1,2}$, que vérifient les hypothèses (1), (2), (3) du Théorème* 1.1. *Supposons en outre que*

(4) *Il existe $p > 1$, tel que*

$$\sup_n \sup_{t\in[0,1]} E((\int_0^1 |D_s u_t^n|^2 ds)^p) < \infty.$$

Alors la suite $(u^n \bullet W)$ converge en loi vers $u^\infty \bullet W$.

Preuve. Puisque $(u^n \bullet W)_0 = 0$, (4) determine la C–tension de $(u^n \bullet W)$, d'après le Théorème 5.2 de [3] et selon des résultats classiques de Kolmogorov sur la C–tension des lois, (voir [1], page 95) . □

On peut remarquer que le Corollaire précédent permet de retrouver un critère connu d'existence de versions à trajectoires continues de l'intégrale indéfinie de Skorokhod: il suffit de prendre $u^n = u^\infty = u$ pour tout n.

3. La convergence d'Intégrales de Stratonovich

Dans la construction de l'intégrale de Stratonovich les tribus $\mathcal{H}_i$ de 1.2 sont prises simplement comme

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{F}, i = 0, \dots, n-1. \tag{3.1}$$

De cette façon les Sommes de Riemann deviennent:

$$S_\pi(u;t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{t_{i+1}-t_i}(\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s)ds)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \tag{3.2}$$

Pour tout élément $u \in \mathcal{PI}(\mathbb{G})$, nous notons le processus intégrale indéfinie par le symbole $u \circ W$. A nouveau, on peut paraphraser le théorème 1.1 avec des "o" pour en avoir une version "à la Stratonovich". Nous n'y insistons pas. Il est plus intéressant d'obtenir quelques corollaires plus spécifiques. Il est important de remarquer que l'on ne connaît pas de caractérisation plus maniable de l'ensemble $\mathcal{PI}(\mathbb{G})$ dans ce cas. Néanmoins, il existe un sous–ensemble strict de $\mathbb{L}^{1,2}$, noté $\mathbb{L}_C^{1,2}$, qui est inclus dans $\mathcal{PI}(\mathbb{G})$, . Par ailleurs, sur $\mathbb{L}_C^{1,2}$ on peut établir une relation entre les intégrales de Skorokhod et de Stratonovich. Rappelons la définition de cet espace: il est constitué par les éléments $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ tels que

(i) Les applications $s \mapsto D_t u_s$ doivent être continues de $[0,t]$ dans $L^2(\Omega)$ et également de $[t,1]$ dans $L^4(\Omega)$ (pour une version différente de Du), uniformément en t; ;

(ii) $ess\sup_{s,t} E(|D_s u_t|^2) < \infty$

3.1. Relations entre intégrales. Pour tout élément $u \in \mathbb{L}_C^{1,2}$, on définit les limites

$$D_t^+ u_t = \lim_{s\to t; s>t} D_t u_s; \tag{3.3}$$

$$D_t^- u_t = \lim_{s\to t; s<t} D_t u_s; \tag{3.4}$$

$$(\nabla u)_t = D_t^+ u_t + D_t^- u_t. \tag{3.5}$$

Par ailleurs, les intégrales de Skorokhod et Stratonovich sont liées par la formule:

$$(u \circ W)_1 = (u \bullet W)_1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (\nabla u)_t dt \tag{3.6}$$

Pour étendre l'équation (3.6) au cas de l'intégrale indéfinie, il faut supposer une plus grande régularité du processus u à savoir:

$$u \in \mathbb{L}_C^{2,4} \tag{3.7}$$

et

$$\nabla u \in \mathbb{L}^{1,4} \tag{3.8}$$

Dans ce cas l'on a

$$(u \circ W)_t = (u \bullet W)_t + \frac{1}{2}\int_0^t (\nabla u)_s ds \tag{3.9}$$

Rappelons que l'espace $\mathbb{L}_C^{2,4}$ est constitué par les éléments $u \in \mathbb{L}^{2,4}$ tels que:

(i) Les applications $s \mapsto D_t u_s$ doivent être continues de $[0,t]$ dans $L^4(\Omega)$ et également de $[t,1]$ dans $L^4(\Omega)$ (pour une version différente de Du), uniformément en t;

(ii) $ess \sup_{s,t} E(|D_s u_t|^4) < \infty$

Corollaire 3.1. *Soit une suite* (u^n) *et* u^∞ *dans* $\mathbb{L}_C^{2,4}$ *satisfaisant les hypothèses (1), (2), (3) du Théorème* 1.1 *et la relation* (3.8). *Supposons en outre que*

(4) *Il existe* $p > 1$ *tel que*

$$\sup_n \sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}((\int_0^1 |D_s u_t^n|^2 ds)^p) < \infty; \tag{3.10}$$

et

$$\sup_n \sup_{t,s\in[0,1]} E(|D_t u_s^n|^p) < \infty. \tag{3.11}$$

Alors la suite $(u^n \circ W)$ *converge en loi vers* $u^\infty \circ W$.

Preuve. Il suffit de prouver la tension de la suite de processus $(u^n \circ W)$. Pour cela on se sert de la relation (3.9) et du critère de tension de Kolmogorov.

L'hypothèse (3.11) entraîne que

$$K = \sup_n \sup_{t \in [0,1]} E(|(\nabla u^n)_t|^p) < \infty. \tag{3.12}$$

Soit, par ailleurs, $R^n(s,t) = E(|(u^n \circ W)_t - (u^n \circ W)_s + \int_s^t (\nabla u^n)_r dr|^p)$, pour tous $s,t \in [0,1]$ avec $s \leq t$. De l'inégalité de Minkowski nous déduisons:

$$[R^n(s,t)]^{1/p} \leq (E(|(u^n \circ W)_t - (u^n \circ W)_s|^p))^{1/p} + (E(|\int_s^t (\nabla u^n)_r dr|^p))^{1/p}. \tag{3.13}$$

De (3.12) on déduit que le second terme du second membre est plus petit que $|t-s|K^{1/p}$. Puis, en appliquant une inégalité dûe à Nualart et Pardoux [3], on peut majorer le premier terme de façon analogue pour avoir finalement:

$$R^n(s,t) \leq Const. \times |t-s|^p. \tag{3.14}$$

De l'inégalité précédente on peut alors conclure la preuve de la tension. □

REFERENCES

1. Billinsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures.* New York: Wiley.
2. Grorud, A., Nualart, D. and Sanz, M. (1991). *A remark on the approximation of the Skorokhod integral by Riemann sums.* Preprint Universitat de Barcelona.
3. Nualart,D. - Pardoux, E. (1988). *Stochastic calculus with anticipating integrand.* Probability Theory and Related Fields 78, 80-129.
4. Rebolledo, R. (1979) Sur les temps d'arrêt et la topologie étroite. C.R.Acad.Sci.Paris, sér. A, t.289,707–709.
5. Rebolledo, R. (1990) A C–tightness criterion for non adapted processes. Notas de la Sociedad de Matemática de Chile, à paraître.
6. Rebolledo, R.–Saavedra, E. (1991) On the convergence in distribution of Skorokhod integrals. Soumis à "Statistics and Probability Letters".
7. Saavedra, E. (1991) Thèse de Doctorat. Université Catholique du Chili.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE, CASILLA 306,CORREO 22,SANTIAGO