ANATOLE JOFFE

Renouvellement : générateur du processus de l'âge

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 498-500
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__498_0>

RENOUVELLEMENT : GÉNÉRATEUR DU PROCESSUS DE L'ÂGE

par A. Joffe

Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal
Montréal, Québec H3C 3J7, Canada

1. Introduction

Considérons un processus de renouvellement dont le temps de vie a une loi diffuse G. Le processus de l'âge est un processus de Markov dont nous déterminons le générateur. Lorsque G n'est pas absolument continue le domaine du générateur n'est pas une algèbre et ne contient pas les fonctions régulières, en particulier même l'application identité n'en fait pas partie. La démonstration résulte d'un calcul élémentaire à partir de l'expression explicite du semi-groupe et n'utilise aucune notion qui ne se trouve par exemple dans le second volume du traité de Feller.

2. Le semi-groupe

Soit $U_i, i = 1, 2, \ldots$ une suite de variables aléatoires non négatives indépendantes, équidistribuées; notons $G(x) = P[U_i \leq x]$ leur fonction de répartition:

$$G(0) = 0, \quad G(x) < 1 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^+ \text{ et } G \text{ continu sur } \mathbf{R}^+.$$

On se donne U_0^x indépendant des U_i, $i = 1, 2, \ldots$, avec la loi $G_x(.)$

$$G_x(y) = P[U_0^x \leq y] = \frac{G(y+x) - G(x)}{1 - G(x)} \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbf{R}^+ \ ;$$

c'est la distribution conditionnelle $P[U_1 \leq y + x \,|\, U_1 > x]$.

Le processus de l'âge X_t est défini par

$$X_t = x + t \quad \text{pour } 0 \leq t < U_0^x \ ,$$

$$X_t = t - U_0^x \quad \text{pour } U_0^x \leq t < U_0^x + U_1 \ ,$$

$$\vdots$$

$$X_t = t - (U_0^x + U_1 + \cdots + U_n) \quad \text{pour } U_0^x + U_1 + \cdots + U_n \leq t < U_0^x + U_1 + \cdots + U_{n+1}.$$

Le semi-groupe $T_t f(x) = E_x f(X_t)$, $x \in \mathbf{R}^+$ se calcule explicitement

$$T_t f(x) = f(x+t) \cdot \big(1 - G_x(t)\big) + \int_0^t T_{t-\tau} f(0) \, dG_x(\tau) \ . \tag{1}$$

En substituant $x = 0$ dans (1), $T_t f(0)$ se détermine comme solution de l'équation de renouvellement

$$T_t f(0) = f(t) \cdot \big(1 - G(t)\big) + \int_0^t T_{t-\tau} f(0) \, dG(\tau) \ . \tag{2}$$

L'unique solution bornée de (2) est donnée par

$$(T_t f)(0) = \int_{0-}^{t} f(t-y)\,\big(1 - G(t-y)\big)dU(y)\ , \tag{3}$$

où U est la fonction de renouvellement

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)\ . \tag{4}$$

En substituant (3) dans (1) on obtient la forme explicite du semi-groupe

$$T_t f(x) = f(x+t)\frac{1 - G(x+t)}{1 - G(x)} + f\big(1 - G\big) * dU * dG_x\ . \tag{5}$$

Il est facile de vérifier que T_t définit un semi-groupe de contraction continu sur l'espace de Banach des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbf{R}^+$, muni de la topologie du sup.

3. Le générateur

Pour déterminer le générateur, nous utilisons la théorie de Hille-Yosida. La résolvante $(R_\lambda f)(x)$ de (5), $\lambda \in \mathbf{R}^+$, est donnée par

(6)

$$(R_\lambda f)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t f)(x)dt = \mathcal{L}\left\{f^x\big(1 - G_x\big)\right\} + \mathcal{L}\left\{f\big(1 - G\big)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{dU\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{dG_x\right\},$$

où $f^x(.)$ désigne la fonction $f(x + .)$ et $\mathcal{L}$ la transformation de Laplace.

En prenant la transformée de Laplace de (4) nous obtenons: $\mathcal{L}\{dU\} = \dfrac{1}{1 - \mathcal{L}\{dG\}}$; d'où l'expression de la résolvante

$$(R_\lambda f)(x) = \mathcal{L}\left\{f^x\big(1 - G_x\big)\right\} + \mathcal{L}\left\{f\big(1 - G\big)\right\}\frac{1}{1 - \mathcal{L}\{dG\}}\mathcal{L}\{dG\}\ ; \tag{7}$$

en particulier, en posant $x = 0$, (7) donne

$$(R_\lambda f)(0) = \frac{\mathcal{L}\left\{f\big(1 - G\big)\right\}}{1 - \mathcal{L}\{dG\}}\ ,$$

d'où finalement l'expression de la résolvante

$$(R_\lambda f)(x) = \mathcal{L}\left\{f^x\big(1 - G_x\big)\right\} + (R_\lambda f)(0)\cdot\mathcal{L}\left\{dG_x\right\}. \tag{8}$$

Les fonctions $\big(R_\lambda f\big)(.)$ sont dans le domaine du générateur $\mathbf{L}$ qui agit de la façon suivante

$$(\mathbf{L}R_\lambda f)(.) = (R_\lambda f)(.) - f(.)\ . \tag{9}$$

En posant $(R_\lambda f)(x) = \varphi$, nous obtenons

$$\varphi(x) = \mathcal{L}\left\{f^x(1-G_x)\right\} + \varphi(0)\mathcal{L}\left\{dG_x\right\} \tag{10}$$

et

$$\mathbf{L}\varphi = \lambda\varphi - f \; . \tag{11}$$

Il faut résoudre (10) pour f. Ecrivons (10) explicitement

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+t)\frac{1-G(x+t)}{1-G(x)}dt + \varphi(0)\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+t)\frac{dG(x+t)}{1-G(x)}dt,$$

en multipliant les deux membres par $1-G(x)$ et en effectuant le changement de variables $x+t=s$ dans les intégrales, nous obtenons

$$(1-G(x))\varphi(x) + \varphi(0)G(x) = e^{\lambda x}\int_x^\infty e^{-\lambda s}\left\{f(s)\cdot(1-G(s)) + \lambda\varphi(0)G(s)\right\} ds \; ; \tag{12}$$

le premier membre est dérivable car l'intégrale du second membre l'est. En posant $k(x)$ égal à l'expression du premier membre de (12) nous obtenons $\varphi(x) = \dfrac{k(x) - f(0)G(x)}{1-G(x)}$; notons que $\varphi(0) = k(0)$. En dérivant le second membre de (12) nous obtenons

$$k'(x) = \lambda\left\{k(x) - k(0)G(x)\right\} - f(x)(1-G(x)) \quad \text{d'où}$$

$$f(x) = \frac{\lambda\left\{k(x) - k(0)G(x)\right\} - k'(x)}{1-G(x)} \; .$$

En substituant la valeur de f dans (11) nous obtenons l'expression du générateur

$$(\mathbf{L}f)(x) = \frac{k'}{1-G} = \frac{\left\{f(x) + [f(0)-f(x)]G(x)\right\}'}{1-G(x)} \; , \tag{14}$$

défini pour toute fonction f de la forme $f = \dfrac{k - f(0)G}{1-G}$, où k est une primitive de fonction bornée, uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$.

Remarques. 1) Si G est absolument continue avec une densité g (f l'est aussi), (14) s'écrit sous la forme habituelle

$$(\mathbf{L}f)(x) = f'(x) + \frac{g}{1-G}(f(0) - f(x)) \; . \tag{15}$$

2) Si G est singulière, f non constant n'est jamais régulier et f^2 n'est pas dans le domaine du générateur qui n'est donc pas une algèbre.

3) Si G a un support fini et n atomes isolés a_i, les calculs se font d'une façon analogue; la seule différence est que la continuité du semi-groupe oblige à se restreindre aux fonctions constantes sur $\{0, a_i, a, i = 1, \ldots, n\}$ où $[0,a) = \{x : G < a\}$. Lorsque les atomes ne sont pas isolés, la situation n'est plus agréable.