

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FREDERIC UTZET

Les processus à accroissements indépendants et les équations de structure

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 405-409

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__405_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET LES EQUATIONS DE STRUCTURE

Frederic UTZET

Etant donnée une martingale X telle que $\langle X, X \rangle_t = t$ (ou, plus généralement, avec $\langle X, X \rangle$ déterministe) on peut définir l'intégrale stochastique multiple $I_n(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ ($L^2(\mathbb{R}_+^n, d\langle X, X \rangle^n$) dans le cas général) de la même façon que dans le cas de Wiener, voir Meyer [6], et la notion de *chaos d'ordre n* , C_n , comme l'image de $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ pour I_n , peut être aussi considérée. Si on peut décomposer $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (\mathcal{F} σ -algèbre engendrée par X) en somme $\bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$ on dit que X a la *propriété de représentation chaotique*. En relation avec cette propriété, Emery [2] a proposé de considérer les *équations de structure*

$$[X, X]_t = t + \int_0^t \phi_s dX_s \quad ,$$

où X est une martingale, ϕ un processus prévisible et $\int \phi dX$ une martingale. (Notez que $\langle X, X \rangle_t = t$). Emery prouve que si ϕ est déterministe, alors l'unique solution est un processus à accroissements indépendants (P.A.I.) sans discontinuités fixes, et avec la propriété de représentation chaotique.

Dans cette Note, nous prouvons la proposition réciproque, et tout en utilisant un résultat de He-Wang [3] (voir aussi Dermoune [1]) sur les P.A.I. avec représentation prévisible, nous identifions la fonction ϕ . Il faut noter que pour ces P.A.I. la propriété de représentation prévisible est équivalente à la propriété de représentation chaotique (He-Wang [4], Dermoune [1]).

Proposition: Soit $X = \{X_t, t > 0\}$ un P.A.I. centré d'ordre 4, admettant une version cadlag, sans discontinuités fixes, et avec la propriété de représentation chaotique. Alors X vérifie l'équation de structure

$$[X, X]_t = \langle X, X \rangle_t + \int_0^t \phi_s dX_s \quad ,$$

avec ϕ déterministe.

Preuve:

Soit

$$X_t = Y_t + \int \int_{]0, t] \times \mathbb{R}^*} v \tilde{N}(ds, dv) \quad ,$$

la représentation de Lévy de X , où Y est une martingale continue, avec $\langle Y, Y \rangle$ déterministe, N est une mesure aléatoire de Poisson, indépendante de Y , avec mesure de Lévy ν qui intègre la fonction $\mathbf{1}_{]0, t]} \times v^4$ pour tout t fini, et $\tilde{N} = N - \nu$.

Par la formule d'Itô,

$$X_t^2 = 2 \int_0^t X_{s-} dX_s + [X, X]_t = I_2(\mathbf{1}_{]0, t]^2}) + [X, X]_t \quad ,$$

où $I_n(f)$ est l'intégrale stochastique multiple de $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n, d \langle X, X \rangle^n)$. Alors pour obtenir la représentation chaotique de $[X, X]$ il suffit de trouver la décomposition de X^2 . Soit

$$X_t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(t)). \quad (1)$$

Le premier élément de (1) est clair:

$$f_0(t) = E[X_t^2] = \langle X, X \rangle_t.$$

Pour calculer f_1 , considérons $0 < s' < s'' < t$. Alors

$$\begin{aligned} E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{(s', s'')})] &= E[(X_{s'} + X_{s''} - X_{s'} + X_t - X_{s''})^2 (X_{s''} - X_{s'})] \\ &= E[(X_{s''} - X_{s'})^3] = E\left[\left(\int \int_{]s', s''] \times \mathbb{R}^*} v d\tilde{N}(dr, dv)\right)^3\right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Il est facile de trouver la fonction caractéristique de $\int \int_{]0, t] \times \mathbb{R}^*} v d\tilde{N}(dr, dv)$, ou bien on peut appliquer la formule d'Itô (la version, p.ex., d'Ikeda-Watanabe [5]) et on obtient

$$(2) = \int \int_{]s', s''] \times \mathbb{R}^*} v^3 d\nu(dr, dv).$$

Pour la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique multiple on a

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{(s', s'')})] = \int_{s'}^{s''} f_1(x, t) d \langle X, X \rangle_x = \int \int_{]s', s''] \times \mathbb{R}^*} v^3 d\nu(dr, dv).$$

Alors, pour tout borélien $A \subset]0, t]$,

$$\int_A f_1(x, t) d \langle X, X \rangle_x = \int \int_{A \times \mathbb{R}^*} v^3 d\nu(dr, dv)$$

et le coté de droite est indépendant de t . Il résulte que si $t' < t$, pour tout borélien $A \subset]0, t']$,

$$\int_A f_1(x, t) d \langle X, X \rangle_x = \int_A f_1(x, t') d \langle X, X \rangle_x,$$

et par conséquent

$$f_1(x, t) = f_1(x, t'), \quad d \langle X, X \rangle - \text{p.p. } x \in]0, t']. \quad (4)$$

Il est aussi clair que pour $t < s' < s''$,

$$\int_{s'}^{s''} f_1(x, t) d \langle X, X \rangle_x = 0. \quad (5)$$

De (4) et (5) résulte qu'on peut définir ($d < X, X >$ -p.p.) une fonction $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, telle que pour tout $t > 0$,

$$\phi(x)\mathbf{1}_{]0,t]}(x) = f_1(x, t), \quad d < X, X > \text{-p.p.}$$

(Par exemple, $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(x, n+1)\mathbf{1}_{]n, n+1]}(x)$).

Le terme d'ordre 2 est aussi facile à calculer: Pour $s \neq r$, si $s > t$,

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J(s)}) I_1(\mathbf{1}_{J(r)})] = 0,$$

où $J(x) = (x', x'')$ est un voisinage de x , et $J(s) \cap J(r) = \emptyset$. Pour $s'' \vee r'' < t$,

$$\begin{aligned} E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J(s)}) I_1(\mathbf{1}_{J(r)})] &= \\ &= 2E[(X_{r''} - X_{r'})^2] E[(X_{s''} - X_{s'})^2] \\ &= 2(\langle X, X \rangle_{r''} - \langle X, X \rangle_{r'}) (\langle X, X \rangle_{s''} - \langle X, X \rangle_{s'}) \\ &= 2 \int_{r'}^{r''} \int_{s'}^{s''} f(x_1, x_2, t) d\langle X, X \rangle_{x_1} d\langle X, X \rangle_{x_2}, \end{aligned}$$

et on a

$$f_2(\cdot, t) = \mathbf{1}_{]0,t]^2}(\cdot), \quad d < X, X >^2 \text{-p.p.}$$

Finalement, tous les termes d'ordre $n \geq 3$ sont nuls. En effet, étant donnés n intervalles disjoints J_1, \dots, J_n , par la propriété P.A.I. on a

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J_1}) \dots I_1(\mathbf{1}_{J_n})] = 0.$$

et, en outre,

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J_1}) \dots I_1(\mathbf{1}_{J_n})] = n! \int_{J_1 \times \dots \times J_n} f_n(s_1, \dots, s_n, t) d\langle X, X \rangle_{s_1} \dots d\langle X, X \rangle_{s_n},$$

et, donc,

$$f_n(\cdot, t) = 0, \quad d < X, X >^n \text{-p.p.}$$

Et on obtient la proposition.

Identification de la fonction ϕ

Sous les hypothèses de la proposition, on peut appliquer le résultat de He-Wang [3] (voir aussi Dermoune [1]) qui établit que la condition nécessaire et suffisante pour que X ait la propriété de représentation prévisible est que la mesure de Lévy ν se décompose comme

$$\nu(ds, dv) = \rho(ds) \otimes \delta_{u(s)}(dv)$$

où δ_x est la loi dégénérée au point x , $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une fonction mesurable, et ρ est une mesure singulière par rapport à $d \langle Y, Y \rangle$.

Du fait que

$$\langle X, X \rangle_t = \langle Y, Y \rangle_t + \int \int_{]0, t] \times \mathbb{R}^*} v^2 \nu(ds, dv) = \langle Y, Y \rangle_t + \int_0^t u^2(s) \rho(ds),$$

on déduit que la mesure ρ est absolument continue par rapport à $d \langle X, X \rangle$ sur $\{u \neq 0\}$. Nous écrivons

$$\frac{d\rho}{d \langle X, X \rangle} = g, \quad \text{sur } \{u \neq 0\}.$$

Alors, en reprenant les calculs antérieurs, avec $t > 0$ fixé, pour tout borélien $A \subset]0, t]$,

$$\int_A \phi(x) d \langle X, X \rangle_x = \int \int_{A \times \mathbb{R}^*} v^3 \nu(ds, dv) = \int_A u^3(x) g(x) d \langle X, X \rangle_x,$$

et, donc,

$$\phi(x) = u^3(x) g(x), \quad d \langle X, X \rangle - \text{p.p.}$$

Le cas d'Emery

Emery étudie le cas où $\langle X, X \rangle_t = t$. Alors $d \langle Y, Y \rangle \ll dt$, et en posant $\frac{d \langle Y, Y \rangle}{dt} = f$, on a

$$\langle X, X \rangle_t = t = \int_0^t f(x) dx + \int_0^t u(x)^2 g(x) dx,$$

et en conséquence,

$$f(x) + u^2(x) g(x) = 1, \quad \text{p.p.t.},$$

et du fait que $d \langle Y, Y \rangle$ et ρ sont singuliers, on déduit

$$u^2(x) g(x) \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}}(x) = \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}}(x),$$

et par suite, on a les relations:

$$u \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}} \quad \text{et} \quad f = \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}}.$$

(Notez que les valeurs de u sur $\{g = 0\}$ ne sont pas importantes pour le processus X). Alors l'équation de structure qu'on obtient est

$$[X, X]_t = t + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \mathbf{1}_{\{g \neq 0\}}(x) dX_x.$$

REFERENCES

- [1] A. DERMOUNE, Distributions sur l'espace de P.Lévy et calcul stochastique. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 26, n. 1, 1990, pp. 101–119.
- [2] M. EMERY, On the Azéma Martingales. Sémin. Prob. XXIII, Lect. Notes in Math. 1372, Springer-Verlag, 1989, pp. 66–87.
- [3] S.W. HE and J.G. WANG, The total continuity of natural filtrations. Sémin. Prob. XVI, Lect. Notes in Math. 920, Springer-Verlag, 1982, pp. 348–354.
- [4] S.W. HE and J.G. WANG, Chaos decomposition and property of predictable representation. Science in China (Series A), Vol 32, 4, 1989, pp. 397–407.
- [5] N. IKEDA and S. WATANABE, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland, 1981.
- [6] P.A. MEYER, Un cours sur les intégrales stochastiques. Sémin. Prob. X, Lect. Notes in Math. 511, Springer-Verlag, 1976, pp. 535–581.

Departament d'Estadística
 Facultat de Matemàtiques
 Universitat de Barcelona
 Gran Via 585
 08007 Barcelona, SPAIN

Commentaires du Séminaire. Le résultat d'Utzet subsiste même si l'on ne suppose pas la propriété de représentation chaotique ou prévisible : *si une martingale X est à accroissements indépendants et vérifie une équation de structure $d[X, X]_t = dt + H_t dX_t$, le processus prévisible H est déterministe, ou plutôt peut être choisi déterministe.*

Soit en effet ϕ une fonction positive, nulle au voisinage de zéro et bornée; posons $\psi(x) = \phi(x)/x^2$ (c'est une fonction bornée) et $\Psi = \psi \circ H$. Pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\int_t^{t+2^{-n}} \Psi_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^{t+2^{-n}} \phi \circ H_s \frac{ds}{H_s^2} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t < s \leq t+2^{-n}} \phi(\Delta X_s) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

(car ds/H_s^2 est l'intensité des sauts); l'hypothèse d'indépendance des accroissements entraîne que cette espérance conditionnelle est déterministe. Mais, pour presque tout (t, ω) ,

$$\Psi_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-n}} \int_t^{t+2^{-n}} \Psi_s ds ;$$

prenant des deux côtés l'espérance conditionnelle sur \mathcal{F}_t , on en déduit que Ψ lui-même est déterministe après modification sur un négligeable de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. En utilisant une suite convenable de fonctions ϕ (par exemple les indicatrices des intervalles $]2^{-n}, \infty[$ et $]-\infty, -2^{-n}[$), il est facile de voir que H est presque partout égal à un processus déterministe H' . Comme $\langle X, X \rangle_t = t$, H et H' ont même intégrale par rapport à X , et l'on peut substituer le second au premier dans l'équation de structure.