SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE VALLOIS

Amplitude du mouvement Brownien et juxtaposition des excursions positives et négatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 361-373

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__361_0>

AMPLITUDE DU MOUVEMENT BROWNIEN ET JUXTAPOSITION DES EXCURSIONS POSITIVES ET NEGATIVES

Pierre VALLOIS

Laboratoire de Probabilités , Tour 56 , 3ème étage , 4 place Jussieu , 75252 Paris Cédex 05.

Introduction.

1°) Il est apparu une identité en loi mettant d'une part en jeu ,le processus de l'amplitude du mouvement brownien ,et d'autre part , la somme de la valeur absolue du mouvement brownien et de son temps local en 0 .Le but de cet article est d'en fournir une explication probabiliste.

a) Soit $(B_t\ ;\ t\geq 0)$ un mouvement brownien réel issu de 0. On note $(S_t\ ;\ t\geq 0)$ et $(I_t\ ;\ t\geq 0)$ les processus du maximum et du minimum :

$$S_t = \max_{0\leq u\leq t} B_u\ ,\ I_t = \min_{0\leq u\leq t} B_u,\ t\geq 0.$$

S-I est le processus de l'amplitude de $(B_t\ ;\ t\geq 0)$; ce processus a été étudié par Feller ([F]) et Imhof ([I1]) et vient de faire l'objet d'études plus récentes ([I2]) ,[V3]).

Le processus S-I est croissant et continu ; désignons par $(\theta(t)\ ;\ t\geq 0)$ son inverse continu à gauche, i.e. :

$$\theta(c) = \inf\{t\geq 0\ ;\ S_t-I_t = c\}\ ,\ c\geq 0.$$

Remarquons que , par scaling , $\theta(c) \overset{(d)}{=} c^2\theta(1)$.

La loi de la v.a. $\theta(2)$ est connue ([I1],[V3]) :

$$\textbf{(1)}\qquad \theta(2) \overset{(d)}{=} \xi_1+\xi_2\quad ,$$

où ξ_1 et ξ_2 sont deux v.a. indépendantes, de même loi et

$$\xi_1 \overset{(d)}{=} \inf\{t\geq 0\ ;\ |B_t| = 1\}\ .$$

b) Soit $(L_t\ ;\ t\geq 0)$ le temps local en 0 de $(B_t;\ t\geq 0)$. Nous introduisons trois familles de temps d'arrêt , formées respectivement de :

$U(c) = \inf\{t\geq 0;|B_t| + (1/2)\ L_t = c\}$, $V(c) = \inf\{t\geq 0\ ;\ B_t^+ + (1/2)\ L_t = c\}$ et $W(c) = \inf\{t\geq 0\ ;\ B_t^+ + (1/2)\ L_t = c \text{ ou } B_t^- + (1/2)\ L_t = 2c\}$, où $c>0$.

Par scaling : $U(c) \overset{(d)}{=} c^2U(1)$, $V(c) = c^2V(1)$ et $W(c) = c^2W(1)$.

Notons pour simplifier : $\theta = \theta(2)$, $U = U(2)$, $V = V(2)$ et $W = W(1)$.

La loi de chacune des trois v.a. U , V et W se déduit aisément de ([JY]) .

Théorème 1. *On a les trois identités en loi :*

(2) (i) $U \overset{(d)}{=} \theta$; (ii) $V \overset{(d)}{=} \zeta+\xi_1$; (iii) $W \overset{(d)}{=} \xi_1$,

où ζ est une v.a. stable de paramètre 1/2 , indépendante de ξ_1 .

*c) L'*égalité en loi (2) (i) est remarquable et semble au premier abord assez mystérieuse .Pour établir (2) (i) , nous montrons plus généralement (theorème 2) qu'en "juxtaposant" les excursions positives et négatives , la loi de $(B_t \ ; 0\le t\le U)$ est transformée en celle de $(B_t \ ; 0\le t\le\theta)$. En particulier , U et θ ont même loi . En ce qui concerne (2) (ii), on "juxtapose" les excursions négatives et une partie seulement des excursions positives pour obtenir une trajectoire brownienne arrêtée au premier temps d'atteinte de 1 (théorème 3) .

Quant à (2) (iii) , la question est ouverte.

2°) Se mettent en évidence les processus $(B_t^+ + (1/2)L_t ; t\ge0)$, $(B_t^- + (1/2)L_t \ ; t\ge0)$ et $(|B_t| + (1/2)L_t ; \ t\ge0)$.Bertoin a étudié les deux premiers processus, ([B]).On peut d'ailleurs montrer (2) (i) via l'étude de Bertoin,ce qui fournit une troisième preuve de (2) (i) !

Signalons également que Le Gall et Yor ([LY]) se sont intéressés aux processus des temps locaux de $(|B_t| + \gamma L_t ; t\ge0)$, où γ est un réel positif donné.

3°) Introduisons plus généralement $\mathcal{T}(h,k)$ le temps d'arrêt défini par :

$$\mathcal{T}(h,k) = \inf\{t\ge0 \ ; \ B_t^+ = h(L_t) \text{ ou } B_t^- = k(L_t)\} \ ,$$

où h et k sont deux fonctions boréliennes positives .

On note $\mathcal{T}(h) = \mathcal{T}(h,h)$.

Remarquons que d'après l'identité en loi de Lévy on a :

$$\mathcal{T}(h) \overset{(d)}{=} \inf\{t\ge0 \ ; \ B_t = S_t - h(S_t)\} \ .$$

Soit Γ (resp. Γ_{sym}) l'ensemble des temps d'arrêt de la forme $\mathcal{T}(h,k)$ (resp. $\mathcal{T}(h)$) . La famille Γ a été étudiée par Jeulin et Yor ([JY]) et joue un rôle essentiel dans certaines résolutions "explicites" du problème de Skorokhod pour le mouvement brownien ([AY] , [V1])) .

Lorsque l'on choisit h et k affines , mis à part les trois cas précédents , on peut identifier facilement les lois des trois temps d'arrêt $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, où :

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}(h_i) \ ; \ 0\le i\le 2 \quad , \ h_0 \equiv 1, \ h_1(x) = x+1 \text{ et } h_2(x) = (1-x)^+ .$$

Il est clair que $\mathcal{T}_0 = \inf\{t\ge 0 \ ; \ |B_t| = 1\}$ .Afin de caracteriser la loi de $\mathcal{T}_1$ et de $\mathcal{T}_2$, rappelons le théorème de Pitman ([P]) :

(3) Le processus $(|B_t|+L_t \ ; \ t\ge 0)$ (resp. $(2S_t - B_t \ ; \ t\ge 0)$) est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 .

D'après l'identité en loi de Lévy , le processus $(|B_t|-L_t \ ; \ t\ge 0)$) un mouvement brownien issu de 0 , par conséquent :

(4) $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) a même loi que le premier instant où un mouvement brownien (resp. processus de Bessel de dimension 3) , issu de 0, atteint le niveau 1.

1. Etude de la famille Γ.

Notations.

Nous conservons les notations de l'introduction.Soit $T(x)$ (resp. T^*_x ; $\tau(x)$) le premier instant où le processus $(B_t \ ; t\ge 0)$ (resp. $(|B_t| \ ; t\ge 0)$; $(L_t \ ; t\ge 0)$) atteint le niveau x .Rappelons que pour tous $x\ge 0$ et $\lambda\ge 0$, on a:

(1.1) (i) $E[\exp-\lambda^2 T^*_x/2] = 1/\mathrm{ch}(\lambda x)$

(ii) $E[\exp-\lambda^2 T(x)/2] = E[\exp-\lambda^2\tau(x)/2] = \exp(-\lambda x)$

$(R_t \ ; t\ge 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3 , issu de zéro et $T_x(R)$ le premier instant où $(R_t \ ; t\ge 0)$ atteint $x>0$.

Soient a,b,a',b' quatre réels tels que $a>0, a'>0$. On note $\delta = (a/(-b)^+)\wedge(a'/(-b')^+)$ où x^+ désigne la partie positive de x ; on fait la convention $1/0 = +\infty$.

Proposition 1. *Soit* $U' = \inf\{t\ge 0 \ ; \ B^+_t \ge a+bL_t \text{ ou } B^-_t \ge a'+b'L_t\}$. *Alors :*

(1.2) $E[\exp-(\lambda^2 U'/2)] =$

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^\delta \left\{\frac{1}{\mathrm{sh}\ \lambda(a+bx)} + \frac{1}{\mathrm{sh}\ \lambda(a'+b'x)}\right\}\left(\frac{\mathrm{sh}\ \lambda(a+bx)}{\mathrm{sh}\lambda a}\right)^{-1/2b}\left(\frac{\mathrm{sh}\ \lambda(a'+b'u)}{\mathrm{sh}\lambda a'}\right)^{-1/2b'} dx .$$

Preuve.

Nous appliquons la proposition (4.4) de [JY]) , il vient :

$E[\exp -(\lambda^2 U'/2) | (B_{U'}, L_{U'})] = (\lambda B_{U'}/\mathrm{sh}(\lambda B_{U'})) \exp f(L_{U'})$, avec

$$f(x) = [f_1(x) - \lambda \int_0^x \{\coth(\lambda(a+bs)) + \coth(\lambda(a'+b's))\}\, ds\,]/2 ,$$

$$\text{et } f_1(x) = \int_0^x \{1/(a+bu) + 1/(a'+b'u)\}\, du.$$

Rappelons également que $P(B_{U'}>0 | L_{U'} = x) = 1/[(a+bx)\{1/(a+bx) + 1/(a'+b'x)\}]$,

et $P(L_{U'} \geq x) = \exp-(f_1(x)/2)$.

Un calcul immédiat conduit à la formule (1.2). □

Remarques. 1°) Si $b = 0$, $\left(\frac{\mathrm{sh}\,\lambda(a+bx)}{\mathrm{sh}\lambda a}\right)^{-1/2b}$ est à remplacer par sa limite lorsque b tend vers 0 , c'est à dire $\exp-(\lambda x \coth(\lambda a)/2)$.

2°) Soient $a = 1$, $a' = 2$, $b = b' = -1/2$ et $\lambda \geq 0$. Une application directe de (1.2) conduit à :

$$E(\exp - \frac{\lambda^2}{2} W) = \frac{\lambda}{\mathrm{sh}\lambda\ \mathrm{sh}2\lambda} \int_0^2 \mathrm{sh}(\lambda u)\, du = \frac{\mathrm{ch}\ 2\lambda - 1}{\mathrm{sh}\lambda\ \mathrm{sh}2\lambda} = \frac{1}{\mathrm{ch}\ \lambda} , \quad \lambda \geq 0.$$

3°) Soient $a = 2$, $b = -1/2$ et $b'=0$; le temps d'arrêt V est la limite presque sûre de U' , lorsque a' tend vers $+\infty$, d'où

$$E[\exp(\lambda^2 V/2)] = e^{-\lambda}/\mathrm{ch}\lambda , \text{ pour tout } \lambda \geq 0.$$

4°) Lorsque $a = a'$ et $b = b'$, on a $U' = \inf\{t \geq 0 ; |B_t| = a+b\, L_t\}$,

$$E[\exp(\lambda^2 U'/2)] = \lambda(\mathrm{sh}\lambda a)^{1/b} \int_0^\delta \left(\mathrm{sh}(\lambda(a+bx))\right)^{-1-1/b} dx .$$

De plus :

$(|b|/a)\, L_{U'}$ a pour loi $\beta^{(2)}(1,1/b)$ (resp. $\beta(1,-1/b)$) lorsque $b>0$ (resp. $b<0$) ,

où $\beta(u,v)(dx) = (1/B(u,v))\, x^{u-1}(1-x)^{v-1}\, 1_{\{0<x<1\}}\, dx$,

$\beta^{(2)}(u,v)(dx) = (1/B(u,v))\, x^{u-1}/(1+x)^{v+u}\, 1_{\{x>0\}}\, dx$,

$B(u,v) = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$, $u > 0$ et $v > 0$.

En particulier ,

$$E[\exp(-\lambda^2 U/2] = 1/\mathrm{ch}^2\lambda , \text{ pour tout } \lambda \geq 0 .$$

Compte tenu de (1.1) , le théorème 1 est démontré .

Soit $\delta \in]0,+\infty]$ et h une fonction borélienne définie sur $[0,\delta[$, et strictement positive .On note $g = 1/h$ et $G(x) = \int_0^x g(u)\,du \quad ; x \geq 0$.

Nous supposons de plus que $G(x)<+\infty$ pour tout x de $[0,\delta[$ et $G(\delta-) = +\infty$ où

$G(\delta-) = \lim_{x\to\delta} G(x)$.

Rappelons que d'après [JY] , on a : $\mathcal{T}(h) < +\infty$ p.s. et $\mathcal{T}(h) < \tau(\delta)$.

Proposition 2. *Les deux v.a.* $\mathcal{T}(h)$ *et* $\int_0^{T_1^*} \{1/g^2(G^{-1}(L_s))\}\,ds$ *ont même loi.*

Preuve.

Soit $M_t = g(L_t)B_t$; $t\geq 0$. Le processus $(M_t\ ;\ t\geq 0)$ est une martingale locale continue dont le temps local en 0 est $(G(L_t)\ ;\ t\geq 0)$ ([Y1],théorème 1).

De plus $M_t = \int_0^t g(L_u)\,dB_u$. Par changement de temps, nous pouvons écrire :

$M_t = \beta(A(t))$ où $(\beta(t)\ ;\ t\geq 0)$ est un mouvement brownien réel issu de 0 et

$A(t) = \langle M\rangle_t = \int_0^t g^2(L_u)\,du$.

Notons $(\ell(t)\ ;\ t\geq 0)$ le temps local en 0 de $(\beta_t\ ;\ t\geq 0)$. Nous avons :

(1.3) $\qquad G(L_t) = \ell(A(t))$; pour tout $t \geq 0$.

Posons pour simplifier $T = \mathcal{T}(h)$. On a : $T = \inf\{t\geq 0,\ |M_t| = 1\}$.

La fonction $t \longrightarrow A(t)$ est strictement croissante, il est clair que $A(T) = \sigma$ où $\sigma = \inf\{t\geq 0\ ;\ |\beta(t)| = 1\}$. D'où

(1.4) $\qquad L_T = G^{-1}(\ell(\sigma))$.

Mais $\dfrac{dA^{-1}(t)}{dt} = 1/\left(\dfrac{dA}{dt}(A^{-1}(t))\right) = 1/g^2(L_{A^{-1}(t)}) = 1/g^2(G^{-1}(\ell(t))$.

On en déduit $T = A^{-1}(\sigma) = \int_0^{\sigma} \{1/g^2(G^{-1}(\ell(t)))\}\,dt.$ $\square$

Remarques. 1°) L'approche précédente est inspirée de Yor ([Y2]).
En utilisant la même approche , via le balayage , signalons un résultat voisin obtenu par ([RY],exercice (4.18) , p 248) :

$$\int_0^{T(G(a))} \{1/g^2(G^{-1}(S_u))\}\, 1_{\{B_u>0\}}\,du \overset{(d)}{=} \int_0^{T(a)} 1_{\{B_u>\varphi(S_u)\}}\,du ,$$

où $\varphi(x) = x - G(x)/g(x)$.

2°) Considérons $\mathcal{T}_+(h) = \inf\{t\geq 0 \ ; \ B_t^+ = h(L_t)\}$.Une étude analogue montrerait:

$$(1.5) \qquad \mathcal{T}_+(h) \overset{(d)}{=} \int_0^{T(1)} \{1/g^2(G^{-1}(L_s))\} \, ds \ .$$

3°) Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ possédant un moment d'ordre 1, et symétrique (i.e. $\mu[0,x] = \mu[-x,0]$; $\forall x\geq 0$) . Pour simplifier nous supposerons que μ ne charge pas les points. Soit $T = \mathcal{T}(h)$; on cherche une fonction h ,croissante ,telle que B_T ait pour loi μ .
Compte tenu de l'égalité $|B_T| = h(L_T)$ et de (1.4), on a :
$P(|B_T|\geq x) = P(\ell(\sigma) \geq G(h^{-1}(x)))$, pour tout $x\geq 0$.
Or $\ell(\sigma)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1 ; par conséquent,

$$(1.6) \quad \nu[x,+\infty[\ = \exp - G(h^{-1}(x)) = \exp - \int_0^x (1/u) \, dh^{-1}(u) \ ,$$

où $\nu[x+\infty[\ = P(|B_T| \geq x)$.
On différencie (1.6) , il vient : $d\nu(x)/\nu[x_1+\infty[\ = (1/x) \, dh^{-1}(x)$ .D'où :

$$(1.7) \quad h^{-1}(x) = \int_0^x \{t/(\mu]-\infty,t] + \mu[t,+\infty[)\} \, dt \quad ; \ \forall \ x \geq 0 \ .$$

Ceci fournit , lorsque μ est symétrique et sans atomes, une expression explicite de h en fonction de μ ; nous retrouvons les formules obtenues dans le cas général par ([V1], lemme 3.5) .

Nous donnons à présent deux applications de la proposition 2.

Proposition 3. *On a :*

$$(1.8) \quad \text{(i)} \int_0^{T_1^*} \exp(-2L_t) \, dt \overset{(d)}{=} T_1(R) \quad ; \quad \text{(ii)} \int_0^{T_1^*} \exp(2\,L_t) \, dt \overset{(d)}{=} T(1) \ ;$$

$$\text{(iii)} \ V(1) \overset{(d)}{=} \int_0^{T(1)} \exp(-L_t) \, dt \quad ; \ \text{(iv)} \ U(1) \overset{(d)}{=} \int_0^{T_1^*} \exp(-L_t) \, dt \ .$$

Preuve.

Soient $h_0(x) = a+bx$ avec $a>0$, $b\neq 0$, $\delta = a/(-b)^+$, $g_0 = 1/h_0$ et

$G_0(x) = \int_0^x g_0(u) \, du$; $x<\delta$. Alors $G_0^{-1}(x) = (a/b)(e^{bx}-1)$ et

$1/g_0^2(G_0^{-1}(x)) = a^2e^{2bx}$ .Il suffit alors d'appliquer (3) , (1.5) ,le théorème 1

et la proposition 2 , pour établir (1.8) . □

La proposition 3 nous incite à déterminer la loi des v.a. $\mathcal{E}^\lambda$ et $\mathcal{E}^\lambda_+$ où :

$$\mathcal{E}^\lambda = \int_0^{T_1^*} \exp(\lambda L_t)\, dt \quad , \quad \mathcal{E}^\lambda_+ = \int_0^{T(1)} \exp(\lambda L_t)\, dt \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Plus généralement , pour toute fonction borélienne φ , définie sur $\mathbb{R}_+$ et localement bornée , on introduit les deux v.a. :

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_0^{T_1^*} \varphi(L_t)\, dt \quad , \quad \mathcal{E}_+(\varphi) = \int_0^{T(1)} \varphi(L_t)\, dt \quad .$$

Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = \int_0^x \sqrt{\varphi(t)}\, dt \quad , x \geq 0$.

Proposition 4 . *La v.a. $\mathcal{E}(\varphi)$ (resp. $\mathcal{E}_+(\varphi)$) a même loi que $\mathcal{T}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{T}_+(\gamma)$), où $\gamma(x) = \sqrt{\varphi(\psi^{-1}(x))}$, $x \geq 0$.*

Preuve

On pose $h(x) = \sqrt{\varphi(\psi^{-1}(x))}$ $x \geq 0$, et $g = 1/h$. Alors :

$$G(x) = \int_0^x (\varphi(\psi^{-1}(t)))^{-1/2}\, dt = \int_0^{\psi^{-1}(x)} (\varphi(u))^{-1/2}\, d\psi(u) = \psi^{-1}(x) .$$

On en déduit $1/g^2(G^{-1}(x)) = \varphi(x)$ pour tout $x \geq 0$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2. □

Remarques . 1°) Lorsque $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, on a $\gamma(x) = 1 + \lambda x/2$; donc :

(1.9) $\mathcal{E}^\lambda$ (resp. $\mathcal{E}^\lambda_+$) a même loi que $\mathcal{T}(\gamma)$ (resp . $\mathcal{T}_+(\gamma)$) .

2°) Quand $\varphi(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > -2$, on a $\gamma(x) = (\beta x)^{\alpha/2\beta}$,où $\beta = 1 + \alpha/2$; d'où:

(1.10) $$\inf\{t \geq 0 \; ; \; |B_t| = (\beta L_t)^{\alpha/2\beta}\} \overset{(d)}{=} \int_0^{T_1^*} (L_t)^\alpha\, dt ,$$

(1.10)$_+$ $$\inf\{t \geq 0 \; ; \; B_t^+ = (\beta L_t)^{\alpha/2\beta}\} \overset{(d)}{=} \int_0^{T(1)} (L_t)^\alpha\, dt .$$

2. Décompositions trajectorielles.

Notations.

1°) Soient $A_+(t) = \int_0^t 1_{\{B_u > 0\}}\, du$, $A_-(t) = \int_0^t 1_{\{B_u < 0\}}\, du$; $t \geq 0$.

α_+ (resp. α_-) désigne l'inverse continu à droite de A_+ (resp. A_-).

On introduit Y_+ et Y_- les deux processus :

$$Y_+ = (Y_+(t) = (B^+ + (1/2)L)(\alpha_+(t))\ ;\ t\ge 0)\ ,$$

$$Y_- = (Y_-(t) = (B^- + (1/2)L)(\alpha_-(t))\ ;\ t\ge 0)\ .$$

2°) On désigne par $\mathcal{E}^+ = \{B_U > 0\}$, $\mathcal{E}^- = \{B_U < 0\}$, $\zeta_+ = A_+(U)$ et $\zeta_- = A_-(U)$.

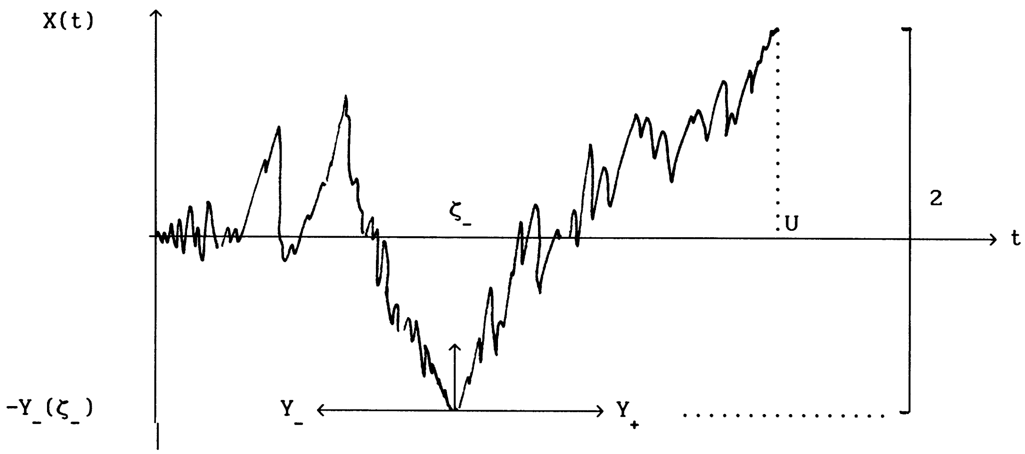
On a $\zeta_+ + \zeta_- = U$.

3°) On construit le processus X de la manière suivante : sur $\mathcal{E}^+$(resp. $\mathcal{E}^-$), on pose :

$X(t) = Y_-(\zeta_- - t) - Y_-(\zeta_-)$, $0 \le t \le \zeta_-$; $X(t) = Y_+(t-\zeta_-) - Y_-(\zeta_-)$, $\zeta_- \le t \le U$.

(resp. $X(t) = Y_+(\zeta_+) - Y_+(\zeta_+ - t)$, $0\le t\le \zeta_+$; $X(t) = Y_+(\zeta_+) - Y_-(t-\zeta_+)$ $\zeta_+ \le t \le U$)

Représentons le cas $\mathcal{E}^+$ par la figure :



Théorème 2. *Le processus* X *a même loi que* $(B_t\ ;\ 0 \le t \le \theta)$.

Remarques. 1°) En particulier U a même loi que θ .

2°) Soit $t>0$ fixé . Bertoin ([B]) a établi que le processus $\left[(Y_+(u),\ 0\le u\le A_+(t))\ ,\ (Y_-(u)\ ;\ 0\le u\le A_-(t))\right]$ a même loi que $(\underset{\rightarrow}{B}\ ,\ \underset{\leftarrow}{B})$, où

$\underset{\rightarrow}{B} = (\underset{\rightarrow}{B}(u) = B_\rho - B_{\rho+u}\ ;\ 0\le u\le t-\rho)$, $\underset{\leftarrow}{B} = (\underset{\leftarrow}{B}(u)) = B_\rho - B_{\rho-u}\ ;\ 0\le u\le \rho)$ et

$\rho = \sup\{u < t\ ;\ B_u = S_t\}$.

a) Montrons à présent , via le travail de Bertoin ([B]) , que U et θ ont même loi .

On a $\{U > t\} = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$, avec $\Lambda_+ = \{\max_{0\le u\le t}(B^+ + (1/2)L)(u) < 2\}$ et

$\Lambda_- = \{\max_{0\le u\le t}(B^- + (1/2)L)(u) < 2\}$

Or le processus $B^+ + (1/2)L$ (resp. $B^- + (1/2)L$) est constant sur les excursions négatives (resp. positives) de B, par conséquent :

$\Lambda_+ = \{\max_{0\le u\le A_+(t)} Y_+(u) < 2\}$ et $\Lambda_- = \{\max_{0\le u\le A_-(t)} Y_-(u) < 2\}$.

Mais $\{\max_{u\ge 0} \underset{\rightarrow}{B}(u) < 2\} = \{B_\rho - \inf_{\rho\le u\le t} B_u < 2\}$, $\{\max_{u\ge 0} \underset{\leftarrow}{B}(u) < 2\} = \{B_\rho - I_\rho < 2\}$,

et $B_\rho = S_t$ .Donc $\{U > t\} \overset{(d)}{=} \{S_t - I_t < 2\} = \{\theta > t\}$.

Il est clair que U et θ ont même loi.

b) Les deux processus $\underset{\rightarrow}{B}$ et $\underset{\leftarrow}{B}$ sont intimement liées au méandre brownien .
En effet , d'après ([BY],[D]) , les processus $(\frac{1}{\sqrt{t-\rho}} \underset{\rightarrow}{B}(u(t-\rho));\ 0\le u\le 1)$ et $(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \underset{\leftarrow}{B}(u\rho);\ 0\le u\le 1)$ sont deux méandres browniens indépendants , et indépendants de ρ .

Preuve du théorème.

1°) Si Z est un processus , on note $\overline{Z}_t = \max_{0\le u\le t} Z_u$ et $\underline{Z}_t = \min_{0\le u\le t} Z_u$, pour tout $t\ge 0$ et $T_x(Z)$ le premier instant où le processus Z atteint x.
D'après la formule de Tanaka, on a : $B_t^+ = -M_+(t) + (1/2)L_t$; $t\ge 0$, où

$$M_+(t) = -\int_0^t 1_{\{B_u > 0\}}\, dB_u .$$

D'une manière analogue $(1/2)L = \overline{M}_-$, où $M_-(t) = \int_0^t 1_{\{B_u < 0\}} dB_u$.

Soient $\beta_+(t) = M_+(\alpha_+(t))$ et $\beta_-(t) = M_-(\alpha_-(t))$, $t \ge 0$. Par changement de temps , β_+ et β_- sont deux mouvements browniens réels issus de 0. Les deux martingales M_+ et M_- étant orthogonales, les deux mouvements browniens β_+ et β_- sont indépendants.
Mais $((1/2)L_t$; $t\ge 0)$ est un processus croissant qui ne croit que sur les zéros de B^+. D'après la solution au problème de réflexion de Skorokhod , on a : $\overline{M}_+ = 1/2\ L$ et

(2.1) $(1/2)L(\alpha_+(t)) = \overline{\beta}_+(t)$, $t\ge 0$; $Y_+ = 2\overline{\beta}_+ - \beta_+$; $Y_- = 2\overline{\beta}_- - \beta_-$.

Utilisons le théorème de Pitman (3) : les deux processus Y_+ et Y_- sont indépendants , Y_+ et Y_- ont même loi qu'un processus de Bessel de dimension 3 , issu de 0 .

2°) Soit $s\ge 0$, tel que $B_u\ge 0$ pour tout u de $[\tau(s_-),\tau(s)]$. Remarquons que $(B^- + (1/2)L)(\tau(s)) = s/2$ et $(B^- + (1/2)L)(v) > s/2$ pour tout $v>\tau(s)$. Par conséquent $\tau(s) = \sup\{t\ ;\ (B^- + (1/2)L)(t) > s/2\}$.
On en déduit , par changement de temps, que sur $\mathcal{E}^+$, on a :

(2.2) (i) $\zeta_+ = T_2(Y_+)$; (ii) $\zeta_- = \sup\{t\geq 0\ ;\ Y^-(t) = (1/2)L_U\}$.

De plus $\mathcal{E}^+ = \{\max_{0\leq s\leq U}(B^- + (1/2)L)(s) < 2\} = \{\max_{u\leq\zeta_-} Y^-(u) < 2\}$.

3°) Il convient d'ajouter au théorème de Pitman déjà cité :

$L_t = \min_{u\geq t}(|B_u| + L_u)$ (resp. $S_t = \min_{u\geq t}(2S_u - B_u)$) pour tout $t\geq 0$.

Posons $\xi = (1/2)L_U$. D'après (2.1) et (2.2) (i) , on a $\xi = \min_{u\geq\zeta_+} Y_+(u) =$

$\min_{u\geq T_2(Y_+)} Y_+(u)$ .Par conséquent , conditionnellement à $\mathcal{E}^+$, ξ est une v.a. qui

est indépendante du processus $(Y_+(s)\ ;0\leq s\leq\zeta_+)$.

Soit a>0. Rappelons à présent le théorème de Williams ([W]):

(2.3) i) Le processus $\hat{R} = (\hat{R}(t) = a - B_{T(a)-t}\ ;\ 0\leq t\leq T(a))$ a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, et arrêté à son dernier temps de passage en a.

ii) La v.a. $S_{g(a)}$ suit une loi uniforme sur [0,a], où

$g(a) = \sup\{u < T(a);B_u = 0\}$.

iii) Le processus $(B_{u+g(a)}\ ;\ 0\leq u\leq T(a)-g(a))$ est indépendant de $(B_u\ ;\ 0\leq u\leq g(a))$ et est identique en loi à $(R_u\ ;\ 0\leq u\leq T_a(R))$.

iv) Soit $\eta = \sup\{u<g(a)\ ;\ B_u = S_{g(a)}\}$ .Conditionnellement à $S_{g(a)} = x$, les deux processus $(B_u\ ;\ 0\leq u\leq\eta)$ et $(B_{g(a)-u}\ ;\ 0\leq u\leq g(a)-\eta)$ sont indépendants, et ont même loi que $(B_u\ ;0\leq u\leq T(x))$.

Remarquons que $T(a) - g(a) = T_a(\hat{R})$ et $a - S_{g(a)} = \min_{t\geq T_a(\hat{R})} \hat{R}(t)$.

On en déduit que , conditionnellement à $\mathcal{E}^+$, $\min_{u\geq T_2(Y_+)} Y_+(u)$ suit une loi uniforme sur [0,2].

Par conséquent, conditionnellement à $\mathcal{E}^+$, les deux processus $(Y_+(u)\ ;\ 0\leq u\leq\zeta_+)$ et $(Y_-(u)\ ;\ 0\leq u\leq\zeta_-)$ sont indépendants, $(Y_+(u)\ ;\ 0\leq u\leq\zeta_+)$ a même loi que $(R_t\ ;\ 0\leq t\leq T_2(R))$, $(Y_-(u)\ ;\ 0\leq u\leq\zeta_-)$ a même loi que $(\xi' - B_{T(\xi')-t}$; $0\leq t\leq T(\xi'))$ conditionné à ne pas atteindre 2 , où ξ' est v.a. indépendante des processus B et $P(\xi' \in .) = P(\xi \in .|\mathcal{E}^+)$.

Nous savons déjà que $(1/2)\xi$ suit une loi $\beta(1,2)$; il est toutefois intéressant de retrouver ce résultat , via les processus Y_+ et Y_- . En effet:

$P(\mathcal{E}^+|\xi = x) = P(x - B_t < 2\ ;\ \forall\ t \in [0,T(x)]) = (2 - x)/2$ .D'où

$P(\xi \in dx\ ,\mathcal{E}^+) = [(2 - x)/4]\ 1_{\{0<x<2\}}\, dx$.

4°) Par construction, sur $\mathcal{E}^+$, $X(\zeta_-) = \min_{0\le s\le U} X(s)$, $\zeta_- = \sup\{s<U \; ; \; X(s) = X(\zeta_-)\}$ et $(X(s+\zeta_-) - X(\zeta_-) \; ; \; 0\le s\le\zeta_+) = (Y_+(s) \; ; \; 0\le s\le \zeta_+)$.
On applique le théorème 1 de ([V2] avec $\varphi(x) = 2 - x$ (le temps θ correspond à U de ([V2])) et le 1°) du lemme 2 de ([V2]) on en déduit que , conditionnellement à $\mathcal{E}^+$, $(X(t) \; ; \; 0\le t\le U)$ a même loi que $(B_t \; ; \; 0\le t\le \theta)$, puis par symétrie que ces deux processus ont même loi . □

Etudions à présent le cas du temps d'arrêt $V = V(2)$.
Nous notons $\zeta_- = A_-(V)$ et $\zeta_+ = A_+(V)$. Il est clair que $\zeta_+ = T_2(Y_+)$.
Soient $2\xi = Y_-(\zeta_-)$ et $\hat{Y}$ le processus : $\hat{Y}(t) = 2\xi - Y_-(\zeta_- - t)$; $0\le t\le\zeta_-$.
Remarquons que $2\xi = (1/2)L_v$ et $\zeta_- = T_{2\xi}(\hat{Y})$.
On définit le processus Z : $Z(t) = \hat{Y}(t)$; $0\le t\le T_\xi(\hat{Y})$,
$Z(t) = \hat{Y}(\zeta_- + T_\xi(\hat{Y}) - t) - \xi$; $T_\xi(\hat{Y})<t\le\zeta_-$, $Z(t) = Y_+(t-\zeta_-)$; $\zeta_-<t\le\zeta_- + T_1(Y_+)$.

Théorème 3.

1°) *La v.a.,* $A_+(V)-A_+(V(1))$ *est indépendante du processus* Z *et*
$$A_+(V)-A_+(V(1)) \overset{(d)}{=} T_1^*$$
2°) *Le processus* Z *a même loi que* $(B_t \; ; \; 0\le t\le T(1))$.

Remarques. Par changement de temps , $T_1(Y_+) = A_+(V(1))$; Par conséquent la durée de vie de Z est $A_-(V) + A_+(V(1))$; cette v.a. est indépendante de $A_+(V)-A_+(V(1))$ et suit une loi stable de paramètre 1/2 . De plus , $V = (A_-(V)+A_+(V(1))) + (A_+(V)-A_+(V(1)))$, est une réalisation presque sûre de l'identité en loi (2) (ii).

Preuve du théorème.

Soit ξ' une v.a. indépendante des processus R et B et de même loi que ξ.
On montre d'une manière analogue à la preuve du théorème 2 :

(i) ξ suit une loi uniforme sur [0,1] ,

(ii) les deux processus $(Y_+(t);0\le t\le\zeta_+)$ et $(Y_-(t);0\le t\le\zeta_-)$ sont indépendants,

(iii) $(Y_+(t) \; ; \; 0\le t\le\zeta_+)$ a même loi que $(R_t \; ; \; 0\le t\le T_2(R))$,

iv) $(Y_-(t) \; ; \; 0\le t\le\zeta_-)$ a même loi que le processus R arrêté à son dernier temps de passage en $2\xi'$.
On applique successivement (2.3) i) , ii) et iv) : $(\hat{Y}(t) \; ; \; 0\le t\le\zeta_-)$ a même loi

que $(B_t\ ;\ 0\le t\le T(2\xi'))$ et $(Z(t)\ ;0\le t\le\zeta_-)$ a même loi que $(B_t\ ;0\le t\le g(1))$.
On utilise à nouveau (2.3) : le processus Z a même loi que $(B_t\ ;0\le t\le T(1))$.
Mais $A_+(V(1)) = T_1(Y_+)$ et $A_+(V) - A_+(V(1)) = \inf\{t\ge 0;\ Y_+(t+T_1(Y_+)) = 2\} \overset{(d)}{=} T_1^*$.□

Bibliographie.

[AY] Azéma , J.; Yor , M., : Une solution simple au problème de Skorokhod. *Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes. Math. Vol. 721. Berlin Heidelberg New York : Springer 1979.*

[B] Bertoin , J. : Décomposition du mouvement brownien avec dérive en un minimum local par juxtaposition de ses excursions positives et négatives. *Séminaire de Probabilités* XXV . *Lect. Notes Math. , Vol. 1485 . Berlin Heidelberg New York : Springer.*

[BY] Biane , P. ; Yor. , M : Quelques précisions sur le méandre brownien . *Bull. Sci. Math. 2° Série , Vol 112 , p 101-109 , 1988 .*

[D] Denisov , I.V. : A random walk and a Wiener process near a maximum . *Theory of Probability and its Applications , Vol 28 , n° 24 , p 821-824 , Soviet Journal published December 1983 . English translation published 1984 .*

[F] Feller , W. : The asymptotic distribution of the range of sums of independent variables. *Ann. Math. Statist. 22 , 427-432 .1951 .*

[I1] Imhof , J.P. : On the range of Brownian motion and its inverse process. *The Annals of Probability , Vol 13 , N°3 , 1011-1017 , 1985.*

[I2] Imhof , J.P. : A construction of the Brownian path from BES^3 pieces. *Preprint .*

[JY] Jeulin , T. ; Yor , M. : Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. *Séminaire de Probabilités XV Lect. Notes Math. Vol. 850. Berlin Heidelberg New York : Springer 1979/1980.*

[LY] Le Gall , J.F.; Yor M. : Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *Note C.R. Acad. Sc. Paris, t 303, Série I, n°3, 1986.*

[P] Pitman , J. : *One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. Adv. Appl. Prob. 7, p 511-526 (1975).*

[RY] Revuz , D. ; Yor , M. : Continuous Martingales and Brownian Motion . *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York . 1991 .*

[V1] Vallois , P. : Le problème de Skorokhod sur $\mathbb{R}$: une approche avec le temps local. *Séminaire de Probabilités XVII. Lect. Notes Math., Vol 986. Berlin Heidelberg New York Springer 1982.*

[V2] Vallois , P. : Une extension des théorèmes de Ray et Knight sur les temps locaux Browniens. *Probab. Th. Rel. Fields 88, 445-482 (1991).*

[V3] Vallois , P. : Diffusion arrêtée au premier instant où l'amplitude atteint un niveau donné. *A paraître.*

[W] Williams , D. : Decomposing the Brownian path. *Bull. Am. Math. Soc. 76, 871-873 (1970).*

[Y1] Yor , M. : Sur le balayage des semi-martingales continues *Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes Math., Vol 721 . Berlin Heidelberg New York Springer 1979 .*

[Y2] Yor , M. : Problème de Skorokhod et balayage du mouvement brownien . *Manuscrit non publié .*