SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE BIANE

Frontière de Martin du dual de SU(2)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 225-233
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__225_0>

FRONTIERE DE MARTIN DU DUAL DE SU(2)

Philippe Biane
Laboratoire de Probabilites
56-66 3^e étage, Université Paris 6
4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05

Introduction:

La méthode de compactification de Martin fournit un procédé théorique pour donner une représentation intégrale des fonctions harmoniques positives associées à un noyau de transition (ou un semi-groupe) markovien sur un espace localement compact (voir Meyer [M], Revuz [R]). Dans la pratique, la détermination explicite de la frontière et de la topologie du compactifié de Martin est un problème ardu qui n'est résolu que dans quelques cas (voir par exemple [A-C], [Ba2], [C], [De], [Dy], [N-S], [S]).

Lorsque le noyau markovien est un noyau de convolution sur un groupe abèlien localement compact, Choquet et Deny [De] ont montré que le cône des fonctions harmoniques positives admettait pour génératrices extrémales les multiples des exponentielles harmoniques. L'ensemble de ces exponentielles s'identifie alors à la frontière de Martin du groupe. Lorsque le groupe est $\mathbb{Z}^n$, Ney et Spitzer [N-S] ont étudié le comportement asymptotique du noyau potentiel associé au noyau de convolution, et en ont déduit une description explicite de la compactification de Martin. Les résultats de Ney et Spitzer sont décrits brièvement dans la première partie.

Le but de cette note est d'essayer d'obtenir l'analogue des résultats de Ney et Spitzer dans le cadre des "marches aléatoires quantiques". Certaines propriétés de ces marches aléatoires ont été étudiées dans [B1], [B2], [B3], [P]. En particulier, dans un article précédent [B2] j'ai étendu une partie de la théorie de Choquet et Deny à ce cadre non commutatif, et montré que l'on disposait dans ce cadre d'une notion d'exponentielle qui permettait de déterminer l'analogue de la frontière de Martin.

Je vais rappeler ces résultats dans le deuxième paragraphe, puis ensuite je montrerai comment trouver un analogue du noyau potentiel et du noyau de Martin, ainsi que des "directions asymptotiques" le long desquelles on a convergence du noyau de Martin vers les fonctions harmoniques extrèmales.

1) Compactification de Martin de $\mathbb{Z}^n$ associée à une marche aléatoire:

Dans la théorie classique de la frontière de Martin, on considère une chaine de Markov sur un espace d'état localement compact E, dont le noyau potentiel admet une densité $U(x,y)$, $(x,y)\in E\times E$, par rapport à une mesure η (on renvoie à [M] et [R] pour les hypothèses précises), et on forme le noyau de Martin:

$$K(x,y) = \frac{U(x,y)}{\mu U(y)}$$

(ce noyau dépend d'une mesure de base μ). Lorsque le point y tend vers l'infini, les valeurs d'adhérence de la famille de fonctions $K(.,y)$ pour la topologie de la convergence simple sont les fonctions $K(.,\eta)$ où η décrit un espace topologique compact **F** qui est la frontière de Martin associée à la chaîne de Markov. Une suite de points y_n de E converge vers un point η de la frontière de Martin **F** si la suite de fonctions $K(.,y_n)$ converge unifomément sur tout compact vers $K(.,\eta)$. Ceci permet de plonger E dans un espace topologique compact $\hat{E}$ dont la frontière $\hat{E}\setminus E$ est F.

Toute fonction positive h, harmonique pour le noyau de transition, admet alors une représentation intégrale

$$h(.) = \int_{\mathbf{F}} K(.,\eta) \quad dm(\eta)$$

à l'aide d'une mesure positive m sur **F**.

Lorsque la chaîne de Markov est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^n$ dont les accroissements ont pour loi ρ (on suppose que le semi-groupe engendré par le support de ρ est $\mathbb{Z}^n$), les fonctions harmoniques positives sont les fonctions positives, solutions de l'équation de convolution $\rho * f = f$. Celles ci forment un cone convexe dont les génératrices extrémales sont engendrées par les "exponentielles ρ-harmoniques", i.e. les fonctions sur $\mathbb{Z}^n$ de la forme

$$f(y) = \exp(\langle x,y\rangle)$$

(avec $x\in\mathbb{R}^n$) telles que $\rho(f) = 1$ (cf Deny [De]). Toute solution admet une représentation intégrale unique de la forme

$$\int_D \exp(\langle x,.\rangle)\ dm(x)$$

où m est une mesure positive sur $D = \{x\in\mathbb{R}^n \ / \int \exp(\langle x,y\rangle)\ \rho(dy) = 1\}$.

Supposons que ρ admette un moment d'ordre 1, et soit décentrée, alors D est le bord d'un convexe. Si $u\in D$, on pose $m_u = \int y \exp(\langle u,y\rangle)\ d\rho(y)$, et l'application

$u \to \frac{m_u}{|m_u|}$ est un homéomorphisme de D sur la sphère de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$.

Soit $U(x,y) = U(x-y)$ la densité par rapport à la mesure de Lebesgue du noyau potentiel de la marche aléatoire dont les accroissements ont la loi ρ;

Ney et Spitzer montrent alors que si $|y| \to \infty$ et $\frac{y}{|y|} \to \frac{m_u}{|m_u|}$ alors:

$$\frac{U(x-y)}{U(y)} \to \exp(\langle x,u\rangle).$$

Ceci leur permet d'identifier le compactifié de Martin de $\mathbb{Z}^n$ à une boule euclidienne de dimension n, la frontière étant une sphère de dimension n-1, et d'expliciter le plongement de $\mathbb{Z}^n$ dans son compactifié de Martin. (Pour un prolongement de ces résultats à $\mathbb{R}^n$, voir [Ba1]).

2) Marche aléatoire sur le dual de SU(2), et frontière de Martin:

On se propose ici de poser le problème de la compactification de Martin dans le cadre des marches aléatoires quantiques étudiées dans [B1], [B2], [B3], [P].

Donnons tout d'abord quelques définitions.

Soit G un groupe compact, et $\mathcal{A}$ son algèbre de von Neumann; c'est l'algèbre d'opérateurs sur $L^2(G)$, fermeture forte de l'algèbre engendrée par les opérateurs de translation λ_g: $f \to f(g^{-1}.)$, $g \in G$ (cf Dixmier [Di]).

Cette algèbre est munie d'un coproduit Δ: $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (le produit tensoriel étant pris au sens des algèbre de von Neumann), d'une counité ε: $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ et d'un coinverse i: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, qui sont des applications linéaires continues données par les formules:

$$\Delta(\lambda_g) = \lambda_g \otimes \lambda_g \qquad \varepsilon(\lambda_g) = 1 \qquad i(\lambda_g) = \lambda_{g^{-1}}$$

qui font de $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf-von Neumann.

$\mathcal{A}$ admet une décomposition centrale $\mathcal{A} = \oplus_{x \in \Gamma} M_x$ où x parcourt l'ensemble Γ des classes de représentations irréductibles de G et M_x est isomorphe à l'algèbre des matrices complexes n×n, n étant la dimension de x.

Soit ν un état sur $\mathcal{A}$; il est déterminé par la donnée de la fonction continue de type positif sur G : $\varphi(g) = \nu(\lambda_g)$.

ν définit une application complètement positive Q de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, par la formule $Q(\lambda_g) = \varphi(g)\ \lambda_g$.

Pour rendre ces notions plus familières, il est bon de se représenter le cas où G est un groupe abélien. Soit $\hat{G}$ le groupe dual de G. D'après le théorème de dualité de Pontryagin, G est aussi le groupe dual de $\hat{G}$, et l'application de G dans $L^\infty(\hat{G})$ qui à g associe le caractère de $\hat{G}$ correspondant s'étend linéairement en un isomorphisme d'algèbres de von Neumann entre $\mathcal{A}$ et $L^\infty(\hat{G})$. A travers cet isomorphisme, ν et Q s'interprètent comme une mesure de probabilité et un noyau Markovien sur $\hat{G}$, tandis que φ est la fonction de type positif sur G, transformée de Fourier de la mesure ν. Le coproduit Δ est alors l'application $\Delta : L^\infty(\hat{G}) \to L^\infty(\hat{G}\times\hat{G})$ telle que $\Delta(f)(x,y) = f(xy)$.

ν et Q permettent de construire une marche aléatoire quantique, (qui est une marche aléatoire usuelle quand G est abèlien), pour laquelle on a une notion de "fonctions harmoniques positives", qui sont les solutions positives de l'équation $Q(h) = h$ (voir [B2], [B3]). Si on cherche les solutions de cette équation dans $\mathcal{A}$, on ne trouve en général que la solution λ_e (dans le cas G abèlien, cela revient à chercher les fonctions harmoniques bornées, alors que les fonctions harmoniques positives sont en général non bornées).

On est alors amené à considérer l'algèbre $\hat{\mathcal{A}} = \prod_{x\in\Gamma} M_x$ qui joue le rôle d'algèbre de "fonctions" non bornées sur le dual de G; on montre (cf [B2]) que Δ admet une extension à $\hat{\mathcal{A}}$, à valeurs dans $\hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}} = \prod_{x,y\in\Gamma} M_x \otimes M_y$, et que l'équation $Q(h) = h$ a un sens dans $\hat{\mathcal{A}}$. Toute solution positive de cette équation dans $\hat{\mathcal{A}}$ se représente alors de façon unique comme intégrale

$$\int_{\mathcal{E}} f \, dm(f).$$

où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des exponentielles i.e. des éléments positifs non nuls de $\hat{\mathcal{A}}$ qui vérifient $\Delta(f) = f\otimes f$, et m est une mesure positive bornée portée par le sous ensemble des f vérifiant $\nu(f) = 1$.

On obtient ainsi une extension du résultat de Deny [De] cité au §1.

On va définir le potentiel U de la marche aléatoire comme l'application complètement positive U donnée formellement par $U = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n$.

En fait si on se restreint à $\mathcal{A}_c$ la sous-algèbre des éléments de la forme $\int_G f(g)\, \lambda_g \, dg$ avec f continue, on peut définir U sur $\mathcal{A}_c$ par la formule:

$$U\left(\int_G f(g)\, \lambda_g \, dg\right) = \int_G f(g)\, (1-\varphi(g))^{-1} \lambda_g \, dg,$$

qui détermine un élément de $\hat{\mathcal{A}}$ dès que $(1-\varphi(g))^{-1}$ est intégrable, ce que nous supposerons dans la suite (cette condition correspond à la *transience* de la marche aléatoire quantique).

Lorsque G est un groupe abélien, $\hat{G}$ est un groupe discret, et les fonctions indicatrices des points de $\hat{G}$ sont caractérisées comme étant les projecteurs de rang 1 de l'algèbre $\mathcal{A}$.

La notion de projecteur minimal (de rang 1) de $\mathcal{A}$ va nous permettre de retrouver la frontière de Martin à partir du potentiel U dans le cas où G n'est pas commutatif: on va fixer un état μ sur $\mathcal{A}$ (par exemple l'unique état porté par la composante de $\mathcal{A}$ correspondant à la représentation triviale) et on considèrera les élément $\mu(U(\Pi))^{-1}$ $U(\Pi)$ de $\hat{\mathcal{A}}$ où Π décrit l'ensemble des projecteurs minimaux, comme substituts des fonctions $K(.,y)$.

Passons maintenant au problème de la détermination de directions asymptotiques:

il s'agit de trouver, pour chaque exponentielle f, telle que $\nu(f) = 1$, une suite Π_n de projecteurs minimaux de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(U(\Pi_n))^{-1}$ $U(\Pi_n)$ converge vers f dans $\hat{\mathcal{A}}$. En fait, on va se limiter dans le paragraphe suivant à un cas particulier, celui du groupe SU(2), en prenant pour ν un état très simple, porté par la représentation de base, qui est le seul pour lequel j'aie réussi à mener les calculs à bien; néanmoins, le fait que dans ce cas les directions asymptotiques existent et soient faciles à trouver laisse suspecter que le cas des groupes de Lie simples soit à portée du calcul.

3) Directions asymptotiques du dual de SU(2):

Dans ce paragraphe on considère le groupe G = SU(2) des matrices 2x2 unitaire de déterminant 1, agissant sur $\mathbb{C}^2$ de façon usuelle. On notera un élément générique de SU(2) $g = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $a,b\in\mathbb{C}$ et $|a|^2+|b|^2 = 1$, et on utilisera les coordonnées

$$a = \cos\theta\ e^{i\phi},\ b = \sin\theta\ e^{i\psi},\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi,\psi\le 2\pi,$$

dans lesquelles la mesure de Haar de SU(2) est $(2\pi)^{-2}\sin 2\theta\ d\theta\ d\phi\ d\psi$.

On sait que pour chaque entier $n\ge 1$, il existe une seule classe d'équivalence de représentations irréductibles de dimension n de SU(2). La décomposition centrale de $\mathcal{A}$ est donc $\mathcal{A} = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} M_n(\mathbb{C})$.

La représentation de dimension r+1 s'obtient comme produit symétrique de r représentations de dimension 2, plus précisément:

on considère sur $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$ le produit tensoriel de r représentations de base de SU(2); alors la restriction ϕ_r au sous-espace symétrique $(\mathbb{C}^2)^{\circ r}$ de cette représentation est une représentation irréductible de dimension r+1.

Dans $\mathbb{C}^2$, la base canonique est notée e_1,e_2, on en déduit dans $(\mathbb{C}^2)^{\circ r}$ une base orthonormale $(\varepsilon_k^r)_{0\le k\le r}$ donnée par:

$$\varepsilon_k^r = \begin{pmatrix} C_r^k \end{pmatrix}^{-1/2} \sum_{\substack{A\subseteq\{1,\dots,r\} \\ |A|=k}} e_A$$

avec $e_A = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \ldots \otimes e_{i_r}$ où $i_\alpha=1$ si $\alpha \in A$, $i_\alpha=2$ sinon.

Dans cette base, les coefficients de la représentation de dimension r+1 sont:

$$\kappa^r_{kl}(g) = \langle \phi_r(g)\varepsilon^r_k, \varepsilon^r_l \rangle = \langle \left(C^k_r\right)^{-1/2} \phi_r(g)\Big(\sum_{|A|=k} e_A\Big), \left(C^l_r\right)^{-1/2} \sum_{|A|=l} e_A \rangle =$$

$$= \left(C^k_r\, C^l_r\right)^{-1/2} \sum_{|A|=k} \sum_{|B|=l} a^{|A\cap B|} b^{|A\cap B^c|} \bar{a}^{|A^c\cap B^c|} (-\bar{b})^{|A^c\cap B|}$$

On considère sur l'algèbre $\mathcal{A}$ l'état ν donné par la matrice de densité $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ sur la composante $M_2(\mathbb{C})$ de la décomposition centrale, avec $p>q>0$, $p+q=1$.

J'ai montré [B2], [B3], que les exponentielles de $\hat{\mathcal{A}}$ sont en correspondance avec les éléments positifs de $SL(2,\mathbb{C})$ de la façon suivante:

Toute représentation irréductible de SU(2) se prolonge de façon unique en une représentation holomorphe de $SL(2,\mathbb{C})$, si α est un élément positif de $SL(2,\mathbb{C})$, alors l'élément de $\hat{\mathcal{A}}$ dont la composante dans chaque algèbre $M_n(\mathbb{C})$ est l'image de α par la représentation holomorphe correspondante est une exponentielle.

Le but de ce paragraphe est de trouver une suite de projecteurs minimaux Π_n correspondant à la "direction asymptotique" d'une exponentielle ν-harmonique.

On va faire ceci en deux étapes: tout d'abord, on va trouver une suite Π_n telle que $\lim_{n\to\infty} \mu(U(\Pi_n))^{-1}\, U(\Pi_n) = \lambda_e$ dans $\hat{\mathcal{A}}$, et on en déduira pour chaque exponentielle ν-harmonique f une suite Π^f_n telle que $\lim_{n\to\infty} \mu(U(\Pi^f_n))^{-1}\, U(\Pi^f_n) = f$ dans $\hat{\mathcal{A}}$.

Commençons par le cas de l'identité:

On note Π_r le projecteur minimal (de rang 1) de $\mathcal{A}$ donné par:

$$\Pi_r = \int_{SU(2)} \bar{a}^r\, \lambda_g\, dg$$

Π_r est dans la composante $M_{r+1}(\mathbb{C})$ de $\mathcal{A}$, et c'est le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par $e_1^{\circ r}$ dans $(\mathbb{C}^2)^{\circ r}$.

<u>**Théorème 1:**</u>

$\lim_{n\to\infty} \mu(U(\Pi_n))^{-1}\, U(\Pi_n) = id$ dans $\hat{\mathcal{A}}$

($\hat{\mathcal{A}}$ est munie de la topologie produit).

(ici μ est l'unique état porté par la composante $M_1(\mathbb{C})$ de $\mathcal{A}$).

preuve:

On a $U(\Pi_n) = \displaystyle\int_{SU(2)} \bar{a}^n\, (1-\varphi(g))^{-1}\, \lambda_g\, dg$

On va calculer la composante de $U(\Pi_n)$ sur $M_{r+1}(\mathbb{C})$, en calculant ses éléments matriciels dans la base $(\varepsilon^r_k)_{0\le k\le r}$.

La composante (k,l) de cette représentation dans la base $(\varepsilon^r_k)_{0\le k\le r}$ est donnée par:

$$\langle U(\Pi_n)\varepsilon^r_k, \varepsilon^r_l\rangle = \int_{SU(2)} \bar{a}^n \; (1-\varphi(g))^{-1} \; \kappa^r_{kl}(g) \; dg$$

$$= \int_{SU(2)} \bar{a}^n \; (1-\varphi(g))^{-1} \left(C^k_r \; C^l_r\right)^{-1/2} \sum_{|A|=k} \sum_{|B|=l} a^{|A\cap B|} b^{|A\cap B^c|} \bar{a}^{|A^c\cap B^c|} (-\bar{b})^{|A^c\cap B|} dg$$

Si $k\neq l$, $|A^c\cap B| \neq |A\cap B^c|$ donc la puissance de $e^{i\psi}$ dans tous les monomes de la somme est non nulle. Comme la variable ψ ne figure pas dans $\bar{a}$ ni dans $\varphi(g)$ = $pa + q\bar{a}$, en intégrant par rapport à ψ on voit que l'élément matriciel (k,l) de $U(\Pi_n)$ est nul, et par conséquent, seuls interviennent les éléments diagonaux. Un tel élément (k,k) vaut:

$$\int_{SU(2)} \bar{a}^n \; (1-\varphi(g))^{-1} \left(C^k_r\right)^{-1} \sum_{|A|=k} \sum_{|B|=k} a^{|A\cap B|} b^{|A\cap B^c|} \bar{a}^{|A^c\cap B^c|} (-\bar{b})^{|A^c\cap B|} dg =$$

Par symétrie, ceci vaut:

$$\int_{SU(2)} \bar{a}^n \; (1-\varphi(g))^{-1} \sum_{|A|=k} a^{|A\cap B|} b^{|A\cap B^c|} \bar{a}^{|A^c\cap B^c|} (-\bar{b})^{|A^c\cap B|} dg$$

avec $B = \{1,\dots,k\}$

Fixons $A\subseteq\{1,\dots,k\}$, et considérons le terme de la somme correspondant:

$$\int_{SU(2)} \bar{a}^n \; (1-\varphi(g))^{-1} \; a^{|A\cap B|} b^{|A\cap B^c|} \bar{a}^{|A^c\cap B^c|} (-\bar{b})^{|A^c\cap B|} \; dg =$$

$$(2\pi)^{-2} \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^n\theta \; e^{-in\phi} \; (1-\cos\theta(pe^{i\phi}+qe^{-i\phi}))^{-1} \; \cos^{|A\cap B|+|A^c\cap B^c|}\theta$$
$$e^{i(|A\cap B|-|A^c\cap B^c|)\phi} \; (-1)^{|A\cap B^c|} \sin^{2|A\cap B^c|}\theta \; \sin 2\theta \; d\theta \; d\phi \; d\psi$$

l'intégration en ψ élimine un facteur 2π, et l'intégrale en ϕ se calcule par la methode des résidus: il s'agit de calculer $\int_{\mathscr{C}} \frac{\bar{z}^{n+1}dz}{P(z)}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle unité et P est un polynome de degré 2.

On trouve:

$$(-1)^{|A\cap B^c|} \int_0^{\pi/2} \cos^{n+|A\cap B|+|A^c\cap B^c|}\theta \; \sin^{2|A\cap B^c|}\theta$$
$$\left(\frac{1-(1-4pq\;\cos^2\theta)^{1/2}}{2q\cos\theta}\right)^{n+|A^c\cap B^c|-|A\cap B|} \sin 2\theta \; d\theta$$

$$= 2(-1)^{|A\cap B^c|} \int_0^1 x^{n+1+|A\cap B|+|A^c\cap B^c|} \; (1-x^2)^{|A\cap B^c|}$$
$$\left(\frac{1-(1-4pqx^2)^{1/2}}{2qx}\right)^{n+|A^c\cap B^c|-|A\cap B|} dx$$

en posant $x=\cos\theta$

Une application de la méthode de Laplace à cette intégrale montre qu'un équivalent quand $n\to\infty$ en est $-2((q-p)/n)^{1+|A\cap B^c|}$. Par conséquent, un seul terme domine les autres, et correspond à A=B, ce qui donne comme équivalent de la somme: $2(p-q)/n$.

Comme $\mu(U(\Pi_n))$ est égal au terme correspondant à $A=B=\phi$, il est également équivalent à $2(p-q)/n$. Dans chaque sous-algèbre $M_{r+1}(\mathbb{C})$, la composante de $\mu(U(\Pi_n))^{-1}\, U(\Pi_n)$ converge vers $\mathrm{id}_{M_{r+1}(\mathbb{C})}$ donc, dans $\hat{\mathcal{A}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(U(\Pi_n))^{-1}\, U(\Pi_n) = \mathrm{id}.$$

Passons maintenant au cas où l'exponentielle f est ν-harmonique quelconque. Nous allons traiter ce cas par relativisation.

Soit f une telle exponentielle, on considère l'état $\nu(f^{1/2}.f^{1/2})$ sur $\mathcal{A}$. C'est l'état sur la composante $M_2(\mathbb{C})$ donné par la matrice $F^{1/2}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}F^{1/2}$ où F est la composante de f dans $M_2(\mathbb{C})$.

On vérifie aisément que le potentiel associé s'écrit $U_f = f^{-1/2}U(f^{1/2}.f^{1/2})f^{-1/2}$ (noter que f est une exponentielle, donc $f^{1/2}$ aussi).

La matrice $F^{1/2}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}F^{1/2}$ a une plus grande valeur propre et un vecteur propre e associé. Soit $\bar{\Pi}^f_n$ le projecteur minimal $\int \overline{\langle ge,e\rangle}^n \lambda_g\, dg$, alors d'après ce que l'on vient de voir, $\mu(U_f(\bar{\Pi}^f_n))^{-1}U_f(\bar{\Pi}^f_n)$ tend vers id dans $\hat{\mathcal{A}}$. $f^{1/2}\bar{\Pi}^f_n f^{1/2}$ est un élément positif de rang 1 de $M_{n+1}(\mathbb{C})$, donc c'est un multiple d'un projecteur minimal Π^f_n. De plus, comme la composante de f sur $M_1(\mathbb{C})$ est 1, $\mu(U_f(\bar{\Pi}^f_n)) = \mu(U(f^{1/2}\bar{\Pi}^f_n f^{1/2})$.

On a donc: $\mu(U(\Pi^f_n))^{-1}\, f^{-1/2}U(\Pi^f_n)f^{-1/2}\to$ id quand $n\to\infty$, ce qui implique que

Théorème2:

$\mu(U(\Pi^f_n))^{-1}\, U(\Pi^f_n) \to f$ dans $\mathcal{A}$ quand $n\to\infty$.

On a ainsi trouvé pour chaque exponentielle μ-harmonique f une "direction asymptotique" donnée par la suite de projecteurs minimaux Π^f_n.

Références:

[A-C] R.Azencott, P.Cartier: Martin boundary of random walks on locally compact groups, Proc. 6th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Proba. Vol 3, p. 87-129.

[Ba1] M.Babillot: Thèse de troisième cycle, Université Paris 7, 1985.

[Ba2] M.Babillot: Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes, Ann. I.H.P., 24, n°4, p.507-569, 1988.

[B1] P.Biane: Quantum random walks on the dual of SU(n), Probability theory and related fields, 89, p 117-129, 1991, Springer.

[B2] P.Biane: Equation de Choquet-Deny sur le dual d'un groupe compact, preprint, Paris 6, 1991.

[B3] P.Biane: Minuscule weights and random walks on lattices, à paraître dans proceedings of the QP conference in Delhi.

[C] P.Cartier: Fonctions harmoniques sur un arbre, Symposia Mathematica IX, p 203-270, 1972.

[De] J.Deny: Sur l'équation de convolution $\mu * \sigma = \mu$, Séminaire de théorie du potentiel, 4^e année, 1959-1960, n°5.

[Di] J.Dixmier: Les C^* algèbres et leurs représentations, Gauthiers Villars, 1958.

[Dy] E.B.Dynkin: Non negative eigenfunctions of the Laplace Beltrami operator and Brownian motion on certain symmetric spaces, AMS Translations, set 2, 72, p.203-228, 1968.

[M] P.A.Meyer: La frontière de Martin, Lecture notes in Mathematics, n°77 Springer, 1968.

[N-S] P.Ney, F.Spitzer: The Martin boundary of random walk, T.A.M.S. 121 pp 116-132, 1966.

[P] K.R.Parthasarathy: A generalized Biane's process, Séminaire de Probabilité n° XXIV, Lecture notes in Math. n° 1426 Springer, 1990.

[R] D.Revuz: Markov chains, second edition, North Holland, 1982.

[S] F.Spitzer: The explicit Martin boundary construction, Symposium on probability methods in analysis, Lecture Notes in Mathematics n°61, Springer, 1967