HACÈNE BOUTABIA
BERNARD MAISONNEUVE

Lois conditionnelles des excursions markoviennes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 162-166
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__162_0>

LOIS CONDITIONNELLES
DES EXCURSIONS MARKOVIENNES

par *Hacène BOUTABIA* [(1)] *et Bernard MAISONNEUVE* [(2)]

Getoor et Sharpe ont étudié dans [6] la loi de certaines excursions d'un processus de Markov, conditionnellement au reste de la trajectoire. Leurs résultats reposent sur des hypothèses fortes de dualité. Nous nous proposons de montrer que les propriétés d'indépendance conditionnelle observées dans [6] subsistent sans hypothèse de dualité et nous en donnons quelques variantes. Notre approche, fondée sur des grossissements élémentaires, a l'avantage de la simplicité et de la généralité, mais bien entendu, les hypothèses de [6] permettent d'aller plus loin dans l'étude des lois rencontrées (propriétés markoviennes, retournement). Ce travail est pour l'essentiel extrait de la thèse de troisième cycle du premier auteur [2].

1. Notations et préliminaires

Considérons un processus droit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ d'espace d'états E et un fermé de $]0, \infty[$ optionnel et homogène, noté M, tel que la v.a. $R = \inf M$ soit universellement mesurable. Les définitions et notations générales sont celles de [3], à ceci près que le cimetière δ est supposé dans E.

Dans ces conditions, il existe une mesure aléatoire B et un noyau $\widehat{P}$ de $(E, \mathcal{E}^*)$ dans $(\Omega, \mathcal{F}^*)$ constituant un système de sortie optionnel de M : pour toute loi $P = P^\mu$ on a ([8], [9]) :

$$E\Big[\sum_{s\in G} Z_s f(\theta_s)\Big] = E\int Z_s \widehat{P}^{X_s}(f) B(ds), \tag{1}$$

pour Z optionnel positif et f mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$. Ici G désigne l'ensemble des extrêmités gauches des intervalles contigus à M. On peut choisir B et $\widehat{P}$ de telle sorte que $\widehat{P}^x\{R = 0\} = 0$ et $\widehat{P}^x(1 - e^{-R}) \leqslant 1$ pour tout x.

A l'ensemble M on associe les v.a.

$$G_t = \sup\big(M \cap [0, t]\big), \ D_t = \inf\big(M \cap]t, \infty[\big).$$

Dans toute la suite, T est un temps aléatoire fixé. Pour simplifier l'écriture on pose (sans risque de confusion avec l'ensemble G)

$$G = G_T, \ D = D_T, \ L = D - G.$$

(1) Institut de Mathématiques, Université d'Annaba, Algérie
(2) IMSS, 47X, 38040 Grenoble

L'excursion chevauchant T est la v.a. $e = k_R \circ \theta_G$ à valeurs dans $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$, les opérateurs de meurtre (k_t) étant définis à l'aide du point cimetière δ. La v.a. L s'appelle longueur de l'excursion e.

Rappelons que la famille $(\mathcal{F}_{G_t})$ est une filtration [9] et que $\mathcal{F}_{G_t} \subset \mathcal{F}_t$. La filtration continue à droite associée sera notée $(\mathcal{A}_t)$. Si T est un t. d'a. de $(\mathcal{A}_t)$ on a la formule de conditionnement suivante ([9],[4]) :

(2) $$E[f(\theta_G)|\mathcal{A}_T](\omega) = \widehat{P}^x(f|R > a), \; x = X_G(\omega), \; a = T(\omega) - G(\omega)$$

pour presque tout $\omega \in \{G < T\}$. Ici comme dans la suite on utilise les conventions $\frac{0}{0} = 0, \frac{\infty}{\infty} = 0$. De plus, les valeurs infinies prises par T et R sont notées ∞ et $+\infty$ respectivement, en convenant que $\infty < +\infty$. On a donc $\{R > \infty\} = \{R = +\infty\}$.

Dans les paragraphes 2 et 3 le temps T sera un t. d'a. de $(\mathcal{A}_t)$ et dans le paragraphe 4, ce sera un temps terminal de la grosse filtration

$$\mathcal{R}_t = \mathcal{F}_{D_t}, \; t \geqslant 0.$$

2. Conditionnement par $(\mathcal{A}_T, D, \theta_D)$

Comme nous l'avons dit, T est ici un t. d'a. de $(\mathcal{A}_t)$. Puisque $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$ est un U-espace ([3], IV p. 147) et que la tribu $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ est séparable il résulte d'un lemme classique de Doob [5] qu'il existe une famille $(P^{x,\ell,y})$ de mesures sur $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$, $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ mesurable, telle que pour $(x, \ell, y) \in E \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times E$

(3) $$\widehat{P}^x(f|R = \ell, \; X_R = y) = P^{x,\ell,y}(f)$$

pour f mesurable $\geqslant 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$.

Voici un premier résultat de grossissement obtenu à partir de (2).

PROPOSITION. — *Sur* $\{G < T\}$ *on a*

(4) $$E[f(\theta_G)|\mathcal{A}_T, D, X_D] = P^{X_G, L, X_D}(f).$$

Comme $\mathcal{F}_G \subset \mathcal{A}_T$ ([9]), il résulte de cette formule que P^{X_G,L,X_D} apparaît comme la loi conditionnelle de θ_G par rapport à $(\mathcal{F}'_G, D, X_D)$ sur $\{G < T\}$, où $\mathcal{F}'_G$ est engendrée par $\mathcal{F}_G$ et $\{G < T\}$. Lorsque T est un t. d'a. de $\check{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{G_t}$, Pitman prétend dans [12] que $\check{\mathcal{F}}_T = \mathcal{F}_G$ (en particulier $\mathcal{F}'_G = \mathcal{F}_G$), mais nous n'avons pas compris son argument.

Démonstration. — Soient Z une v.a. $\geqslant 0$ $\mathcal{A}_T$-mesurable portée par $\{G < T\}$, g une fonction $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$-mesurable positive, U la v.a.(R, X_R). En utilisant successivement (2), (3) et (2) on obtient :

$$\begin{aligned} E[Z\, g(L, X_D) f(\theta_D)] &= \int P(d\omega) Z(\omega) \widehat{P}^x [g(U) f | R > a] \\ &= \int P(d\omega) Z(\omega) \widehat{P}^x [g(U) P^{x,U}(f) | R > a] \\ &= E[Z\, g(L, X_D) P^{X_G, L, X_D}(f)], \end{aligned}$$

ce qui établit (4).

COROLLAIRE. — *Dans les conditions précédentes on a*

$$E\big[f(e)|\mathcal{A}_T, D, \theta_D\big] = Q^{X_G, L, X_D}(f) \tag{5}$$

sur $\{G < T\}$, *où* $Q^{x,\ell,y} = k_R(P^{x,\ell,y})$. *Donc la loi de* e *conditionnée par* $(\mathcal{F}'_G, D, \theta_D)$ *est* Q^{X_G,L,X_D} *sur* $\{G < T\}$.

Démonstration. — En plus des notations Z, g précédentes, soit φ une fonction mesurable $\geqslant 0$ sur $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$. Comme $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t$, les temps T et D sont des $t.$ d'$a.$ de $(\mathcal{F}_t)$. D'après la propriété de Markov au temps D, puis d'après (4) on a

$$\begin{aligned} E\big[Z\ g(L)\varphi(\theta_D)f(e)\big] &= E\big[Z\ g(L)E^{X_D}(\varphi)f(e)\big] \\ &= E\big[Z\ g(L)E^{X_D}(\varphi)P^{X_G,L,X_D}(f \circ k_R)\big] \\ &= E\big[Z\ g(L)\varphi(\theta_D)Q^{X_G,L,X_D}(f)\big]. \end{aligned} \tag{6}$$

3. Conditionnement par $(\mathcal{A}_T, D, X_{D-}, \theta_D)$

Les limites à gauche sont prises dans un compactifié de Ray $\widehat{E}$ de E ([3], XVI). Nous définissons les mesures $P_{x,\ell,y}, (x,\ell,y) \in E \times \mathbf{R}_+ \times \widehat{E}$ en "posant" :

$$P_{x,\ell,y}(f) = \widehat{P}^x\big(f|R = \ell, X_{R-} = y\big). \tag{7}$$

Par le même raisonnement que pour (4) nous avons

$$E\big[f(\theta_G)|\mathcal{A}_T, D, X_{D-}\big] = P_{X_G,L,X_D}(f) \tag{8}$$

sur $\{G < T,\ L < \infty\}$.

Pour l'analogue de (5) nous supposerons que M s'écrit comme la fermeture dans $]0,\infty[$ d'un ensemble $\{t > 0,\ (X_{t-}, X_t) \in A\}$, où A est un borélien de $\widehat{E} \times \widehat{E}$ (sous les hypothèses de dualité de [6] on peut même écrire $M = \{t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in A\}$ d'après (4.5) de [6]). Quitte à remplacer A par $A' = A \cup \widehat{E} \times F$, où F est l'ensemble des points réguliers pour R, nous pouvons supposer que A est "admissible" au sens de Weil [13] c'est-à-dire que $(X_{R-}, X_R) \in A$ p.s. sur $\{0 < R < \infty\}$. D'après le théorème 1 de Weil [13] (voir [4] pour l'extension aux processus de Ray) il existe un noyau $\overline{P}$ de $\widehat{E}$ dans Ω tel que

$$P\big(f(\theta_R)|\mathcal{F}_{R-}\big) = \overline{P}^{X_{R-}}(f) \text{ sur } \{0 < R < \infty\}.$$

C'est la formule de conditionnement par rapport au passé strict. En appliquant ce résultat au processus (X_{T+t}) relativement à $(\mathcal{F}_{T+t})$ on obtient aussi

$$P\big(f(\theta_D)|\mathcal{F}_{D-}\big) = P^{X_{D-}}(f) \text{ sur } \{T < D < \infty\}, \tag{9}$$

donc en particulier sur $\{G < T\}$.

Voici maintenant l'extension annoncée d'un résultat de Getoor et Sharpe ([6], 7.6 viii).

PROPOSITION. — *Sur* $\{G < T,\ L < \infty\}$ *on a*

$$E\big[f(e)|\mathcal{A}_T, D, X_{D-}, \theta_D\big] = Q_{X_G,L,X_{D-}}(f), \tag{10}$$

où $Q_{x,\ell,y}$ est l'image de $P_{x,\ell,y}$ par k_R.

En particulier l'excursion e est conditionnellement indépendante de $\mathcal{F}'_G, D, \theta_D$ étant donné son état initial X_G, son état final X_{D-} et sa longueur L (sur $\{G < T,\ L < \infty\}$).

Démonstration. — Soient Z, g, φ comme dans la démonstration de (5); on suppose de plus Z portée par $\{G < T < \infty\}$ et g par $\mathbf{R}_+$. Comme $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{F}_T$ et que $G < T \Longrightarrow T < D$, Z est $\mathcal{F}_T$-mesurable et portée par $\{T < D\}$, donc $\mathcal{F}_{D-}$-mesurable ([3], IV 56). Les v.a. e et L sont également $\mathcal{F}_{D-}$-mesurables sur $\{T < D\}$. La démonstration se conduit alors comme celle de (5), en utilisant (9) à la place de la propriété de Markov en D, puis (8).

4. L'excursion chevauchant un temps terminal

T est maintenant un temps d'arrêt terminal parfait de $\mathcal{R}_t = \mathcal{F}_{D_t}$, universellement mesurable (dans [6] T est un temps terminal de $(\mathcal{F}_t)$ et c'est un temps d'entrée du processus (X_-, X) à cause de la dualité). La formule de base (2) doit alors être modifiée de la manière suivante. Nous supposerons que $P\{T \in M\} = 0$.

PROPOSITION. — *Sur l'ensemble $\{G < \infty\}$ on a*

(11) $$E[f(\theta_G)|\mathcal{F}_G] = \widehat{P}^{X_G}\{f|T < R\}.$$

En particulier, θ_G et $\mathcal{F}_G$ sont conditionnellement indépendantes, étant donné X_G.

Démonstration. — Soit Z optionnel $\geqslant 0$. On a

$$E[Z_G f(\theta_G), G < \infty] = E\Big[\sum_{s\in G} Z_s I_{\{s<D\}}(f I_C)(\theta_s)\Big],$$

où $C = \{T < R\}$. Comme $D = D_T$ est un t. d'a. de $(\mathcal{F}_t)$, le second membre s'écrit d'après (1)

$$E\int_{[0,D[} Z_s \widehat{P}^{X_s}(f|C) B(ds).$$

la fin de la démonstration est classique (*cf.* (13.4) de [6]).

Remarques

1) Lorsque T est un t. d'a. de $(\mathcal{F}_t)$ on peut remplacer D par T dans l'argument ci-dessus. On obtient alors la proposition (13.4) de [6] (la restriction $P\{T \in M\} = 0$ peut être levée en travaillant sur $\{G < T\}$ et en remplaçant $\mathcal{F}_G$ par $\mathcal{F}'_G$ dans (11)).

2) En particulier, pour $T = \inf\{t : D_t - t = a\}$, où $a > 0$, la condition $T < R$ s'écrit $R > a$ et la formule (11) est aussi une conséquence de (2), écrite pour $T = \inf\{s : s - G_s > a\}$. On peut aussi choisir T de la forme $T = \inf\{t : D_t - t = a, (X_t, X_{D_t}) \in C\}$.

THÉORÈME. — *Sur l'ensemble $\{G < \infty\}$ on a*

(12) $$E\big(f(\theta_G)|\mathcal{F}_G, D, X_D\big) = P^{X_G, L, X_D}(f|0 < T < R)$$

(13) $$E\big(f(e)|\mathcal{F}_G, D, \theta_D\big) = Q^{X_G, L, X_D}(f|\overline{C})$$

où $\overline{C} = k_R^{-1}\{T < R\}$ *(*$= \{T < \zeta\}$ *dans les cas usuels).*

Compte tenu de la convention $\frac{0}{0} = 0$, la formule (12) entraîne en particulier que $P^{X_G, L, X_D}(C) > 0$ p.s. sur $\{G < T\}$. Contentons nous de prouver cette propriété (le reste s'effectue comme au paragraphe 2). Soit $A = \{G < \infty\}$ et soit h l'indicatrice de $\{(x, \ell, y) : P^{x,\ell,y}(C) = 0\}$. D'après une extension immédiate de (10) et avec les notations de la démonstration de (4) on a

$$\begin{aligned} E\big[h(X_G, L, X_D), A\big] &= E\big[h\big(X_G, U(\theta_G)\big), A\big] \\ &= \int_A P(d\omega)\widehat{P}^x\big[h(x, U)|C\big] \qquad (x = X_G(\omega)) \\ &= \int_A P(d\omega)\frac{\widehat{P}^x\big[h(x, U)P^{x,U}(C)\big]}{\widehat{P}^x(C)} = 0. \end{aligned}$$

Les formules faisant intervenir X_{D-} se démontrent de la même manière et conduisent à une généralisation du théorème (13.7) de [6].

Remarque. — En utilisant le système de sortie $(\mathcal{F}_{D_t})$-prévisible de [7] (voir aussi [11] et [4], on peut remplacer dans tout ce qui précède $\mathcal{A}_t$ par $\overline{\mathcal{A}}_t = R_{G_t^-}$ et $X_G, \mathcal{F}_G$ par $X_{G-}, \mathcal{F}_{G-}$, à condition de restreindre les formules à l'ensemble $\{G < T, G$ non isolé dans $M\}$.

Reférences

[1] BENVENISTE A., JACOD J. — *Systèmes de Lévy des processus de Markov*, Invent. Math., **21** (1973), 183–198.

[2] BOUTABIA H. — *Thèse de troisième cycle, Grenoble*, 1985.

[3] DELLACHERIE C., MEYER P.A. — *Probabilités et Potentiel*, Hermann, I-IV, 1975, Hermann, XII-XVI, 1987.

[4] DELLACHERIE C., MAISONNEUVE B., MEYER P.A. — *Probabilités et Potentiel*, XVII-XXIV, à paraître.

[5] DOOB J.L. — *Stochastic Processes*, Wiley, New-York, 1953.

[6] GETOOR R.K., SHARPE M.J. — *Excursions of dual processes*, Advances in Math., **45** (1982), 259–309.

[7] KASPI M., MAISONNEUVE B. — *Predictable local lines and exit systems*, Sém. Prob. XX,LN, **1204** (1986), 95–100.

[8] MAISONNEUVE B. — *Exit systems*, Ann.Prob, 3 (1975), 399–411.

[9] MAISONNEUVE B. — *On the structure of certain excursions of Markov processes*, Z.W., **47** (1979), 61–67.

[10] MAISONNEUVE B. — *Strict past at arbitrary times*, Seminar on Stochastic Processes, 1985 Birkhäuser 1986.

[11] MAISONNEUVE B. — *Systèmes de sortie* $(\mathcal{F}_{D_t})$*-prévisibles*, Z.W., **80** (1989), 395–405.

[12] PITMAN J. — *Lévy systems and path decompositions*, Sem. Stoch. Proc., 1951 Birkhäuser 1952.

[13] WEIL M. — *Conditionnement par rapport au passé strict*, Sem. Prob. Strasbourg V, LN **191** (1971), 362–372.