SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC ARNAUDON
PIERRE MATHIEU

Appendice : « Décomposition en produit de deux browniens d'une martingale à valeurs dans un groupe muni d'une métrique bi-invariante »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 155-156
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__155_0>

Appendice : Décomposition en produit de deux browniens d'une martingale à valeurs dans un groupe muni d'une métrique bi-invariante

Marc Arnaudon et Pierre Mathieu

On suppose maintenant que le groupe de Lie G est muni d'une métrique riemannienne m telle que les translations à droite et les translations à gauche soient des isométries. Nous allons montrer que si X est une martingale, alors X s'écrit comme produit de deux browniens après un changement de temps, et dans une filtration éventuellement différente. Cependant, ceci ne veut pas dire que le produit de deux browniens est toujours une martingale.

Il vient immédiatement que $\nabla^L m = 0$ et $\nabla^R m = 0$, et par conséquent $\nabla^{\frac{1}{2}} m = 0$. Mais la connexion $\nabla^{\frac{1}{2}}$ est symétrique, donc c'est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique. Pour cette connexion, le développement d'une semi-martingale M de l'algèbre de Lie nulle en 0 est $X = e(M) = \varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$, d'après la proposition 8. En particulier, X est une martingale si et seulement si M est une martingale locale, et X est un mouvement brownien si et seulement si M est un mouvement brownien ([El 8.26]).

Si M est une semi-martingale à valeurs dans un espace vectoriel euclidien, sa variation quadratique sera le processus croissant $\sum_i < M^i, M^i >$, les M^i désignant les coordonnées de M dans une base orthonormale.

Proposition 1 *Soit $X = e(M)$ une martingale telle que la variation quadratique de M soit un processus croissant A de la forme $\int a\,dt$ avec a processus prévisible strictement inférieur à 4. On suppose qu'il existe un brownien à valeurs dans $\mathfrak{g}$ indépendant de M. Alors il existe deux browniens Y et Y' issus de e, tels que $X = YY'$.*

Remarques

Lorsque l'hypothèse sur la variation quadratique de M n'est pas satisfaite, on peut s'y ramener par changement de temps. Il n'y a pas unicité dans le choix de ce dernier.

Lorsque l'hypothèse d'existence d'un brownien à valeurs dans $\mathfrak{g}$ indépendant de M n'est pas satisfaite, on peut s'y ramener en grossissant Ω et la filtration au moyen d'un produit.

Démonstration de la proposition 1

La martingale X s'écrit $X = \varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$, ou encore $X = \varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(P)\varepsilon(-P)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$ pour toute semi-martingale P, ceci en vertu de l'égalité (13). nous allons chercher P afin que $\varepsilon(\frac{1}{2}M)\varepsilon'(P)$ et $\varepsilon(-P)\varepsilon'(\frac{1}{2}M)$ soient des mouvements browniens. Un calcul direct ou l'utilisation des formules (11) et (13) d'une part, (12) et (14) d'autre part nous permettent d'écrire

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}M\right)\varepsilon'(P) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,\delta\left(\frac{1}{2}M + P\right)\right)$$

et

$$\varepsilon(-P)\varepsilon'\left(\frac{1}{2}M\right) = \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,\delta\left(\frac{1}{2}M - P\right)\right).$$

Si nous choisissons P orthogonal à M et si nous utilisons la proposition 7 de la partie 2, les intégrales de Stratonovitch deviennent des intégrales d'Itô et les égalités deviennent

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}M\right)\varepsilon'(P) = \varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M + P\right)\right)$$

et

$$\varepsilon(-P)\varepsilon'\left(\frac{1}{2}M\right) = \varepsilon'\left(\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M - P\right)\right).$$

Puisque la métrique sur G est bi-invariante, les applications $\mathrm{Ad}(g)$ sont des isométries pour tout g dans G. Par conséquent, si $\frac{1}{2}M + P$ et $\frac{1}{2}M - P$ sont des browniens, les intégrales $\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M + P\right)$ et $\int \mathrm{Ad}\,(\varepsilon(-P))\,d\left(\frac{1}{2}M - P\right)$ seront aussi des browniens. La démonstration de la proposition sera terminée lorsque nous aurons établi les deux résultats suivants.

Proposition 2 *Sous les conditions de la proposition 1, il existe une martingale P orthogonale à M telle que $\frac{1}{2}M + P$ et $\frac{1}{2}M - P$ soient des mouvements browniens.*

Lemme 3 *Si N est un brownien de T_eG, alors $\varepsilon(N)$ et $\varepsilon'(N)$ sont des browniens de G.*

Démonstration de la proposition 2

Remarquons qu'il suffit de trouver P tel que $\frac{1}{2}M + P$ soit un brownien, et l'orthogonalité nous permettra d'affirmer que $\frac{1}{2}M - P$ est un brownien. Cherchons P de la forme $\int \sigma\, d\beta$ avec β brownien de T_eG indépendant de M et σ processus prévisible borné à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes de T_eG. Choisissons une base orthonormale de T_eG. La martingale $\frac{1}{2}M + P$ est un brownien si et seulement si sa matrice des crochets dans cette base est It, où I désigne la matrice identité. Soit $\mathcal{M}$ une version prévisible de la dérivée de la matrice des crochets de M par rapport à t. La dérivée de la matrice des crochets de $\frac{1}{2}M + P$ est $\frac{1}{4}\mathcal{M} + \sigma\sigma^*$, donc l'équation à résoudre est $\frac{1}{4}\mathcal{M} + \sigma\sigma^* = I$. Or l'hypothèse sur la variation quadratique de M impose à $I - \frac{1}{4}\mathcal{M}$ d'être une matrice définie positive. Elle a donc une racine carrée définie positive, et le processus $\sqrt{I - \dfrac{1}{4}\mathcal{M}}$ est prévisible et borné. Si nous choisissons σ égal à ce processus, cela résout l'équation posée plus haut et la démonstration de la proposition 2 est achevée.

Remarque

La décomposition de la proposition 2 n'est pas unique, ce qui entraîne que la décomposition de X en produit de deux browniens n'est pas unique non plus.

Démonstration du lemme 3

Il suffit d'établir le résultat avec $\varepsilon(N)$, car la démonstration pour $\varepsilon'(N)$ est identique. En utilisant la formule (1), nous pouvons écrire

$$\varepsilon(N) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right)\right)\,\delta N\right)\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right).$$

Or d'après les formules (12) et (14), on a

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right) = \varepsilon'\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right)\right)\,\delta N\right),$$

ce qui nous donne $\varepsilon(N) = e\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right)\right)\,\delta N\right)$. Par un raisonnement identique à celui de la proposition 7, nous pouvons remplacer l'intégrale de Stratonovitch vectorielle par une intégrale d'Itô et nous obtenons

$$\varepsilon(N) = e\left(\int \mathrm{Ad}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}N\right)\right)\,dN\right),$$

et comme les applications $\mathrm{Ad}(g)$ sont des isométries, la martingale $\varepsilon(N)$ est bien le développement d'un brownien de T_eG. Ceci achève la démonstration.

Référence :

[E1] : M. Emery : Stochastic Calculus in Manifolds, Springer Verlag 1989.