SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAOLO BALDI
M. SANZ

Une remarque sur la théorie des grandes déviations

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 345-348
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__345_0>

Une remarque sur la théorie des grandes déviations

P.Baldi M.Sanz

On considère la famille d'EDS

$$dX^\varepsilon_t = b(X^\varepsilon_t)\,dt + \varepsilon\sigma(X^\varepsilon_t)\,dB_t \qquad X^\varepsilon_0 = x \tag{1}$$

Le Lemme 1 ci-dessous donne une estimation du défaut de continuité du processus X^ε_t par rapport à la trajectoire brownienne. Il a été utilisé par R.Azencott ([1], voir aussi P.Priouret [3]) pour en déduire le Théorème 2, lequel fournit des estimations de grandes déviations pour le processus X^ε pour $\varepsilon \to 0$.

Dans cette note nous prouvons que le Lemme 1 est en effet équivalent au Théorème 2. Ceci va nous amener à donner un énoncé, dans un contexte général de grandes déviations.

Dans la suite nous supposons que B est un mouvement brownien k-dimensionnel.

(H) On dira que l'hypothèse (H) est satisfaite si les coefficients b et σ sont des champs de vecteurs et de matrices $m \times k$ respectivement sur $\mathbb{R}^m$ qui sont localement Lipschitziens.

Notons $\mathcal{C}_m = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^m)$ l'espace des trajectoires continues dans $[0,1]$ muni de la norme $\|\ \ \|_\infty$ et soit $\mathcal{H}_k$ le sous-espace de $\mathcal{C}_k$ des trajectoires f nulles en 0, absolument continues et telles que

$$\int_0^1 |f'_s|^2\,ds < \infty$$

pour toute $f \in \mathcal{H}_k$ soit $g \in \mathcal{C}_m$ la solution de

$$g'_t = b(g_t) + \sigma(g_t)f'(t) \qquad g_0 = x \tag{2}$$

Posons $g = S_x(f)$; soit Γ un ensemble borné dans $\mathcal{H}_k$; sous l'hypothèse (H) il est facile de vérifier (par une application du lemme de Gronwall) que l'application S_x est continue de Γ (muni de la norme $\|\ \ \|_\infty$) à valeurs dans $\mathcal{C}_m$. Notons pour $x \in \mathbb{R}^m$ fixé

$$|f|_1^2 = \int_0^1 |f'_s|^2\,ds$$

$$\lambda(g) = \inf \frac{1}{2}|f|_1^2$$

le inf étant pris sur toutes les fonctions f telles que $S_x(f) = g$; pour tout $A \subset \mathcal{C}_m$ posons

$$\Lambda(A) = \inf_{g\in A} \lambda(g)$$

On a alors ([1], [3])

Lemme 1. (Hypothèse (H)). *Soient $f \in \mathcal{H}_k$ et $g = S_x(f)$. Pour tout $\alpha > 0$ et $R > 0$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$*

$$\mathrm{P}\left\{\|X^\varepsilon - g\|_\infty \geq \alpha, \|\varepsilon B - f\|_\infty \leq \eta\right\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right) \tag{3}$$

De ce Lemme 1 il est classique ([1]) de déduire les estimations de grandes déviations (Ventsel-Freidlin) suivantes :

Théorème 2. (Hypothèse (H)). *On a*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \, \varepsilon^2 \log \mathrm{P}(X^\varepsilon \in F) \leq -\Lambda(F)$$
$$\underline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \, \varepsilon^2 \log \mathrm{P}(X^\varepsilon \in G) \geq -\Lambda(G)$$

pour tout sous-ensemble $F \subset \mathcal{C}_m$ fermé et tout $G \subset \mathcal{C}_m$ ouvert.

Dans la suite on montre que le Lemme 1 peut se déduire facilement du Théorème 2.

Considérons en effet la diffusion $Z_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon B_t \\ X_t^\varepsilon \end{pmatrix}$; Z^ε est solution de l'EDS

$$dZ_t^\varepsilon = \tilde{b}(Z_t^\varepsilon)\, dt + \varepsilon \tilde{\sigma}(Z_t^\varepsilon)\, d\mathrm{B}_t \qquad Z_0^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

où $\tilde{\sigma}(x) = \begin{pmatrix} I \\ \sigma(x) \end{pmatrix}$ est la matrice $(m+k) \times k$ que l'on obtient en superposant à $\sigma(x)$ la matrice identité $k \times k$ et $\tilde{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$. Si les coefficients b et σ vérifient l'hypothèse (H), alors le Théorème 2 s'applique à Z^ε car l'hypothèse (H) est satisfaite également pour les coefficients $\tilde{b}$ et $\tilde{\sigma}$.

Z^ε satisfait donc à des estimations de grandes déviations avec fonctionnelle d'action $\tilde{\lambda}$ donnée par

$$\tilde{\lambda}(\gamma) = \inf \frac{1}{2}|f|_1^2$$

le inf étant pris sur toutes les trajectoires $f \in \mathcal{H}_k$ telles que

$$\gamma_t' = \tilde{b}(\gamma_t) + \tilde{\sigma}(\gamma_t)\, f_t' \qquad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \tag{4}$$

Si on appelle $\tilde{S}(f)$ la solution de (4), on voit alors facilement que l'équation se decompose en deux systèmes, l'un portant sur les prémières k coordonnées et l'autre sur les m dernières ; donc $\tilde{S}(f) = \begin{pmatrix} f \\ S_x(f) \end{pmatrix}$, $S_x(f)$ étant la solution de (2). En particulier $\tilde{\lambda}(\gamma) < +\infty$ si et seulement si γ est de la forme $\begin{pmatrix} f \\ S_x(f) \end{pmatrix}$ et dans ce cas $\tilde{\lambda}(\gamma) = \frac{1}{2}|f|_1^2$.

Fixons maintenant $\alpha > 0$ et $R > 0$. Alors

$$\mathrm{P}\{\|X^\varepsilon - S_x(f)\|_\infty \geq \alpha, \|\varepsilon\mathrm{B} - f\|_\infty \leq \eta\} = \mathrm{P}\{Z^\varepsilon \in A\}$$

A_η étant l'ensemble de trajectoires

$$A_\eta = \left\{\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{k+m}\,;\ \|\gamma_1 - f\|_\infty \leq \eta, \|\gamma_2 - S_x(f)\|_\infty \geq \alpha\right\}$$

Comme l'application $f \to S_x(f)$ est continue de $B_R = \{f\,;\ \frac{1}{2}|f|_1^2 \leq 2R\} \cap \mathcal{C}_k$ à valeurs dans $\mathcal{C}_m$ par rapport à la norme $\|\ \ \|_\infty$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\gamma_1 \in B_R$ et $\|\gamma_1 - f\|_\infty \leq \eta$ alors $\|S_x(\gamma_1) - S_x(f)\|_\infty \leq \alpha$. Pour une telle valeur de η il n'existe donc aucune trajectoire $\gamma \in A_\eta$ telle que $\frac{1}{2}|\gamma_1|_1^2 \leq 2R$ et $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ S_x(\gamma_1)\end{pmatrix}$. Donc $\Lambda(A_\eta) \geq R$ et par le Théorème 2

$$\mathrm{P}\{\|X^\varepsilon - S_x(f)\|_\infty \geq \alpha, \|\varepsilon\mathrm{B} - f\|_\infty \leq \eta\} = \mathrm{P}\{Z^\varepsilon \in A\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

Remarquons que dans la démonstration que l'on vient de faire on n'a utilisé que le fait que l'application S_x est continue sur les bornés de $\mathcal{H}_k$. Ceci nous amène à donner une version abstraite de notre résultat. Soient $(E_i, d_i), i = 1,2$ deux espaces métriques séparables complets. On se donne deux familles $X_i^\varepsilon\ :\ (\Omega, \mathcal{A}, P) \to E_i, \varepsilon > 0, i = 1,2$ de variables aléatoires. Supposons que $\{X_1^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ satisfait à un principe de grandes déviations avec fonctionnelle d'action $\lambda\ :\ E_1 \to [0,+\infty]$. Supposons aussi qu'il existe une application $S\ :\ \{\lambda < +\infty\} \to E_2$ telle que sa restriction aux ensembles compacts $\{\lambda \leq a\}, a \in [0,+\infty[$ soit continue. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3. *Sous les conditions explicitées ci-dessus il y a équivalence entre*

a) La famille $\{(X_1^\varepsilon, X_2^\varepsilon), \varepsilon > 0\}$ *satisfait un principe de grandes déviations avec fonctionnelle d'action* $\tilde{\lambda}: E_1 \times E_2 \to [0,+\infty]$ *définie par*

$$\tilde{\lambda}(f,g) = \begin{cases} \lambda(f) & \text{si } g = S(f) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

b) pour tout $f \in E_1$ *tel que* $\lambda(f)$ *soit finie et pour tout* $R > 0$, $\alpha > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *et* $\varepsilon_0 > 0$ *tels que pour tout* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *on ait*

$$\mathrm{P}\{d_2(X_2^\varepsilon, S(f)) \geq \alpha, d_1(X_1^\varepsilon, f) \leq \eta\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

Démonstration. La preuve de a)$\Rightarrow$b) suit exactement le même schema que tout à l'heure.

Par contre si la propriété de quasi-continuité b) est satisfaite, considérons la distance d définie par $d((f,g),(f',g')) = d_1(f,f') + d_2(g,g')$, $f,f' \in E_1, g,g' \in E_2$. Si $Z^\varepsilon = (X_1^\varepsilon, X_2^\varepsilon)$ il est immédiat de vérifier que la propriété b) est aussi satisfaite pour le couple $Z^\varepsilon = (X_1^\varepsilon, X_2^\varepsilon)$. Plus précisement pour tout $f \in E_1$ tel que $\lambda(f)$ soit finie et pour tous $R > 0$, $\alpha > 0$ il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\mathrm{P}\{d(Z^\varepsilon, (f, S(f))) \geq \alpha, d_1(X_1^\varepsilon, f) \leq \eta\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

Il suffit maintenant d'appliquer la méthode classique de transport des estimations de grandes déviations (voir Azencott [1], mais aussi Doss-Priouret [2], paragraphe 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Azencott R. : *Grandes Deviations et applications*. In Ecole d'Eté de Probabilité de St.Flour VIII 1978, Lect. Notes Math. 774, Springer : Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[2] Doss H. Priouret P. : *Petites perturbations de systèmes dynamiques avec reflexion*. In Séminaire de Probabilités XVII, Lect. Notes Math. 986, Springer : Berlin-Heidelberg-New York, 351-370 (1982).

[3] Priouret P. : *Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques*. In Séminaire de Probabilités XVI, Lect. Notes Math. 920, Springer : Berlin-Heidelberg-New York (1982).

Paolo Baldi
Dipartimento di Matematica
Città Universitaria
Viale A.Doria 6
95125 Catania (Italy)

Marta Sanz
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
BARCELONA-7 (Espagne)