SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSEP LLUIS SOLÉ
FREDERIC UTZET

Intégrale multiple de Stratonovich pour le processus de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 270-283
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__270_0>

INTÉGRALE MULTIPLE DE STRATONOVICH POUR LE PROCESSUS DE POISSSON

par

Josep Lluis SOLÉ et Frederic UTZET

I.- INTRODUCTION

Dans "Un cours sur les intégrales stochastiques" ([7]) P.A. Meyer observe que pour définir l'intégrale multiple d'une fonction déterministe f par rapport à une semimartingale X on peut la considérer comme une intégrale itérée, et que l'idée d'Ito (pour les intégrales multiples browniennes) est d'intégrer seulement sur l'ensemble $\{0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ (et les ensembles correspondants aux permutations des x_i). Mais alors -dit Meyer- on laisse échapper des ensembles "diagonaux". En utilisant la formule de Kailath-Segall [13], il propose une définition qui ne néglige pas ces ensembles. Lorsqu'on intègre sur une diagonale simple: $\{0 \leq x_1 < \cdots < x_i = x_{i+1} < \cdots < x_n\}$, alors il faut intégrer par rapport à $d[X, X]$. Plus concrètement:

$$\int_{\{0 \leq x_1 < \cdots < x_i = x_{i+1} < \cdots < x_n\}} f(t_1, \ldots, t_n)\, dX_{t_1} \ldots dX_{t_n}$$

$$= \int_{\{0 \leq x_1 < \cdots < x_i < x_{i+2} < \cdots < x_n\}} f(t_1, \ldots t_i, t_i, \ldots, t_n)\, dX_{t_1} \ldots d[X, X]_{t_i} \ldots dX_{t_n}.$$

Intégrer sur une diagonale du type

$$\{0 \leq x_1 < \cdots < x_i = x_{i+1} < \cdots < x_j = x_{j+1} < \cdots < x_n\}$$

fait apparaître $d[X, X]_{t_i}\, d[X, X]_{t_j}$. Les coïncidences de trois éléments font intervenir $\sum_s (\Delta X_s)^3$, et ainsi de suite.

L'intégrale multiple pour le processus de Poisson est bien connue à partir d'Ito [4], Ogura [10], Kabanov [5], Engel [1], Surgailis [15], Segall-Kailath [13]. Il s'agit, comme dans la situation brownienne, d'une théorie dans $L^2(\Omega)$. Mais dans ce cas une définition par trajectoires est possible, intégrant sur l'ensemble des points avec toutes les coordonnées distinctes; voir Surgailis [15] et Kallenberg-Szulga [6]. On peut, finalement intégrer chaque trajectoire sur tout $\mathbb{R}_+^n$, mais alors l'intégrale multiple au sens de Stieltjes ne coïncide pas avec l'intégrale multiple d'Ito parce qu'il y manque tous les ensembles avec, au moins, deux coordonnées égales; ceci est étudié par Ruíz de Chávez [13] qui calcule explicitement les cas $n = 2$ et $n = 3$ pour des fonctions produit. Voir aussi Rosinski-Szulga [11] pour une autre approximation de l'intégrale double de Poisson sur tout le carré $[0, 1]^2$.

D'autre part, Hu-Meyer [2] définissent l'intégrale multiple de Stratonovich comme une intégrale de Stratonovich itérée. Alors ils raisonnent que cette intégrale est justement l'intégrale qui tient compte de toutes les diagonales. Dans le cas brownien, qui est le seul qu'ils étudient, $[X,X]_t = t$, et toutes les dégénérescences d'ordre strictement plus grand que 2 n'ont pas de contribution à cause de la continuité du mouvement brownien. Ils indiquent que si l'on veut définir des intégrales multiples pour le processus de Poisson, il faudrait considérer toutes les diagonales.

Dans cette note, nous essayons de définir l'intégrale multiple de Stratonovich $I_n^S(f)$ ($f \in L^2([0,1]^n)$) pour le processus de Poisson compensé comme une limite dans $L^2(\Omega)$. C'est la même définition que nous avons proposée pour le cas brownien [14], qui généralise l'intégrale de Stratonovich ordinaire (cf. Nualart-Pardoux [8], Nualart-Zakai [9]) et qui vérifie que si $f(x_1,\dots,x_n) = g(x_1)\cdot\ldots\cdot g(x_n)$, alors $I_n^S(f) = \left(I_1^S(g)\right)^n$, c'est-à-dire, dans ce cas on vérifie un théorème de Fubini ordinaire.

Pour calculer les intégrales sur les diagonales il faut considérer des expressions comme $f(x_1,x_1,x_3,\dots,x_n)$ pour $f \in L^2([0,1]^n)$ et alors il faut préciser quel est cet élément. Pour cela, nous introduisons la notion de *fonction bien définie sur une diagonale.* On peut alors trouver une formule de Hu-Meyer qui donne la relation entre l'intégrale multiple de Stratonovich et l'intégrale multiple d'Ito.

Enfin, pour le processus de Poisson compensé X on a $\sum_{s\le t}(\Delta X_s)^k = X_t + t$, $k \geq 1$, et alors on peut calculer toutes les intégrales sur les diagonales, en suivant les idées de Meyer citées au début. On obtient, bien sûr, la même formule. Il nous a paru intéressant d'expliquer comment on peut prouver à partir de cette formule la récurrence des polynômes de Charlier, pour suivre le même raisonnement que dans le cas de Wiener, où l'on retrouve les polynômes d'Hermite.

Signalons que nous avons considéré un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ parce que les notations sont déjà bien compliquées, mais il est clair que tout l'argument sert pour le processus de Poisson avec mesure d'intensité μ.

II.- NOTATIONS ET DEFINITIONS

Soit $\{N_t,\ t \in [0,1]\}$ un processus de Poisson de paramètre 1, défini sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$, et soit $X_t = N_t - t$ le processus compensé.

Considérons une partition de l'intervalle [0,1], $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = 1$. Nous écrirons Δ_i pour l'intervalle $(t_i,t_{i+1}]$ et $|\Delta_i| = |t_{i+1} - t_i|$. Nous appelerons *suite de raffinements* de [0,1] toute suite de partitions de [0,1], $\{\mathcal{P}_m,\ m \geq 1\}$, telle que $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_{m+1}$ et que le pas de la partition converge vers zéro quand $m \to \infty$. Etant donnée une fonction $f \in L^2([0,1]^n)$, et une partition $\mathcal{P}$ de [0,1], nous écrirons

$$S^{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i_1,\dots,i_n}\left(\frac{1}{|\Delta_{i_1}|\ldots|\Delta_{i_n}|}\int_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_n}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\right)X(\Delta_{i_1})\ldots X(\Delta_{i_n}).$$

Définition 1. Nous dirons qu'une fonction $f \in L^2([0,1]^n)$ est *intégrable au sens de Stratonovich* si pour toute suite de raffinements de [0,1], $\{\mathcal{P}_m,\ m \geq 1\}$, les variables aléatoires $S^{\mathcal{P}_m}(f)$ convergent dans $L^2(\Omega)$ vers une variable aléatoire qui est indépendante de la suite de raffinements. Nous noterons cette limite par $I_n^S(f)$.

Il faut noter que si f est intégrable Stratonovich et σ est une permutation de $1, 2, ..., n$, alors $f\circ\sigma$ est aussi intégrable Stratonovich, et $I_n^S(f) = I_n^S(f\circ\sigma)$. Alors si $\tilde{f}$ est la symétrisée de f en toutes ses variables, $I_n^S(f) = I_n^S(\tilde{f})$. Donc, nous considérerons seulement le cas où f est symétrique.

Etant donnés s nombres naturels (zéro compris), $k_1, \dots k_s$, tels que $k_1 + 2k_2 + \cdots + sk_s = n$, nous appelerons $(k_1, \dots, k_s)$-diagonale l'ensemble de points de $[0,1]^n$ avec k_2 coïncidences doubles, k_3 coincïdences triples, etc., c'est-à-dire, l'ensemble de points de la forme

$$(x_1, \dots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, x_{k_1+2}, \dots, x_{k_1+k_2}, x_{k_1+k_2}, \dots,\\ x_{k_1+k_2+\ldots+k_s}, \dots, x_{k_1+k_2+\ldots+k_s}),$$

(avec les conventions évidentes quand certains k_i sont nuls), ou un ensemble obtenu par permutation des x. Par abus de langage nous appelerons aussi $(n, 0, \dots, 0)$-diagonale l'ensemble de points avec toutes les coordonnées différentes. Le nombre de $(k_1, \dots, k_s)$-diagonales est

$$\frac{n!}{\prod_{r=1}^{s} (r!)^{k_r} k_r!}.$$

Nous dénoterons par Γ_n l'ensemble des $(k_1, \dots k_s)$, $1 \le s \le n$ telles que $\sum_{r=1}^{s} rk_r = n$.

Définition 2. Etant donnée une fonction $f \in \mathrm{L}^2([0,1]^n)$ symétrique, nous dirons qu'elle est *bien définie sur une* $(k_1, \dots, k_s)$*-diagonale* si pour toute suite de raffinements $\{\mathcal{P}_m,\ m \ge 1\}$, la limite suivante existe dans $\mathrm{L}^2([0,1]^{k_1+\cdots+k_s})$

$$\lim_m \sum_{\substack{i_1^{(1)},\dots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\dots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\dots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distincts}}} \Bigg(\frac{1}{|\Delta_{i_1^{(1)}}| \dots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}| |\Delta_{i_1^{(2)}}|^2 \dots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2 \dots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot \int_{\Delta_{i_1^{(1)}} \times \cdots \times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \Bigg)$$

$$\cdot \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(1)}}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}},$$

et la limite est indépendante de la suite des raffinements. Nous indiquerons cette limite par $D^{(k_1,\dots,k_s)} f$.

Remarques

1.- La fonction $D^{(k_1,\dots,k_s)}(f)$ n'est pas symétrique, mais on peut permuter les variables qui correspondent à des coïncidences du même ordre. Par exemple, pour $f(x, y, z, u, v) = xyzuv$, on a $\big(D^{(1,2)} f\big)(x, y, z) = xy^2z^2$.

2.- S'il y a un élément f^c dans la classe d'equivalence de f qui est continu, alors

$$D^{(k_1,\dots,k_s)}(f)(x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_s}) =$$
$$= f^c(x_1,\dots,x_{k_1},x_{k_1+1},x_{k_1+1},x_{k_1+2},x_{k_1+2},\dots,x_{k_1+k_2+\dots+k_s}), \quad \text{p.p.t.}$$

3.- Il est facile de voir que si f est bien définie sur une $(k_1,\dots,k_s)$-diagonale, alors

$$\lim_m \sum_{\substack{i_1^{(1)},\dots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\dots,i_{k_2}^{(2)} \\ \dots \\ i_1^{(s)},\dots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \left(\frac{1}{|\Delta_{i_1^{(1)}}|\dots|\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}||\Delta_{i_1^{(2)}}||\Delta_{i_2^{(2)}}|^2\dots|\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2\dots|\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s} \right.$$

$$\left. \cdot \int_{\Delta_{i_1^{(1)}}\times\cdots\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}\times\Delta^2_{i_1^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n \right)$$

$$\cdot \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(1)}}} \otimes\cdots\otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}} \otimes \hat{\mathbf{1}}_{\Delta_{i_1^{(2)}}} \otimes\cdots\otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}} \otimes\cdots\otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}},$$

(notez l'exposant 1 de $|\Delta_{i_1^{(2)}}|$ et que nous omettons l'indicateur $\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}}$) est convergente dans $\mathrm{L}^2([0,1]^{k_1+\dots+k_s-1})$ vers

$$\int_0^1 D^{(k_1,\dots,k_s)}(f)(x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_s})\,dx_{k_1+1}.$$

Le même résultat est vrai en intégrant n'importe quel groupe de variables.

4.- Le fait que f soit bien définie sur une diagonale implique que d'autres expressions similaires aux limites antérieures convergent vers zéro. Considérons un exemple bien simple: Soit $n=3$ et $k_1=k_2=0$, $k_3=1$. Supposons que f est bien définie sur cette diagonale, c'est-à-dire,

$$\sum_i \left(\frac{1}{|\Delta_i|^3}\int_{\Delta_i^3} f(r,s,t)\,drdsdt\right)\mathbf{1}_{\Delta_i} \xrightarrow{\mathrm{L}^2([0,1])} D^{(0,0,1)}f.$$

Alors

$$\sum_i \left(\frac{1}{|\Delta_i|^3}\int_{\Delta_i^3} f(r,s,t)\,drdsdt\right)\mathbf{1}_{\Delta_i^2} \xrightarrow{\mathrm{L}^2([0,1]^2)} 0.$$

(Voir la preuve générale plus bas). Et aussi

$$\sum_i \left(\frac{1}{|\Delta_i|^2}\int_{\Delta_i^3} f(r,s,t)\,drdsdt\right)\mathbf{1}_{\Delta_i} \xrightarrow{\mathrm{L}^2([0,1])} 0.$$

(C'est une conséquence facile de l'inégalité de Jensen.)

A partir de ces convergences on peut déduire la conséquence suivante: Soit $f \in L^2([0,1]^n)$ symétrique bien définie sur toutes les diagonales. Alors dans la définition 2 on peut prendre la somme sur tous les indices sans la condition qu'ils soient distincts. En effet, si nous supposons $i_1 = i_2$,

$$\int_{[0,1]^{k_1+\cdots+k_s}} \left(\sum_{\substack{i_2^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distincts}}} \left(\frac{1}{|\Delta_{i_2^{(1)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}||\Delta_{i_1^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s} \right.\right.$$

$$\cdot \left. \int_{\Delta^2_{i_2^{(1)}} \times\cdots\times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times\cdots\times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times\cdots\times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \right)$$

$$\left. \cdot \mathbf{1}_{\Delta^2_{i_2^{(1)}}} \otimes\cdots\otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}} \otimes\cdots\otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}} \otimes\cdots\otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}} (t_1,\ldots,t_{k_1+\cdots+k_s}) \right)^2 dt_1 \ldots dt_{k_1+\cdots+k_s} \tag{1}$$

$$= \sum \frac{1}{|\Delta_{i_2^{(1)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}||\Delta_{i_1^{(2)}}|^3 \ldots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^3 \ldots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^{2s-1}}$$

$$\cdot \left(\int_{\Delta^2_{i_2^{(1)}} \times\cdots\times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times\cdots\times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times\cdots\times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \right)^2$$

$$\leq \sup_i |\Delta_i| \sum \frac{1}{|\Delta_{i_2^{(1)}}|^3 \ldots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}||\Delta_{i_1^{(2)}}|^3 \ldots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^3 \ldots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^{2s-1}}$$

$$\cdot \left(\int_{\Delta^2_{i_2^{(1)}} \times\cdots \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times\cdots\times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times\cdots\times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \right)^2$$

$$= \sup_i |\Delta_i|\, F(m)\,,$$

et $F(m)$ converge vers $\|D^{(k_1-2,k_2+1,\ldots,k_s)} f\|^2$. Donc, (1) converge vers zéro. Tous les cas sont traités de la même façon.

III.- RELATION AVEC L'INTÉGRALE MULTIPLE D'ITO

Théorème. Soit $f \in L^2([0,1]^n)$ symétrique bien définie sur toutes les diagonales. Alors f est Stratonovich intégrable et nous avons la formule

$$I_n^S(f) = \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n} \frac{n!}{\prod_{r=1}^{s}(r!)^{k_r}k_r!}$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{k_2+\cdots+k_s} I_{k_1+\cdots+k_s-j}\Big(\int_{[0,1]^j}\Big(\sum_{\substack{l_1,\dots,l_j=k_1+1\\ l_1<\cdots<l_j}}^{k_1+\cdots+k_s} D^{(k_1,\dots,k_s)}f(x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_s})\Big)\,dx_{l_1}\dots dx_{l_j}\Big)\,.$$

Preuve:

1) Pour $\alpha \geq 2$,

$$I_1(\mathbf{1}_\Delta)^\alpha = \sum_{j=2}^{\alpha} R^{j,\alpha}(\Delta)\,I_j(\mathbf{1}_\Delta^{\otimes j}) + R^{1,\alpha}(\Delta)\,I_1(\mathbf{1}_\Delta) + |\Delta|\,R^{0,\alpha}(\Delta) + I_1(\mathbf{1}_\Delta) + |\Delta|\,,$$

où $R^{j,r}(\Delta)$ sont des polynômes en $|\Delta|$, et $R^{1,\alpha}$ et $R^{0,\alpha}$ n'ont pas de terme indépendant. Cela se démontre facilement par induction en utilisant la formule de Kabanov [5]:

$$I_n(h)\cdot I_1(g) = I_{n+1}(h\otimes g) + \sum_{j=1}^{n} I_n(h\times_{(j)} g) + \sum_{j=1}^{n} I_{n-1}(h *_{(j)} g)\,,$$

où

$$(h\times_{(j)} g)(x_1,\dots,x_n) = h(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)g(x_j)\,,$$

et

$$(h *_{(j)} g)(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n) = \int_{[0,1]} h(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)g(x_j)\,dx_j\,.$$

2) Pour $\alpha_1 \geq 2,\dots,\alpha_h \geq 2$, $i_1,\dots i_h$ distincts,

$$I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1}})^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_h}})^{\alpha_h} =$$

$$\prod_{j=1}^{h}\big(I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_j}}) + \Delta_{i_j}\big) + \sum_{j=0}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_h} \sum_{\substack{\beta_1=0,\dots,\alpha_1\\ \cdots\\ \beta_h=0,\dots,\alpha_h\\ \beta_1+\cdots\beta_h=j}} Q^{\beta_1,\dots,\beta_h}(\Delta_{i_1},\dots,\Delta_{i_h})I_j(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1}}^{\otimes\beta_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\Delta_{i_h}}^{\otimes\beta_h})$$

avec la convention $\mathbf{1}_\Delta^{\otimes 0} = 1$. On peut distinguer alors les classes suivantes de polynômes Q:

a) Toutes les β sont ≥ 1 et l'une au moins est ≥ 2.

b) Toutes les β sont égales à 1. Alors Q n'a pas de terme constant et donc, on peut écrire

$$|Q^{\beta_1,\dots,\beta_h}(\Delta_{i_1},\dots,\Delta_{i_h})| \leq \sup|\Delta|\,|\overline{Q}^{\beta_1,\dots,\beta_h}(\Delta_{i_1},\dots,\Delta_{i_h})|\,,$$

où $\overline{Q}$ est aussi un polynôme.

c) Il y a r bétas qui sont nuls et au moins un β est ≥ 2. Alors on peut aussi écrire

$$Q^{\beta_1,\dots,\beta_h}(\Delta_{i_1},\dots,\Delta_{i_h}) = |\Delta_{p_1}|\dots|\Delta_{p_r}|\,\overline{Q}^{\beta_1,\dots,\beta_h}(\Delta_{i_1},\dots,\Delta_{i_h}),$$

où $p_1,\dots,p_r$ correspondent aux indices avec $\beta = 0$, et $\overline{Q}$ est un polynôme.

d) Toutes les β sont zéro ou un. Alors on peut décomposer Q comme à c) mais, en plus, le polynôme $\overline{Q}$ n'a pas de terme constant. (Au moins un $\beta = 0$ pour le séparer du cas b).

3.- Développons l'expression de l'intégrale de Stratonovich suivant les coïncidences

$$\sum_{i_1,\dots,i_n}\left(\frac{1}{|\Delta_{i_1}|\dots|\Delta_{i_n}|}\int_{\Delta_{i_1}\times\dots\times\Delta_{i_n}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n\right)X(\Delta_{i_1})\dots X(\Delta_{i_n})$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n}\frac{n!}{\prod_{r=1}^{s}(r!)^{k_r}k_r!}$$

$$\cdot\Bigg(\sum_{\substack{i_1^{(1)},\dots,i_{k_1}^{(1)}\\ i_1^{(2)},\dots,i_{k_2}^{(2)}\\ \dots\\ i_1^{(s)},\dots,i_{k_s}^{(s)}\\ \text{distincts}}}\frac{1}{|\Delta_{i_1^{(1)}}|\dots|\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}|\,|\Delta_{i_1^{(2)}}|^2\dots|\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2\dots|\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot\int_{\Delta_{i_1^{(1)}}\times\dots\times\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}\times\Delta^2_{i_1^{(2)}}\times\dots\times\Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}}\times\dots\times\Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n\Bigg)$$

$$\cdot I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(1)}}})\dots I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}})I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}})^2\dots I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}})^2\dots I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}})^s\,.$$

Le point clé de la preuve est le fait que les puissances $I_1(\mathbf{1}_\Delta)^k$, $k \geq 2$ ont seulement une contribution de type $I_1(\mathbf{1}_\Delta) + \Delta$, qui est congruente avec $\sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^k = X_t + t$. (Surgailis [15, Proposition 3.1] utilise la même idée).

Fixons $(k_1, \ldots, k_s) \in \Gamma_n$. Alors

$$\sum_{\substack{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \Big(\frac{1}{|\Delta_{i_1^{(1)}}| \ldots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}| |\Delta_{i_1^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot \int_{\Delta_{i_1^{(1)}} \times \cdots \times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \Big)$$

$$\cdot I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(1)}}}) \ldots I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}}) I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}})^2 \ldots I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}})^2 \ldots I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}})^s$$

$$= \sum_{\substack{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \Big(\frac{1}{|\Delta_{i_1^{(1)}}| \ldots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}| |\Delta_{i_1^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot \int_{\Delta_{i_1^{(1)}} \times \cdots \times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \Big)$$

$$\cdot I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(1)}}}) \ldots I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}}) \big(I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}}) + \Delta_{i_1^{(2)}}\big) \ldots \big(I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}}) + \Delta_{i_{k_s}^{(s)}}\big)$$

$$+ \sum_{h=0}^{n-k_1} I_{k_1+h} \Big(\Big(\sum_{\substack{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \sum_{\substack{\beta(i_1^{(2)})=0,1,2 \\ \cdots \\ \beta(i_{k_s}^{(s)})=0,\ldots,s \\ \beta(i_1^{(2)})+\cdots+\beta(i_{k_s}^{(s)})=h}} \frac{Q^{\beta(i_1^{(2)}),\ldots,\beta(i_{k_s}^{(s)})}(\Delta_{i_1^{(2)}}, \ldots, \Delta_{i_{k_s}^{(s)}})}{|\Delta_{i_1^{(1)}}| \ldots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}| |\Delta_{i_1^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2 \ldots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot \int_{\Delta_{i_1^{(1)}} \times \cdots \times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \Big)$$

$$\cdot \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(1)}}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}^{(2)}}} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}}^{\otimes \beta(i_1^{(2)})} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}}^{\otimes \beta(i_{k_s}^{(s)})} \Big). \tag{2}$$

Nous allons voir que chaque terme de cette seconde somme converge vers zéro. Fixons $\beta(i_1^{(2)}),\ldots,\beta(i_{k_s}^{(s)})$.

A) Si nous sommes dans le cas a), alors

$$\int_{[0,1]^{k_1+h}} \Big(\sum_{\substack{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \frac{Q^{\beta(i_1^{(2)}),\ldots,\beta(i_{k_s}^{(s)})}(\Delta_{i_1^{(2)}},\ldots,\Delta_{i_{k_s}^{(s)}})}{|\Delta_{i_1^{(1)}}|\cdots|\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}||\Delta_{i_1^{(2)}}|^2\cdots|\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2\cdots|\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot\int_{\Delta_{i_1^{(1)}}\times\cdots\times\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}\times\Delta^2_{i_1^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n)$$

$$\cdot\mathbf{1}_{\Delta_{i_1}^{(1)}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}}^{(1)}}\otimes\mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}}^{\otimes\beta(i_1^{(2)})}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}}^{\otimes\beta(i_{k_s}^{(s)})}(y_1,\ldots,y_{k_1+h})\Big)^2\,dy_1\ldots dy_{k_1+h} \qquad (3)$$

$$\leq K \sum_{\substack{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \frac{1}{|\Delta_{i_1^{(1)}}|^2\ldots|\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}|^2|\Delta_{i_1^{(2)}}|^4\ldots|\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^4\ldots|\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^{2s}}$$

$$\cdot\Big(\int_{\Delta_{i_1^{(1)}}\times\cdots\times\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}\times\Delta^2_{i_1^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\Big)^2$$

$$\cdot|\Delta_{i_1^{(1)}}|\ldots|\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}||\Delta_{i_2^{(2)}}||\Delta_{i_1^{(2)}}|^{\beta(i_1^{(2)})}\ldots|\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^{\beta(i_{k_s}^{(s)})}$$

$$\leq K \sup_j |\Delta_{j_1}|^{\beta(j_1)-1}\ldots|\Delta_{j_r}|^{\beta(j_r)-1}$$

$$\cdot \sum_{\substack{i_1^{(1)},\ldots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\ldots,i_{k_2}^{(2)} \\ \cdots \\ i_1^{(s)},\ldots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \frac{1}{|\Delta_{i_1^{(1)}}|\ldots|\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}||\Delta_{i_1^{(2)}}|^3\ldots|\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^3\ldots|\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^{2s-1}}$$

$$\cdot\Big(\int_{\Delta_{i_1^{(1)}}\times\cdots\times\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}\times\Delta^2_{i_1^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}}\times\cdots\times\Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\Big)^2$$

$$= K \sup_j |\Delta_{j_1}|\ldots|\Delta_{j_r}|\cdot G(m)\,,$$

où K est une constante qui borne Q^2 et $j_1, \dots, j_r$ sont les indices avec $\beta \geq 2$, et $G(m) \to \|D^{(k_1,\dots,k_s)} f\|^2$ quand $m \to \infty$.

B) Pour le cas b) on a $|Q| \leq \sup |\Delta|\, |\overline{Q}|$, et on peut faire le même raisonnement.

C) Si nous sommes dans le cas c) et $p_1, \dots, p_r$ sont les indices avec $\beta = 0$, alors

$$(3) = \int_{[0,1]^{k_1+h}} \Bigg(\sum_{\substack{i_1^{(1)},\dots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\dots,i_{k_2}^{(2)} \\ \dots \\ i_1^{(s)},\dots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \frac{|\Delta_{p_1}| \dots |\Delta_{p_r}|\, \overline{Q}}{|\Delta_{i_1^{(1)}}| \dots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}| |\Delta_{i_1^{(2)}}|^2 \dots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2 \dots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot \int_{\Delta_{i_1^{(1)}} \times \cdots \times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \Big)$$

$$\cdot \mathbf{1}_{\Delta_{i_1}^{(1)}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}}^{(1)}} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}}^{\otimes \beta(i_1^{(2)})} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{1}}_{\Delta_{p_1}} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{1}}_{\Delta_{p_r}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}}^{\otimes \beta(i_{k_s}^{(s)})} (y_1, \dots, y_{k_1+h}) \Bigg)^2$$

$$\cdot dy_1 \dots dy_{k_1+h}$$

$$\leq \int_{[0,1]^{k_1+h+r}} \Bigg(\sum_{\substack{i_1^{(1)},\dots,i_{k_1}^{(1)} \\ i_1^{(2)},\dots,i_{k_2}^{(2)} \\ \dots \\ i_1^{(s)},\dots,i_{k_s}^{(s)} \\ \text{distints}}} \frac{\overline{Q}}{|\Delta_{i_1^{(1)}}| \dots |\Delta_{i_{k_1}^{(1)}}| |\Delta_{i_1^{(2)}}|^2 \dots |\Delta_{i_{k_2}^{(2)}}|^2 \dots |\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}|^s}$$

$$\cdot \int_{\Delta_{i_1^{(1)}} \times \cdots \times \Delta_{i_{k_1}^{(1)}} \times \Delta^2_{i_1^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^2_{i_{k_2}^{(2)}} \times \cdots \times \Delta^s_{i_{k_s}^{(s)}}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \Big)$$

$$\cdot \mathbf{1}_{\Delta_{i_1}^{(1)}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_1}}^{(1)}} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_1^{(2)}}}^{\otimes \beta(i_1^{(2)})} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{p_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{p_r}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i_{k_s}^{(s)}}}^{\otimes \beta(i_{k_s}^{(s)})} (y_1, \dots, y_{k_1+h+r}) \Bigg)^2$$

$$\cdot dy_1 \dots dy_{k_1+h+r} \cdot$$

et on peut appliquer un raisonnement comme dans A) parce qu'il y a au moins un $\beta \geq 2$.

D) Pour ce cas on fait apparaître les indicateurs qui manquent comme dans C), et on finit comme dans B).

En appliquant la remarque 3 après la définition 2, il est facile de voir que tous les autres termes de (2) convegent vers ceux qui donne le théorème. ∎

Remarques

1.-On peut utiliser la symétrie de $D^{(k_1,\dots,k_s)}f$ en les variables correspondant aux coïncidences de même ordre pour obtenir l'expression suivante:

$$I_n^S(f) = \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n} \frac{n!}{\prod_{r=1}^s (r!)^{k_r} k_r!}$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{k_2+\dots+k_s} I_{k_1+\dots k_s-j}\Big(\sum_{\substack{i_2=0,\dots,k_2 \\ \dots \\ i_s=0,\dots,k_s \\ i_2+\dots+i_s=j}} \binom{k_2}{i_2}\cdots\binom{k_s}{i_s}$$

$$\cdot \int_{[0,1]^j} D^{(k_1,\dots,k_s)} f(x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_s})\, dx_{k_1+1}\cdots dx_{k_1+i_2}$$

$$\cdot dx_{k_1+k_2+1}\dots dx_{k_1+k_2+i_3}\dots dx_{k_1+\dots+k_{s-1}+i_s}\Big),$$

avec les conventions évidentes quand certains i_r sont nuls.

2) Pour se servir de la formule donnée par ce théorème il faut écrire tous les éléments de Γ_n. Nous proposons ici une récurrence simple pour calculer les éléments de Γ_{n+1} à partir des éléments de Γ_n: On obtient les diagonales de $[0,1]^{n+1}$ en ajoutant une coordonnée aux diagonales de $[0,1]^n$. Alors tout élément $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ de Γ_n donne un element $(k_1+1, k_2, \dots, k_s)$ de Γ_{n+1}. Un élément $(1, k_2, k_3, \dots, k_s)$ de Γ_n, donne, en plus, un élément $(0, k_2+1, k_3, \dots, k_s)$ de Γ_{n+1}. L'élément $(0, 1, k_3, \dots, k_s)$ de Γ_n donne, en outre le premier indiqué avant, l'élément $(0, 0, k_3+1, \dots, k_s)$ de Γ_{n+1} , et ainsi successivement. On déduit de cette forme une énumération exhaustive de Γ_{n+1}: premièrement toutes les diagonales $(r_1, \dots, r_h)$ avec $r_1 \neq 0$, après $(0, r_2, \dots, r_h)$ avec $r_2 \neq 0$, etc.

IV.- UNE REMARQUE FINALE

Nous allons suivre l'indication de Meyer [7] de partager $[0,1]^n$ en diagonales et calculer les intégrales sur chaque zone, avec $(dX_t)^k = dX_t + dt$, $k \geq 2$. Nous abuserons de la notation $f(x_1, x_1, \dots)$ introduite à la remarque 2 après la définition 2. Aussi nous écrirons $\Lambda(k_1, \dots, k_s)$ pour dénoter une des $(k_1, \dots, k_s)$ diagonales de $[0,1]^n$.

$$I_n^S(f) = \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n} \Big(\int_{\Lambda(k_1,\dots,k_s)} f(x_1,\dots,x_n)\, dX(x_1)\dots dX(x_n)$$

$$+ \quad \text{les intégrales sur les autres} \quad (k_1,\dots,k_s) - \text{diagonales}\Big)$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n} \Big(\int_{[0,1]^{k_1+\dots+k_s}} f(x_1,\dots,x_{k_1},x_{k_1+1},x_{k_1+1},\dots,x_{k_1+\dots+k_s}) dX(x_1)\dots dX(x_{k_1})$$

$$\cdot \big(dX(x_{k_1+1}) + dx_{k_1+1}\big)\big(dX(x_{k_1+2}) + dx_{k_1+2}\big)\dots\big(dX(x_{k_1+\dots+k_s}) + dx_{k_1+\dots+k_s}\big)$$

$$+ \ \text{permutations}\Big)$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n} \Big(\sum_{j=0}^{k_2+\dots+k_s} \sum_{\substack{l_1,\dots,l_j=k_1+1 \\ l_1<\dots<l_j}}^{k_2+\dots+k_s} \int_{[0,1]^{k_1+\dots+k_s}} f(x_1,\dots,x_{k_1},x_{k_1+1},x_{k_1+1},\dots,x_{k_1+\dots+k_s})$$

$$\cdot dX(x_1)\dots dX(x_{k_1}) dX(x_{k_{1+1}}) dx_{l_1}\dots dx_{l_j}\dots \hat{d}X(x_{l_1})\dots \hat{d}X(x_{l_j})\dots dX(x_{k_1+\dots+k_s})$$

$$+ \ \text{permutations}\Big).$$

et on déduit la même formule que celle du théorème.

Pour finir nous allons prouver la récurrence des polynômes de Charlier à partir de cette formule. Il s'agit d'une application un peu artificielle parce que nous avons prouvé le théorème en utilisant la formule de Kabanov, qui est plus générale que cette récurrence. Mais nous aurions pu commencer à partir de ce paragraphe. Il est alors intéressant de montrer que la formule est cohérente avec ces polynômes.

Définissons récursivement les polynômes de Charlier

$$P_t^0 = 1,$$

$$P_t^n = \int_0^t P_{s-}^{n-1}\, dX_s, \quad n \geq 1.$$

Alors

$$P_t^n = \frac{1}{n!} I_n(1_{[0,t]}^{\otimes n}). \tag{4}$$

Nous allons prouver

$$(n+1)P_t^{n+1} = (X_t - n)P_t^n - tP_t^{n-1}, \tag{5}$$

qui est la récurrence des polynômes de Charlier (Kabanov [5]), et qui implique la récurrence de Kailath-Segall [13] pour ce cas.

Pour simplifier l'écriture nous mettrons I_j par $I_j(1_{[0,t]}^{\otimes j})$. Grâce à (4), (5) est équivalent à

$$I_n \cdot I_1 = I_{n+1} + nI_n + ntI_{n-1}. \tag{6}$$

D'autre part,

$$X_t^n = I_n^S(\mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes n}) = \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n} \frac{n!}{\prod_{r=1}^s (r!)^{k_r} k_r!} \sum_{j=0}^{k_2+\cdots+k_s} \binom{k_2+\cdots+k_s}{j} t^j I_{k_1+\cdots+k_s-j}\,. \quad (7)$$

Alors pour $n = 1$ la formule (6) est claire. Allons voir le pas de n a $n+1$. Nous avons

$$X_t^{n+1} = \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_{n+1}} \frac{(n+1)!}{\prod_{r=1}^s (r!)^{k_r} k_r!} \sum_{j=0}^{k_2+\cdots+k_s} \binom{k_2+\cdots+k_s}{j} t^j I_{k_1+\cdots+k_s-j}\,. \quad (8)$$

et pour la formule (7),

$$X_t^n X_t = I_n \cdot I_1 + \text{autres termes}\,. \quad (9)$$

En égalant ces deux expressions de X_t^{n+1} on obtient, en appliquant l'hypothèse d'induction pour $j < n$ le développement en chaos de $I_n \cdot I_1$. Toutes les intégrales qui interviennent ici sont des functions $\mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes j}$. Mais de l'unicité de la décomposition on déduit que $I_n \cdot I_1$ ne peut pas avoir de composante suivant à I_j pour $j = 0, \dots, n-2$. En effet, par l'hypothèse d'induction

$$E[(I_n \cdot I_1)\cdot I_j] = E[I_n(I_{j+1} + jI_j + jtI_{j-1})] = 0$$

Le coefficient de I_{n-1} est aussi facile à calculer

$$E[(I_n \cdot I_1)\cdot I_{n-1}] = E[I_n \cdot I_n] = n! \int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{[0,t]^n}(x)\,dx = ntE[I_{n-1}I_{n-1}].$$

Le coefficient de I_{n+1} est évidemment 1. Il reste à calculer le coefficient de I_n. Dans l'expression (8) l'unique contribution à I_n procède de la diagonale $(n-1,1)$ et elle a le coefficient $\frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!} = \frac{(n+1)n}{2}$. D'autre part à (7) il y a seulement un terme d'ordre $n-1$: c'est $\frac{n(n-1)}{2} I_{n-1}$. Par hypothèse d'induction nous avons dans la formule (9)

$$\frac{n(n-1)}{2}\big(I_n + (n-1)I_{n-1} + (n-1)tI_{n-2}\big)\,,$$

et cela sera l'unique contribution à I_n. Alors le coefficient de I_n dans le développement de $I_n \cdot I_1$ sera $\frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$.

RÉFÉRENCES

[1] D.D. ENGEL, The multiple stochastic integral. Mem. Am. Math. Soc., Vol 38, No 265 (1982).

[2] Y.Z. HU et P.A. MEYER, Sur les intégrales multiples de Stratonovich. Sém. Prob. XXII, Lect. Notes in Math. 1321, Springer-Verlag, 1988, pp. 72-81.

[3] K. ITO, Multiple Wiener Integral. J.Math. Soc. Japan, 3 (1951), pp. 157-164.

[4] K. ITO, Spectral type of the shift transformations of differential processes with stationary increments. Trans. Amer. Math. Soc., Vol 81 (1956), pp. 253-263.

[5] Y.M. KABANOV, On extended stochastic integrals. Th. Prob. App. 20 (1975), pp. 710-722.

[6] O. KALLENBERG and J. SZULGA, Multiple integration with respect to Poisson and Levy processes. Probability Theory and Rel. Fields 83 (1989), pp. 101-134.

[7] P.A. MEYER, Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob. X, Lect. Notes in Math. 511, Springer-Verlag, 1976, pp.245-400.

[8] D. NUALART and E. PARDOUX, Stochastic calculus with anticipating integrals. Probability Theory and Rel. Fields 78 (1988), pp. 535-581.

[9] D. NUALART and M. ZAKAI, On the relation between the Stratonovich and Ogawa integrals. Ann. Prob. Vol 17, No 4 (1989), pp. 1536-1540.

[10] H. OGURA, Orthogonal functionals of the Poisson process. IEEE Trans. Inf. Th. 18 (1972), pp. 473-481.

[11] J. ROSINSKI and J. SZULGA, Product random measures and double stochastic integrals. In, Martigale theory in harmonic analysis and Banach spaces. Lect. Notes in Math. 939, Springer-Verlag, 1982, pp. 181-199.

[12] J. RUIZ DE CHAVEZ, Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poissson. Sèm. Prob. XIX, Lect. Notes in Math. 1123, Springer-Verlag, 1985, pp. 230-241.

[13] A. SEGALL and T. KAILATH, Orthogonal functionals of independent increment processes. IEEE Trans. Inf. Th. 22 (1976), pp. 287-298.

[14] J.Ll. SOLÈ and F. UTZET, Stratonovich integral and trace. Stochastics and Stoc. Rep. 29 (1990), pp. 203-220.

[15] D. SURGAILIS, On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semigroups. Prob Math. Stat. 3 (1984), pp. 217-239.

Departament d'Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 Barcelona
Spain