SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Théorie non-linéaire du potentiel : un principe unifié de domination et du maximum et quelques applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__1_0>

Théorie non linéaire du potentiel : un principe unifié de domination et du maximum et quelques applications

par C. Dellacherie

Cet exposé n'est pas la suite promise de [3] : en gros, alors que dans [3] les générateurs étaient élémentaires et définis au moins sur les fonctions mesurables bornées, ici ce seront des opérateurs différentiels, définis naturellement sur des fonctions au moins continues. Nous sautons donc d'une théorie "en temps discret" à une théorie "en temps continu".

Nous nous donnons une fois pour toutes un espace localement compact à base dénombrable E qui, dans les applications, sera un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, éventuellement augmenté d'une partie de sa frontière. Nous allons démontrer de manière très simple, pour une classe d'opérateurs non nécesssairement linéaires définie de manière abstraite mais contenant, pour E dans $\mathbf{R}^n$, une large classe d'opérateurs différentiels elliptiques ou paraboliques, des extensions des théorèmes classiques suivants de la théorie linéaire du potentiel : principe du maximum pour les fonctions (sous)harmoniques, principe complet du maximum pour les potentiels, principe de domination entre un potentiel et une fonction excessive, unicité de la solution du problème de Dirichlet, croissance de cette solution avec la donnée frontière, croissance d'un potentiel avec la charge. Nous démontrerons aussi, dans notre cadre abstrait, des extensions des formes usuelles (Rolle, Lagrange, Cauchy) du théorème des accroissements finis sur $\mathbf{R}$, ce qui semble nouveau même dans le cas linéaire et nous permettra en particulier de retrouver la formule de Dynkin [4] pour approcher le générateur infinitésimal d'une diffusion.

I. Dériveurs sousmarkoviens

Comme dans [3] nous appelons *dériveur* toute application A d'une partie $\mathcal{D}$ de $\overline{\mathbf{R}}^E$ dans $\overline{\mathbf{R}}^E$ vérifiant le premier axiome de Mokobodzki [5] pour définir les opérateurs dérivants, à savoir

Axiome 1 (de dérivation) : *Pour tout $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $u \leq v$ on a $Au^x \geq Av^x$ en tout point $x \in E$ tel que $u^x = v^x$* (où f^x est une autre notation pour $f(x)$).

L'exemple élémentaire de dériveur A est $Au = u - Nu$ où N est une application croissante sur son domaine. Par ailleurs, il est clair que l'ensemble des dériveurs de même domaine $\mathcal{D}$ est stable pour de nombreuses opérations ponctuelles usuelles croissantes (sup. et inf. quelconques, sommes, mélanges quand cela a un sens, limites simples et donc limsup., liminf., etc.), et cela permet de construire de nombreux dériveurs à partir des dériveurs élémentaires. Par exemple si (P_t) est un semi-groupe markovien sur E, alors l'opposé $Au = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - P_t u)$ du générateur infinitésimal est sur son domaine un dériveur. En particulier, sur $\mathbf{R}$, $-d^+/dt$ (dérivée à droite) et d^-/dt (dérivée à gauche) sont des dériveurs ainsi donc que $-d/dt$ ou d/dt (dérivée bilatérale, qui donne lieu à une égalité dans l'axiome 1), sur leurs domaines de définition ; de même, $-d^2/dt^2$ (mais pas son opposé) est un dériveur sur son domaine. Plus généralement, sur $\mathbf{R}^n$, tout opérateur du premier ordre de la forme $Au^x = \Phi(\nabla u^x, u^x, x)$, où Φ est n'importe quelle fonction à $n+1+n$ variables et ∇u est le gradient de u, est un dériveur sur son domaine (vérifiant par ailleurs l'égalité dans l'axiome, c'est ce qui distingue le premier ordre du second ordre) et aussi tout opérateur du second ordre de la forme $Au^x = \Phi(-\Delta u^x, \nabla u^x, u^x, x)$ où Φ est n'importe quelle fonction de $1+n+1+n$ variables, *croissante en sa première*. De plus on peut remplacer le laplacien Δ par n'importe quel opérateur elliptique éventuellement dégénéré (en fait, l'axiome 1 est une abstraction non linéaire du principe du minimum pour les opérateurs elliptiques) ; nous verrons cela plus loin quand nous reviendrons sur la construction de certains dériveurs à partir de dériveurs élémentaires. Lorsqu'on regardera un opérateur différentiel A, on prendra garde que ses propriétés en tant que dériveur peuvent dépendre et de la partie E de $\mathbf{R}^n$ sur lequel il est considéré et de son domaine de définition $\mathcal{D}$ (voir quelques exemples à la fin du II) ; sauf mention du contraire, E est pris égal à $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{D}$ à l'ensemble des fonctions sur E de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ selon que A est du premier ou second ordre.

L'axiome de dérivation est insuffisant pour faire de la théorie du potentiel. En effet, on s'attend en gros à ce que, I étant l'identité, $pI + A$ admette, pour $p > 0$ et éventuellement $p = 0$, un inverse à droite croissant ; or, quand E est réduit à un point, et donc $\mathbf{R}^E$ identifié à $\mathbf{R}$, un dériveur est une fonction arbitraire sur (une partie de) $\mathbf{R}$ alors qu'elle doit être croissante si on veut son inverse croissant. Aussi distinguerons nous les dériveurs A vérifiant l'axiome suivant, qui sera affaibli plus tard en appendice :

Axiome 2 (de productivité) : *Pour tout* $u \in \mathcal{D}$ *et tout* $c \in \mathbf{R}_+$, *on a* $u \pm c \in \mathcal{D}$ *et* $A(u+c) \geq Au$.
Si A est linéaire, on retrouve une propriété familière (la fonction 1 est surharmonique) justifiant qu'un dériveur vérifiant cet axiome soit appelé par la suite un ***dériveur sousmarkovien***, et un dériveur ***markovien*** (resp. ***strictement sousmarkovien***) quand l'inégalité est toujours une égalité (resp. est toujours stricte), même si ces dénominations ne sont pas usitées dans le cas linéaire. Si on revient à l'exemple de dériveur $Au^x = \Phi(-\Delta u^x, \nabla u^x, u^x, x)$ sur $\mathbf{R}^n$, où Φ est n'importe quelle fonction de $1+n+1+n$ variables croissante en sa première, on voit que c'est un dériveur sousmarkovien (resp. markovien) dès que Φ est ***croissante*** (resp. ***constante***) ***en sa*** $1+n+1$***-ième variable***, celle dont u^x prend la place. Par ailleurs, si A est un dériveur sousmarkovien, alors $pI + A$ est un dériveur strictement sousmarkovien pour tout $p > 0$ (et on verra qu'il possède des inverses à droite croissants). Par exemple, pour $E = \mathbf{R}$, le dériveur $-u'' + u$ est strictement sousmarkovien et le dériveur $-|u'|u''$ markovien ainsi que $-u'' + u'^2$ et $-u'' - u'^2$ alors que le dériveur $-u'' - u$ n'est pas sousmarkovien et que $-u'u''$ n'est même pas un dériveur.

Les dériveurs markoviens les plus élémentaires sont ceux de la forme $A_y^\varphi u^x = \varphi(x, u^x - u^y)$ où y est fixé dans E et où $\varphi(x,t)$ est une fonction fixée sur $E \times \mathbf{R}$. Supposons u continue en x et $\varphi(x,t)$ continue en t, nulle pour $t = 0$. Laissons φ fixe et mélangeons (en oubliant l'indice φ) les A_y à l'aide d'un noyau markovien $M_r(x, dy)$ dépendant du paramètre réel r, d'où un dériveur markovien $A_r u^x = \int A_y u^x \, M_r(x, dy)$; supposons de plus que $M_r(x, dy)$ tende étroitement vers la mesure de Dirac ε_x quand r tend vers 0 si bien que $A_r u$ tend simplement vers 0. Nous allons identifier dans quelques cas particuliers le dériveur markovien $\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^p} A_r$, où p est un réel > 0, et obtenir ainsi des dériveurs markoviens "différentiels". Nous prenons $E = \mathbf{R}^n$, nous supposons que chaque mesure $M_r(x, dy)$ est l'image par homothétie de rapport r d'une probabilité μ^x portée par la sphère de centre x et rayon 1, et que les fonctions u considérées sont de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose de plus pour le moment que $\varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ en t, et on pose $\alpha^x = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0)$, $\beta^x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,0)$. Si m^x est le barycentre de la mesure μ^x, on a, en notant $< , >$ le produit scalaire,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} A_r u^x = \alpha^x < (x - m^x), \nabla u^x >$$

et on peut retrouver ainsi tous les opérateurs linéaires du premier ordre. Mais si pour chaque x le barycentre de μ^x est x tandis que V^x est sa variance (matrice symétrique positive), la limite précédente est nulle et

$$\lim_{r\to 0} \frac{2}{r^2} A_r u^x = -\alpha^x D u^x + \beta^x < \nabla u^x, V^x \nabla u^x >$$

où D est l'opérateur elliptique du second ordre admettant V^x comme matrice de forme quadratique en x, et on peut retrouver ainsi tous les opérateurs elliptiques linéaires purement du second ordre augmentés, si β n'est pas nul, d'un terme du premier ordre quadratique. En particulier, si $\varphi(x,t) = t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ et si μ^x est uniformément répartie sur la sphère unité de centre x, on obtient l'opérateur $-\Delta u + \|\nabla u\|^2$ (où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne), qui me semble remarquable même si je n'en ai pas trouvé trace dans les ouvrages que j'ai pu feuilleter (Bellman [2] fait cependant abondamment usage, en dimension 1, de l'équation de Riccati $-y' + y^2 = f$ associée à l'équation du second ordre $z'' - fz = 0$) ; noter que si on pose $w = e^{-u}$, l'équation aux dérivées partielles $-\Delta u + \|\nabla u\|^2 - f = 0$ se linéarise en $\Delta w - fw = 0$, et qu'il y a ainsi bijection entre les solutions de la première et les solutions strictement positives de la seconde. Nous terminons cette collection d'exemples en jetant un coup d'oeil sur le cas où, μ^x étant uniformément répartie sur sa sphère et p étant un réel ≥ 2, on prend pour $\varphi(x,t)$ la fonction impaire $\varphi_p(t) = |t|^{p-2}t$ (qui n'est pas de classe C^2 si p n'est pas un entier pair). Tout calcul fait, on trouve (du moins, je l'espère)

$$\lim_{r\to 0} \frac{2^p}{r^p} A_r u = -\operatorname{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne (ce qui donne, en dimension 1, $Au = -(p-1)|u'|^{p-2}u''$, et évidemment, en dimension quelconque, $Au = -\Delta u$ si $p = 2$). Contrairement à l'exemple précédent, celui-ci a été finement étudié ces vingt dernières années (pour $p \neq 2$) du point de vue de la théorie du potentiel par bon nombre de gens (cf [1]) au point où son étude est parfois appelée "la théorie non linéaire du potentiel" quand elle n'est pas appelée "la théorie L^p du potentiel".

II. UN PRINCIPE UNIFIÉ DE DOMINATION ET DU MAXIMUM

Nous nous donnons désormais sur E un dériveur sousmarkovien A de domaine $\mathcal{D}$ inclus dans l'ensemble C des fonctions continues sur E. La continuité va jouer un rôle très important dans ce qui suit. Soit (E_n) une suite croissante d'ouverts relativement compacts de E épuisant E. Pour $u, v \in C$ nous dirons par exemple que *u est majoré par v à la frontière* et nous écrirons "$u \leq v$ à l'∞" si $\lim_n \sup_{x\in E_n^c}(u-v)^+$ est nul (si E est compact, c'est toujours le cas par convention) ; de même, si H est une partie de E, nous dirons que *$(u-v)^+$ approche son maximum sur H ou sur la frontière* et nous écrirons "$(u-v)^+$ approche son maximum sur $H \cup \{\infty\}$" si $\sup_{x\in E}(u^x - v^x) = \lim_n \sup_{x\in H\cup E_n^c}(u^x - v^x)$ (si H est vide et E est compact, on convient que $(u-v)^+$ est nul sur $H\cup\{\infty\}$ et donc n'approche son maximum à l'∞ que si on a $u \leq v$).

Lemme. *Pour $u, v \in \mathcal{D}$, la fonction $(u-v)^+$ approche son maximum sur $\{Au \geq Av\} \cup \{\infty\}$, et sur $\{Au > Av\} \cup \{\infty\}$ si A est strictement sousmarkovien.*

Démonstration. Si $(u-v)^+$ n'approche pas son maximum à la frontière, il atteint son maximum $c > 0$ en un point ξ de E et on a alors

$$Av^\xi \leq A(v+c)^\xi \leq Au^\xi,$$

l'inégalité de droite provenant du fait qu'on a $u \leq v+c$ avec égalité en ξ et que A est un dériveur, et l'inégalité de gauche du fait que A est sousmarkovien. Enfin, l'inégalité de gauche est stricte si A est strictement sousmarkovien. Remarquer que, si A est markovien et "du premier ordre", les inégalités sont des égalités, et on a donc $Av^\xi = Au^\xi$, d'où une extension du théorème de Rolle en supposant que $u = v$ à l'∞, quitte à échanger u et v si on a $u \leq v$. On verra plus loin une extension du théorème de Rolle plus intéressante.

On devine qu'il est particulièrement avantageux de pouvoir dans l'énoncé du lemme remplacer $\{Au \geq Av\}$ par $\{Au > Av\}$, comme c'est le cas lorsque A est strictement sousmarkovien. Mais ce n'est pas toujours possible : si E est réduit à un point, et donc A identifié à une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, et si u et v appartiennent à un même palier de A, le remplacement n'est généralement pas possible, sauf évidemment si u est extrémité gauche et v extrémité droite du palier. Nous allons voir qu'une restriction de ce genre suffit dans le cas général.

Nous dirons que $u \in \mathcal{D}$ est *accessible à gauche* (resp. *à droite) pour* A si, pour tout compact K de E, il existe une suite (u_n) dans $\mathcal{D}$ convergeant uniformément vers u tel qu'on ait $Au_n < Au$

(resp. $Au_n > Au$) sur K. Remarquer que, du fait que A est sousmarkovien, on peut supposer de plus $u_n < u$ (resp. $u_n > u$) pour tout n, quitte à remplacer u_n par $u_n - \|u - u_n\|$ (resp. $u_n + \|u - u_n\|$) où $\|\cdot\|$ est la norme uniforme.

Théorème. *Pour tout $u, v \in \mathcal{D}$, $(u-v)^+$ approche son maximum sur $\{Au > Av\} \cup \{\infty\}$ dès que u est accessible à gauche ou v accessible à droite pour A.*

Démonstration. Supposons u accessible à gauche et que $M = \sup_{x\in E}(u^x - v^x)^+$ ne soit pas approché à l'∞. Soient $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait $u < M - \varepsilon$ à l'∞, puis K un compact tel qu'on ait encore $u < M - \varepsilon$ hors de K, et enfin (u_n) une suite dans $\mathcal{D}$ convergeant uniformément vers u et telle qu'on ait $Au_n < Au$ sur K. Pour n suffisamment grand, on a $\sup_{x\in E}|u^x - u_n^x| < \frac{\varepsilon}{3}$ et donc $\sup_{x\in E}(u_n^x - v^x)^+ > M - \frac{\varepsilon}{3}$ et $(u_n^x - v^x)^+ < M - \frac{2\varepsilon}{3}$ hors de K, si bien que $(u_n - v)^+$ ne peut approcher son maximum que sur K. Mais alors, d'après le lemme, $(u_n - v)^+$ approche son maximum sur $\{Au_n \geq Av\} \cap K$, qui est inclus dans $\{Au > Av\} \cap K$. Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers l'∞ pour conclure que $(u-v)^+$ approche son maximum M sur $\{Au > Av\} \cap K$. Le cas où v est accessible à droite se traite de même.

Nous dirons que A est un *honnête dériveur* si tout $u \in \mathcal{D}$ lui est accessible à gauche ou à droite. Tout dériveur strictement sousmarkovien, en particulier $pI + A$ pour $p > 0$, est honnête (prendre $u_n = u \pm \frac{1}{n}$). Par ailleurs, si A est honnête et si on pose, pour $u \in \mathcal{D}$, $Bu^x = \Psi(Au^x, u^x, x)$ où Ψ est une fonction sur $\mathbf{R}^2 \times E$ croissante en sa seconde variable et strictement croissante en sa première, alors B est un honnête dériveur sousmarkovien sur $\mathcal{D}$. Enfin, lorsque A est linéaire, A est honnête ssi, pour tout compact K, il existe $v \in \mathcal{D}$ borné, et ≥ 0 si on le souhaite, tel que $Av > 0$ sur K : c'est donc une condition très faible de transience vérifiée par exemple par le mouvement brownien sur $\mathbf{R}$ mais pas par la rotation uniforme sur le cercle.

Corollaire. *Si A est un honnête dériveur sousmarkovien, alors, pour tout $u, v \in \mathcal{D}$, la fonction $(u-v)^+$ approche son maximum sur $\{Au > Av\} \cup \{\infty\}$.*

Nous dirons par contre que A est *malhonnête* s'il existe $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $(u-v)^+$ n'approche pas son maximum sur $\{Au > Av\} \cup \{\infty\}$, ce qui est pire que de ne pas être honnête. Voyons quelques exemples sur $\mathbf{R}$ ou un intervalle de $\mathbf{R}$, en désignant par t la variable :

• $Au = u'$ est évidemment un dériveur markovien honnête tandis que $A_1 u = tAu = tu'$ n'est pas honnête, mais n'est pas malhonnête non plus ; par ailleurs, si on étend A_1 en A_2 en ajoutant au domaine de A_1 la fonction $|t| \pm c$ pour $c \in \mathbf{R}_+$ et en posant $A_2(|t| \pm c) = |t|$, alors A_2 est malhonnête (prendre $u = 1$ et $v = |t|$).

• $Au = u' + 2tu$ est un dériveur sur $\mathbf{R}$ mais n'est pas sousmarkovien, n'est même pas un dériveur sur $[0, +\infty[$ (à cause de la dérivée à droite en 0 : c'est $-u' + 2tu$ qui est un dériveur sousmarkovien), mais est un dériveur sousmarkovien honnête sur $]0, +\infty[$; par ailleurs, $A_1 u = tAu = tu' + 2t^2 u$ est un dériveur sousmarkovien sur $\mathbf{R}$, mais y est malhonnête (prendre $u = \exp(-t^2)$ et $v = 0$) alors qu'il est honnête et même strictement sousmarkovien sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

• $Au = -tu'' + 3u'$ n'est pas un dériveur sur $\mathbf{R}$, tandis que $A_1 u = tAu = -t^2 u'' + 3tu'$ en est un, markovien, mais malhonnête sur $\mathbf{R}$ (prendre $u = 1 - t^4$ et $v = 0$) alors qu'il est, comme ci-dessus, honnête sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

• $Au = -a(t)u'' + b(t)u + c(t)u$, où a, b, c sont des fonctions continues, a et c étant positives pour assurer que A est un dériveur sousmarkovien, est honnête ssi a, b, c ne s'annulent pas toutes en un même point (vérification laissée au lecteur).

• $Au = -u'' + \alpha(t)u'^2 + \beta(t)u'$, où α et β sont continues, et $Au = -|u'|^k u''$, avec $k \in \mathbf{R}_+$, sont des dériveurs markoviens honnêtes sur $\mathbf{R}$ (vérification laissée au lecteur).

III. Applications à la théorie du potentiel

Nous supposons désormais que notre dériveur sousmarkovien A est honnête (ou, plus généralement, qu'il n'est pas malhonnête), et rappelons que, par hypothèse, les fonctions du domaine $\mathcal{D}$ de A sont continues : ce que nous dirons n'ira pas au delà des fonctions continues.

Toutes les applications données ici sont des conséquences immédiates du corollaire précédent. Elles sont annoncées par quelques mots qui n'ont un sens défini et familier qu'en théorie linéaire du potentiel et qui donc nécessiteront quelques aménagements. En particulier, en non linéaire, il n'y a pas de décomposition de Riesz de $u \in \mathcal{D}$ en $v + w$ où $Av = 0$ (v est harmonique) et $w = 0$ à la frontière (w est un potentiel), et, pour étudier le problème de Dirichlet, il ne suffit pas de regarder le cas des fonctions harmoniques.

1) principe du maximum pour les fonctions (sous)harmoniques :
Ce qui remplace la donnée d'une fonction harmonique (resp. sousharmonique) est ici celle d'un couple $u, v \in \mathcal{D}$ tel que $Au = Av$ (resp. $Au \leq Av$). *Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $Au \leq Av$; le maximum de $(u-v)^+$ est approché à la frontière. En particulier, si on a $Au = Av$, le maximum de $|u-v|$ est approché à la frontière.* Comme A peut être "dégénéré", il se peut cependant que ce maximum soit aussi atteint dans E sans que u soit localement constante (prendre $E = \mathsf{R}^2$ et $A = \partial/\partial x$), et on n'a donc ici qu'un principe faible du maximum. J'ai découvert, en cours de rédaction de cet exposé, le livre [6] de Protter et Weinberger où c'est un principe fort du maximum qui est à la base de l'étude d'opérateurs différentiels linéaires ou non.

2) principe complet du maximum pour les potentiels :
Ce qui remplace la donnée d'un potentiel est ici celle d'un couple $u, v \in \mathcal{D}$ tel que $u = v$ à la frontière. Ceci dit, pour $u, v \in \mathcal{D}$ et $c \in \mathsf{R}_+$, on a $A(v+c) \geq A(v)$ et donc $\{Au > Av\} \supseteq \{Au > A(v+c)\}$. On en déduit : *Soient $c \in \mathsf{R}_+$ et $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $u = v$ à la frontière ; si on a $u \leq v + c$ sur $\{Au > Av\}$, alors on a $u \leq v + c$ sur E.* Ainsi, si $\mathcal{D}_o = \{u \in \mathcal{D} : u = u_o$ à $l'\infty\}$ avec $u_o \in \mathcal{D}$ fixé, l'inverse V_o de A, défini sur $A(\mathcal{D}_o)$, vérifie le principe complet du maximum.

3) principe de domination pour un potentiel et une fonction excessive :
Ce qui remplace la donnée d'un potentiel et d'une fonction excessive est ici celle d'un couple $u, v \in \mathcal{D}$ tel que $u \leq v$ à la frontière. *Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $u \leq v$ à la frontière ; si on a $u \leq v$ sur $\{Au > Av\}$, alors on a $u \leq v$ sur E.* Bien entendu, on retrouve le 2) comme cas particulier en utilisant le fait que A est sousmarkovien.

4) unicité de la solution du problème de Dirichlet :
Pour le moment, nous n'avons pas supposé que A est "local" et ne savons pas ce qu'est la restriction de A à un ouvert de E ; aussi nous ne considérons ici que la frontière de E lui-même. *Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $Au = Av$; si on a $u = v$ à la frontière, alors on a $u = v$ sur E.* Lorsqu'on a $E =]-\infty, b] \subseteq \mathsf{R}$ et Au de la forme $\pm u'(x) + \varphi(x, u(x))$ où φ est croissante en sa 2ème variable, on retrouve un théorème d'unicité dû à Peano.

5) croissance de cette solution avec la donnée frontière :
Il s'agit en fait d'un renforcement du résultat précédent. *Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $Au = Av$; si on a $u \leq v$ à la frontière, alors on a $u \leq v$ sur E.* En voici une variante. *Soient $p, u, v \in \mathcal{D}$ tels que $p \leq u$, $p \leq v$ et $Ap \leq Au \leq Av$; si on a $p = u$ à la frontière, alors on a $u \leq v$ sur E.* Lorsque A est linéaire et $p = 0$, on retrouve le fait qu'un potentiel est solution minimale d'une (in)équation de Poisson.

6) croissance d'un potentiel avec la charge :
Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $u = v$ à la frontière ; si on a $Au \leq Av$ sur E, alors on a $u \leq v$ sur E. En particulier, si on pose $\mathcal{D}_o = \{u \in \mathcal{D} : u = u_o$ à $l'\infty\}$ avec $u_o \in \mathcal{D}$ fixé, la restriction de A à $\mathcal{D}_o$ est injective et son inverse V_o, défini sur $A(\mathcal{D}_o)$, est croissant.

7) principes de monotonie et de stricte monotonie :
En fait, les propriétés 3), 4), 5), et 6), peuvent se regrouper en un seul énoncé que nous appellerons *principe de monotonie* (cette appellation n'a rien de classique). *Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels qu'on ait $u \leq v$ à la frontière et $Au \leq Av$ sur E ; alors on a $u \leq v$ sur E.* Voici une variante utile où les inégalités sur E sont strictes. *Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels qu'on ait $u \leq v$ à la frontière et $Au < Av$ sur E ; alors on a $u < v$ sur E.* En effet, on a $u \leq v$, et si on avait $u^x = v^x$ en un point $x \in E$, on y aurait $Au^x \geq Av^x$.

8) extension du théorème de Rolle :
Pour retrouver l'énoncé classique où $A = d/dt$ (ou plutôt $A = d^-/dt$) on prend E de la forme $]a,b] \subseteq \mathrm{R}$ avec $\{a\}$ pour frontière (penser au processus de translation à gauche). *Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $u = v$ à la frontière. S'il existe deux points (éventuellement confondus) x et y de E tels qu'on ait $u^x \leq v^x$ et $u^y \geq v^y$, alors il existe deux points (éventuellement confondus) ξ et η de E tels qu'on ait $Au^\xi \leq Av^\xi$ et $Au^\eta \geq Av^\eta$.* En effet, si de tels ξ et η n'existaient pas, on aurait soit $Au > Av$ soit $Au < Av$ sur E, et donc, d'après 7), soit $u > v$ soit $u < v$, ce qui est exclu par l'hypothèse. Bien entendu, si E est connexe et si Au et Av sont continus (ce qui, selon nos conventions, est vrai si A est un opérateur différentiel), on peut toujours s'arranger pour prendre η et ξ égaux.

IV. LE THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Nous supposons ici que A est un *dériveur local*, i.e. que, pour tout $x \in E$, on a $Au^x \geq Av^x$ pour $u, v \in \mathcal{D}$ tels que $u = v$ en x et $u \leq v$ dans un voisinage de x, ce qui est le cas si A est un opérateur différentiel. Le caractère local de A permet de manière évidente, et sans changer de notation, de restreindre A en un honnête dériveur sousmarkovien sur tout ouvert G de E; nous noterons $\mathcal{D}(G)$ le domaine de la restriction de A à G. Nous supposerons d'autre part que Au est continu pour tout $u \in \mathcal{D}(G)$ (quitte à restreindre $\mathcal{D}$) afin de disposer d'un énoncé simple de l'extension du théorème de Rolle sur tout domaine borné (i.e. ouvert connexe relativement compact) de E. Enfin nous noterons $\mathcal{C}(H)$ l'espace des fonctions continues sur $H \subseteq E$.

Soient G un domaine borné, f un élément de $\mathcal{C}(G)$ et φ un élément de $\mathcal{C}(\partial G)$. On dira que $u \in \mathcal{D}(G)$ est *solution du problème de Dirichlet (G,f,φ)*, et que ce dernier est *soluble*, si on a $Au = f$ et si u vaut φ à la frontière, i.e. si on a $\varphi^x = \lim_n u^{x_n}$ pour tout $x \in \partial G$ et toute suite (x_n) dans G convergeant vers x. D'après le point 4) ci-dessus, la solution u, si elle existe, est unique; pour f fixée, d'après les points 1) et 5), l'application $\varphi \mapsto u$ est sur son domaine une contraction croissante pour la norme uniforme. L'existence de la solution est une autre paire de manches : en général, elle n'existera pas parce que A est trop irrégulier, ou ∂G est trop irrégulière (ou encore la frontière topologique est mal adaptée au problème), ou G est trop grand et les "solutions" explosent avant d'avoir atteint ∂G (ce qui est souvent le cas en non linéaire; regarder $-u'' + u'^2 = f$, qui se ramène à $v'' - fv = 0$, $v > 0$, pour f constante négative), etc. Il n'est pas dans notre intention d'aborder ici ces problèmes épineux, mais évidemment fondamentaux. Nous les éviterons en les ignorant, i.e. en supposant qu'un problème est soluble quand nous en aurons besoin.

Nous allons d'abord étendre le théorème des accroissements finis sous la forme générale $\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}$ de Cauchy, mais en nous contentant du cas où A est linéaire, puis sous la forme plus restrictive et plus classique $\frac{u(b)-u(a)}{b-a} = \frac{u'(\xi)}{1}$ de Lagrange, mais dans le cas général.

1. Extension de la formule de Cauchy dans le cas linéaire

On suppose A linéaire et on se donne un domaine borné G et deux éléments u et v de $\mathcal{C}(G \cup \partial G)$ dont les restrictions à G, encore notées u et v, appartiennent à $\mathcal{D}(G)$. On suppose que Av ne s'annule pas dans G et que les problèmes de Dirichlet $(G, 0, u_{|\partial G})$ et $(G, 0, v_{|\partial G})$ sont solubles; on note $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ leurs solutions respectives. Choisissons un point x dans G tel que $v^x \neq \tilde{v}^x$, puis $\lambda \in \mathrm{R}$ tel que les fonctions $(u - \tilde{u})$ et $\lambda(v - \tilde{v})$, qui sont toutes deux nulles à la frontière, aient la même valeur en x, soit

$$\lambda = \frac{u^x - \tilde{u}^x}{v^x - \tilde{v}^x}.$$

En appliquant à ces deux fonctions l'extension du théorème de Rolle et en utilisant la linéarité de A, on obtient l'existence d'un $\xi \in G$ tel que

$$\frac{u^x - \tilde{u}^x}{v^x - \tilde{v}^x} = \frac{Au^\xi}{Av^\xi}.$$

C'est l'extension cherchée, qui va nous permettre de retrouver la formule de Dynkin [4] en prenant Av identique à 1 comme dans la formulation de Lagrange. Supposons que $-A$ soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fellerien (P_t) sur E auquel est associé le processus de Markov $(\Omega, X_t, (\mathcal{F}_t), (\mathbf{P}^x), \ldots)$. Donnons nous $u \in \mathcal{D}$ et supposons que les problèmes $(G, 0, u_{|\partial G})$ et $(G, 1, 0)$ soient solubles ; la solution du premier est $\tilde{u}$ et la solution p du second vérifie $Ap = 1$ dans E et $p = 0$ sur ∂G si bien que $\tilde{p} = 0$. Par ailleurs, du point de vue probabiliste, ces solutions s'écrivent, pour y parcourant G,

$$\tilde{u}^y = \mathbf{E}^y(u \circ X_T) \quad \text{et} \quad p^y = \mathbf{E}^y(T)$$

où T est le temps d'entrée dans G^c. Par conséquent, il existe $\xi \in G$ tel que

$$\frac{u^x - \mathbf{E}^x(u \circ X_T)}{\mathbf{E}^x(T)} = Au^\xi$$

et si maintenant on fait décroître l'ouvert G vers $\{x\}$, on trouve que le membre de gauche converge vers Au^x (le lecteur pourra vérifier que l'hypothèse "Au continue" n'est pas essentielle : comme dans le théorème de Dynkin, la continuité de Au en x suffit).

2. Extension de la formule de Lagrange dans le cas général

Nous allons généraliser ici la construction faite à propos de la formule de Dynkin. On se donne un domaine borné G et un élément u de $\mathcal{D}(G)$ prolongeable par continuité en un élément encore noté u de $\mathcal{C}(G \cup \partial G)$. On fixe $x \in G$ et on suppose qu'il existe $w \in \mathcal{D}(G)$, prolongeable par continuité en un élément encore noté w de $\mathcal{C}(G \cup \partial G)$, tel que Aw soit constant dans G et qu'on ait $w = u$ en x et sur ∂G (dans le cas linéaire ci-dessus, on a $w = \tilde{u} + \frac{u^x - \tilde{u}^x}{p^x} p$). Il résulte du principe de monotonie qu'un tel w est unique. Son existence résulte par exemple des hypothèses suivantes : $M = \sup_{x \in E} |Au^x|$ est fini, le problème de Dirichlet $(G, \lambda, u_{|\partial G})$ admet une solution w_λ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $|\lambda| \leq M$ (on a alors $w_{-M} \leq u \leq w_M$ d'après le principe de monotonie), et la fonction $\lambda \mapsto w_\lambda(x)$ est continue. On dira pour abréger, que *w est la corde en x de l'arc (u, G)*, ce qui mime la situation classique (prendre $G =]a, b]$, $\partial G = \{a\}$ et $x = b$ pour la retrouver) ; noter que la corde ne dépend de u que par l'intermédiaire de la restriction de u à $\partial G^r_x \cup \{x\}$. D'après l'extension du théorème de Rolle, il existe $\xi \in G$ tel que Au^ξ soit égal à la "pente" constante Aw, d'où une extension de la formule de Lagrange.

Voyons une application de cela : nous allons montrer, sous des hypothèses raisonnables, que A peut être approché par des dériveurs de structure plus simple. Supposons que nous ayons une distance sur E et que, pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, il existe un voisinage G^r_x qui soit un domaine borné de diamètre $< r$ et tel que l'arc (u, G^r_x) admette, pour tout $u \in \mathcal{D}$ (quitte à restreindre $\mathcal{D}$), une corde u^r_x en x, l'application $u \mapsto u^r_x$ étant continue pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(G^r_x \cup \partial G^r_x)$ (c'est le cas si A est linéaire). On peut alors, pour r fixé, définir une application A_r de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}^E$ en prenant pour valeur de $A_r u$ en x la valeur constante de Au^r_x dans G^r_x : on vérifie sans peine que A_r est un dériveur sousmarkovien continu pour la convergence uniforme, et est donc un producteur au sens de [3]. Et, quand on fait tendre r vers 0, $A_r u$ converge simplement vers Au d'après l'extension de la formule de Lagrange. On en déduit par exemple que, pour $u \in \mathcal{D}$, on a $Au \geq 0$ ssi on a $A_r u \geq 0$ pour tout $r > 0$, le "si" provenant de la convergence et le "seulement si" de l'extension de la formule de Lagrange (pour étudier $Au \geq f$ où f est une fonction, on remplacerait le dériveur $u \mapsto Au$ par le dériveur $u \mapsto Au - f$).

Lorsque A est linéaire, on voit que $A_r u^x = \varphi^x(u^x - Nu^x)$ où φ est une fonction > 0 et N est un noyau sousmarkovien, si bien que A_r est continu pour la convergence simple bornée ; il résulte alors de ce qui précède que, si (u_n) est une suite bornée dans $\mathcal{D}$ convergeant simplement vers un élément u de $\mathcal{D}$, on a $Au \geq 0$ dès qu'on a $Au_n \geq 0$ pour tout n. En général, je n'ai pas idée de la distance séparant pour les A_r la convergence uniforme de la convergence simple, mais en tout cas il n'y en a pas si E est un intervalle de $\mathbf{R}$ puisque la corde ne dépend de u que par l'intermédiaire du point choisi et de la frontière alors rudimentaire.

V. Appendice

En dehors du renforcement de l'accessibilité au II et de la preuve du principe complet du maximum au III, le seul endroit où a été utilisé directement le caractère sous-markovien du dériveur A dans l'exposé est la démonstration du lemme du II, dont nous recopions la majeure part pour plus de clarté.

Lemme. *Pour $u, v \in \mathcal{D}$, la fonction $(u-v)^+$ approche son maximum sur $\{Au \geq Av\} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration. Si $(u-v)^+$ n'approche pas son maximum à la frontière, alors il atteint son maximum $c > 0$ en un point ξ de E et on a alors

$$Av^\xi \leq A(v+c)^\xi \leq Au^\xi,$$

l'inégalité de droite provenant du fait qu'on a $u \leq v + c$ avec égalité en ξ et que A est un dériveur, et l'inégalité de gauche du fait que A est sousmarkovien.

On y a considéré l'application $t \mapsto v + t$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{D}$, qui croît continûment de 0 à $+\infty$, on s'est arrêté à l'instant $t = c$ où $v + t$ dépasse tout juste u si bien qu'on a un point ξ où utiliser l'axiome de dérivation, et on a profité du fait que, A étant sousmarkovien, on a $A(v+c) \geq Av$ pour conclure. Tout cela peut se généraliser aisément et utilement.

Nous ne supposons plus A sousmarkovien. Nous dirons qu'une application $\mathbf{v} : t \mapsto v_t$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{D}$ est une *A-progression issue de $v \in \mathcal{D}$* si

(1) $\mathbf{v}$ est croissante et continue pour la convergence uniforme

(2) $\mathbf{v}$ croît strictement au départ et s'éloigne à l'infini, uniformément :

$$\forall t > 0 \quad \inf_{x\in E}(v_t^x - v_0^x) > 0 \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} \inf_{x\in E}(v_t^x - v_0^x) = +\infty.$$

(3) on a $v = v_0$ et

$$\forall t \geq 0 \quad Av_t \geq Av$$

Dualement (au sens booléen), une application $\mathbf{w} : t \mapsto w_t$ de $\mathbf{R}_-$ dans $\mathcal{D}$ sera une *A-régression issue de v* si $-t \mapsto -w_t$ est une B-progression issue de v où B est défini sur $-\mathcal{D}$ par $Bu = -A(-u)$; l'usage de cette notion est généralement occulté par une clause du genre "le cas où...se traite de même". Enfin, nous dirons que le dériveur A est *productif* s'il vérifie l'axiome 2 reformulé comme suit, et alors identique à l'axiome 5 de [3]

Axiome 2 (de productivité) : *Il existe, pour tout $v \in \mathcal{D}$, une progression et une régression issues de v.*

Par exemple, pour $\alpha > 0$, le dériveur local $A = -u'' - \alpha^2 u$, qui n'est pas sousmarkovien, est productif (et honnête) sur l'intervalle $E =]-\ell/2, +\ell/2[$ ssi $\alpha\ell < \pi$ (vérification laissée au lecteur). L'interprétation probabiliste de cela est que, si T_ℓ est le temps d'entrée d'un mouvement brownien issu de 0 dans $]-\ell/2, +\ell/2[^c$, alors $\exp \alpha^2 T_\ell$ est intégrable ssi $\alpha\ell < \pi$. Autre exemple, non linéaire : le dériveur local sur $\mathbf{R}^2$ avec variables x, t

$$A = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

de l'équation de Burgers n'est pas sous-markovien mais est productif (et honnête) sur tout ouvert $U \times \mathbf{R}$ tel que U soit relativement compact.

Nous supposons désormais notre dériveur A productif. Soient alors $u, v \in \mathcal{D}$, et $\mathbf{v} = (v_t)$ une A-progression issue de v et posons

$$\tau = \inf\{t : v_t \geq u\} \leq +\infty.$$

Supposons d'abord τ fini, ce qui est le cas si $(u-v)^+$ est bornée d'après le second point de (2). On a alors $v_\tau \geq u$ et $\inf_{x\in E}(v_\tau^x - u^x) = 0$; si pour $H \subseteq E$ on a $\inf_{x\in H}(v_\tau^x - u^x) = 0$, on dira que *le $\mathbf{v}$-maximum* de $(u-v)^+$ *est approché sur H*, et *atteint* si cet inf est atteint sur H. Par ailleurs, si (u_n) dans $\mathcal{D}$ tend uniformément vers u et si $\tau_n = \inf\{t : v_t \geq u_n\}$, alors (τ_n) tend vers τ d'après le premier point de (2) ; on en déduit que le v-maximum de $(u-v)^+$ est approché sur $H \subseteq E$ dès que celui de $(u_n - v)^+$ l'est pour chaque n. Passons maintenant à la frontière. On dira que *le* v*-maximum* de $(u-v)^+$ *est approché à la frontière* si τ est infini ou si τ est fini et si on a $\lim_n \inf_{x \in E_n^c}(v_\tau^x - u^x) = 0$ où (E_n) est une suite d'ouverts relativement compacts épuisant E. La continuité uniforme de $t \mapsto v_t$ implique que le v-maximum de $(u-v)^+$ est atteint en un point ξ de E s'il n'est pas approché à la frontière ; et un tel point ξ appartient à $\{Au \geq Av\}$ du fait que A est un dériveur et v une A-progression issue de v. Ainsi, quitte à remplacer "maximum" par "v-maximum", on a étendu le lemme au cas où A est seulement productif. On peut alors, avec la même définition de l'accessibilité et donc de l'honnêteté, obtenir le théorème, son corollaire, et donc ses applications, à condition d'y lire tous les maximums comme relatifs à une certaine progression. Cela n'a pas d'incidence sur les points 3) à 8) de III qui ne font pas intervenir explicitement de maximum, mais cela en a une sur le point 1) et ses conséquences (par exemple, il est encore vrai que, pour f fixée, la solution du problème de Dirichlet (G, f, φ) croît avec φ, mais il n'est plus vrai que l'application correspondante est une contraction relativement à la norme uniforme), et sur le point 2) qu'on pourrait réécrire en remplaçant l'usage de $t \mapsto v+t$ par celui d'une A-progression issue de v.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS D.R. : Weighted nonlinear potential theory. Trans. Amer. Math. Soc. 297, 73-94, 1986.

[2] BELLMAN R. Methods of nonlinear analysis. Deux volumes. Academic Press, New York 1970.

[3] DELLACHERIE C. : Théorie des processus de production. Sém. Proba. XXIV, L.N.1426, 52-104, Springer 1990.

[4] DYNKIN E.B. : Infinitesimal operators of Markov processes. Theory of Proba. and its Appl. I, 34-54, 1956.

[5] MOKOBODZKI G. : Densité relative de deux potentiels comparables obtenue sans ultrafiltres rapides. Séminaire Choquet (Initiation à l'analyse) 8e année, 1968/69, I.H.P. Paris.

[6] PROTTER M.H., WEINBERGER H.F. : Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1967.

Claude DELLACHERIE
URA 1378, Université de Rouen
B.P. 118
76134 Mt St AIGNAN Cedex