JEAN JACOD

Régularité d'ordre quelconque pour un modèle statistique filtré

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 140-161
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__140_0>

REGULARITE D'ORDRE QUELCONQUE POUR UN MODELE STATISTIQUE FILTRE

Jean JACOD(*)

1 - INTRODUCTION

Dans cet article nous considérons un espace filtré $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ muni d'une famille $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ de probabilités (avec Θ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$) et d'un processus X qui, sous chaque P_θ, est une semimartingale de caractéristiques $\mathcal{T}^\theta=(B^\theta,C^\theta,\nu^\theta)$.

Supposons pour simplifier (dans l'introduction seulement) que les mesures P_θ soient toutes équivalentes entre elles. Soit Z^θ le processus densité de P_θ par rapport à P_0, et $\overline{Z}^\theta$ le processus obtenu par la "formule de Girsanov" basée sur $\mathcal{T}^\theta$ et $\mathcal{T}^0$: c'est-à-dire que $\overline{Z}^\theta = Z^\theta$ si les P_0-martingales possèdent la propriété de représentation par rapport à X; si ce n'est pas le cas, $\overline{Z}^\theta$ est une sorte de "projection" de Z^θ sur l'espace des martingales intégrales stochastiques par rapport à X (cf. plus bas pour une définition précise).

Dans [5] nous avons considéré la propriété suivante:

1.1 $\theta \to (Z^\theta)^{1/2}$ est différentiable en $\theta=0$, dans $L^2(P_0)$, et "localement uniformément" en temps

(la définition du terme "localement uniformément en temps" est rappelée plus bas), et la propriété analogue (notée $\overline{1.1}$) pour $\overline{Z}^\theta$. Nous avons notamment montré que $1.1 \Rightarrow \overline{1.1}$, et donné une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{1.1}$ soit réalisée, en termes des triplets $\mathcal{T}^\theta$. Dans [5], le choix des exposants dans 1.1 était motivé par des raisons statistiques: en effet, d'après Le Cam [6] ou Strasser [8] on sait que la différentiabilité dans L^2 de la racine carrée du rapport de vraisemblance est la propriété la plus faible possible qui permette d'obtenir la propriété de "normalité asymptotique locale" (qui joue un grand rôle dans les applications statistiques). Cette propriété s'appelle <u>régularité</u> du modèle statistique, d'où le titre de ce travail.

Toutefois, mathématiquement parlant la propriété 1.1 est arbitraire et peut naturellement être remplacée par:

(*) Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, Tour 56 (3ème étage), 4 Place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05.

1.2 $\theta \to (Z^\theta)^{1/r}$ est différentiable en $\theta=0$, dans $L^k(P_0)$, et "localement uniformément" en temps,

où k et r sont des réels vérifiant $1 \leq r \leq k$. Là encore, notons $\overline{1.2}$ la propriété analogue pour $\overline{Z}^\theta$. Outre 1.1 (qui correspond à $k=r=2$), les cas les plus simples et sans doute les plus intéressants sont $k=2$ et $r=1$ (1.2 est alors plus fort que 1.1), et surtout $k=r=1$ (1.2 est alors moins fort que 1.1).

L'objectif de ce travail est de résoudre les mêmes problèmes que dans [5], avec 1.1 remplacé par 1.2. D'une part, on donnera une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\overline{1.2}$ en terme des $\mathcal{T}^\theta$. D'autre part on verra que si $r \leq 2$, on a $1.2 \Rightarrow \overline{1.2}$ (nous ne savons pas si cette propriété est vraie pour $r>2$).

Il nous semble que ces problèmes présentent un certain intérêt par eux-mêmes; mais bien entendu la principale motivation est de nature statistique, et pour une discussion des applications statistiques possibles nous renvoyons à [4] et [5].

Le plan de ce travail est le suivant: le §2 est consacré aux notations et les résultats sont énoncés dans le §3. Le §4 est consacré à des résultats auxiliaires sur la convergence des exponentielles de Doléans. Les résultats principaux sont démontrés dans les deux derniers paragraphes.

2 - NOTATIONS ET RAPPELS

§2-a. Les notations de base. On part d'un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ avec $\mathcal{F}_0$ triviale. On le suppose muni d'une famille $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ de probabilités, où Θ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

On se donne aussi un processus q-dimensionnel $X=(X^i)_{i\leq q}$ càdlàg, et

2.1 $$\begin{cases} D = \{\Delta X \neq 0\}, \\ \mu(dt\times dx) = \sum_{s\in D} \varepsilon_{(s,\Delta X_s)}(dt\times dx) \quad (= \text{ mesure des sauts de } X). \end{cases}$$

On suppose que, sous chaque P_θ, X est une semimartingale de caractéristiques $\mathcal{T}^\theta = (B^\theta, C^\theta, \nu^\theta)$, relativement à une fonction de troncation fixée h (cf. [5]). On pose aussi

2.2 $$a_t^\theta = \nu^\theta(\{t\}\times\mathbb{R}^q).$$

Comme le point $\theta=0$ joue un rôle central, on écrit $P=P_0$, et aussi $B=B^0$, $C=C^0$, $\nu=\nu^0$, $a=a^0$.

Les notations sont celles usuelles en théorie générale ([1], [3]): $h\bullet Y$ (Y = semimartingale) et $W*\eta$ (η = mesure aléatoire) pour les processus intégrales stochastiques; Y^c (partie martingale continue de la semimartingale Y), $\langle Y,Y'\rangle$ et $[Y,Y']$, toutes ces notions étant relatives à la mesure $P=P_0$. On désigne par $\mathrm{Var}(Y)$ le processus variation de Y, lorsque ce dernier est à variation localement finie, et on pose $Y_t^* = \sup_{s\leq t}|Y_s|$.

La transposée d'une matrice A est notée A^T; les vecteurs sont des matrices colonnes.

Pour $p\in[1,\infty[$ on note $\mathcal{H}^p$ l'espace des P-martingale Y telles que $Y_\infty^*\in L^p(P)$, et $\mathcal{H}_0^p$ est l'espace des $Y\in\mathcal{H}^p$ avec $Y_0=0$. Soit $\mathcal{H}_{loc}^p$ et $\mathcal{H}_{0,loc}^p$ les classes localisées.

$\mathcal{P}$ désigne la tribu prévisible sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$, et sur $\tilde{\Omega} = \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^q$ on considère la tribu $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\otimes\mathcal{R}^q$. Soit la mesure $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-finie sur $(\tilde{\Omega},\mathcal{F}\otimes\mathcal{R}_+\otimes\mathcal{R}^q)$ définie par

2.3 $$M_\mu^P(W) = E(W*\mu_\infty) = E(\sum_{s\in D} W(s,\Delta X_s)).$$

A toute fonction W sur $\tilde{\Omega}$ on associe le processus

2.4 $$\hat{W}_t = \int_{\mathbb{R}^q} W(t,x)\nu(\{t\}\times dx) \quad (= +\infty \text{ si l'intégrale n'existe pas}).$$

On considère une factorisation

2.5 $C^{ij} = c^{ij}\bullet F$ P-p.s., où F est croissant continu adapté, et $c=(c^{ij})_{i,j\leq q}$ est prévisible, à valeurs dans l'espace des matrices symétriques $q\times q$ nonnégatives.

Rappelons ([3], chapitre III) que toute martingale locale M admet une <u>projection sur</u> X, notée $\bar{M}$, et caractérisée ainsi:

2.6 $\bar{M} = \beta^T\bullet X^c + U*(\mu-\nu)$, où β est prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, U est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable à valeurs réelles, les deux intégrales stochastiques ci-dessus étant bien définies, et $\langle\bar{M}^c,X^{i,c}\rangle = \langle M^c,X^{i,c}\rangle$, et $M_\mu^P(\Delta\bar{M}|\tilde{\mathcal{P}}) = M_\mu^P(\Delta M|\tilde{\mathcal{P}})$.

On utilisera aussi les propriétés suivantes, qui caractérisent β et U ci-dessus:

2.7 $$(c\beta)^i\bullet F = \langle M^c,X^{i,c}\rangle, \qquad U = W + \frac{\hat{W}}{1-a} \quad \text{avec} \quad W = M_\mu^P(\Delta M|\tilde{\mathcal{P}})$$

(on sait que $a=1 \Rightarrow \hat{W}=0$, et on convient que $0/0 = 0$). Si $M\in\mathcal{H}_{loc}^p$ et si $p=2$, il est bien connu que $\bar{M}\in\mathcal{H}_{0,loc}^p$, et on démontrera plus loin (en 6.8) qu'il en est de même pour p quelconque dans $[1,\infty[$.

Introduisons maintenant quelques notations spécifiques à ce travail. D'abord, 2.8 $\mathcal{K}$ est l'ensemble des triplets (k,r,s) de réels, vérifiant $1\leq r\leq k$ et $1\leq s$.

On définit une relation d'ordre partiel $\prec$ sur $\mathcal{K}$ en posant:

2.9 $(k,r,s) \prec (k',r',s')$ si $s \leq s'$ et $k \leq k'(1\wedge\frac{r}{r'})$.

Ensuite, soit

2.10 τ est l'ensemble des termes $(u_n,\theta_n,\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\theta_n\in\Theta\backslash\{0\}$, $u_n = |\theta_n|$, $u_n \to 0$ et $\theta_n/u_n \to \theta$.

2.11 $\mathfrak{Q}$ est l'ensemble des familles $(T_p,T(n,p))_{n,p\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt vérifiant $T(n,p) \leq T_p \leq p$, $T_p\uparrow\infty$ P-p.s., et $\lim_n P(T(n,p)<T_p) = 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

2.12 On écrit $Y^n \xrightarrow{loc} 0$ pour une suite (Y^n) de processus s'il existe une famille $(T_p,T(n,p))$ de $\mathfrak{Q}$ telle que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on ait $(Y^n)^*_{T(n,p)} \to 0$ dans $L^1(P)$ quand $n\uparrow\infty$.

D'après [5], 5.5, on a:

2.13 Si les Y^n sont des processus prévisibles croissants positifs on a $Y^n \xrightarrow{loc} 0$ si et seulement si $Y^n_t \xrightarrow{P} 0$ pour tout $t>0$.

§2-b. Vraisemblance et vraisemblance partielle. Notons d'abord Z^θ le processus densité de P_θ par rapport à $P=P_0$. C'est une P-surmartingale positive vérifiant $Z^\theta_0=1$ (car $\mathcal{F}_0$ est triviale), admettant la décomposition de Doob-Meyer:

2.14 $Z^\theta = 1+M^\theta-A^\theta$, où $M^\theta\in\mathcal{M}^1_{0,loc}$ et A^θ est croissant prévisible avec $A^\theta_0=0$.

Rappelons ensuite comment on construit la vraisemblance partielle, c'est-à-dire le processus $\overline{Z}^\theta$ de l'introduction. Pour cela, nous suivons [5]. Fixons $\theta\in\Theta$.

D'abord, on considère une décomposition de Lebesgue:

2.15 $\nu^\theta = Y^\theta\bullet\nu + \nu'^\theta$ P-p.s., où Y^θ est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable positive, et ν'^θ et ν sont étrangères

(le P-p.s. ci-dessus vient de ce qu'on veut la $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurabilité pour Y^θ). Soit alors

2.16 $$\begin{cases} G^\theta = (\sqrt{Y^\theta} - 1)^2 * \nu + 1*\nu'^\theta + \sum_{s\leq .}(\sqrt{1-a^\theta_s} - \sqrt{1-a_s})^2, \\ \Sigma^\theta_1 = \{G^\theta<\infty\}. \end{cases}$$

h étant la fonction de troncation servant à définir les B^θ (et commune à tous les θ), les processus $(Y^\theta-1)h*\nu$ et $h*\nu'^\theta$ sont bien définis sur Σ_1^θ (rappelons que h est bornée, égale à l'identité sur un voisinage de 0, et que $(1\wedge|x|^2)*\nu_t < \infty$). On a donc, sur Σ_1^θ, une unique décomposition de la forme (cf. 2.5 pour c et F):

2.17 $\quad B^\theta - B - (Y^\theta-1)h*\nu - h*\nu'^\theta \;=\; (c\beta^\theta)\bullet F + \tilde\beta^\theta\bullet F + F'^\theta \qquad P\text{-p.s.}$

où:
- β^θ et $\tilde\beta^\theta$ sont prévisibles, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$;
- $\tilde\beta^\theta_t(\omega)$ est orthogonal dans $\mathbb{R}^q$ à l'image de $\mathbb{R}^q$ par l'application linéaire associée à la matrice $c_t(\omega)$;
- $F'^\theta=(F'^{\theta,i})_{i\leq q}$ est prévisible, nul en 0; les $F'^{\theta,i}$ sont à variation finie sur Σ_1^θ avec $dF'_t \perp dF_t$.

Ci-dessus, l'unicité est celle des trois termes $(c\beta^\theta)\bullet F$, $\tilde\beta^\theta\bullet F$ et F'^θ, mais pas celle de β^θ ou $\tilde\beta^\theta$ en général (sauf si c est identiquement de rang q). Soit enfin

2.18 $$\Sigma^\theta \;=\; \{t\in\Sigma_1^\theta:\ (\beta^{\theta,T}c\beta^\theta)\bullet F_t < \infty\}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments permettant de définir $\overline{Z}^\theta$ sur l'ensemble aléatoire Σ^θ (qui, rappelons-le, est de la forme $\bigcup[\![0,T_n]\!]$ pour des temps d'arrêt convenables T_n):

2.19 $$\begin{cases} \overline{Z}^\theta = \mathcal{E}(\overline{Z}'^\theta) \quad (\mathcal{E} \text{ désigne l'exponentielle de Doléans}), \text{ où} \\ \overline{Z}'^\theta = \overline{M}'^\theta - \overline{A}'^\theta, \text{ avec} \\ \overline{A}'^\theta = 1*\nu'^\theta + \sum_{u\leq\cdot,\,a_u=1}(1-a_u^\theta), \\ \overline{M}'^\theta \text{ est une } P\text{-martingale locale sur } \Sigma^\theta, \\ \overline{M}'^{\theta,c} = \beta^{\theta,T}\bullet X^c \quad \text{sur } \Sigma^\theta, \\ \Delta\overline{Z}'^\theta_t = (Y^\theta(t,\Delta X_t)-1)1_D(t) + \dfrac{a_t-a_t^\theta}{1-a_t}1_{D^c}(t) \end{cases}$$

(noter que les formules ci-dessus déterminent aussi $\Delta\overline{M}'^\theta$, donc $\overline{M}'^\theta$).

Par construction, $\overline{A}'^\theta$ est croissant, de sorte que $\overline{Z}'^\theta$ est une P-surmartingale sur Σ^θ. Comme de plus $\Delta\overline{Z}'^\theta\geq-1$, on voit que $\overline{Z}^\theta$ est une P-surmartingale positive sur Σ^θ, avec $\overline{Z}_0^\theta=1$, et on a la décomposition suivante sur Σ^θ:

2.20 $\quad \overline{Z}^\theta = 1+\overline{M}^\theta-\overline{A}^\theta$, où $\overline{M}^\theta$ est une P-martingale locale sur Σ^θ, $\overline{A}^\theta$ est un processus croissant prévisible sur Σ^θ, et $\overline{M}_0^\theta = \overline{A}_0^\theta = 0$.

(On a d'ailleurs $\overline{M}^\theta = (1/\overline{Z}_-^\theta)\bullet\overline{M}'^\theta$ et $\overline{A}^\theta = (1/\overline{Z}_-^\theta)\bullet\overline{A}^\theta$ sur l'ensemble $\Sigma^\theta\cap\{\overline{Z}_-^\theta>0\}$). Rappelons enfin que (cf. [5]):

2.21 $$\Gamma^\theta \;:=\; \{Z_-^\theta>0\} \;\subset\; \Sigma^\theta\cap\{\overline{Z}_-^\theta>0\} \qquad P\text{-p.s.}$$

3 - ENONCE DES RESULTATS

Nous allons d'abord introduire une série d'hypothèses de "régularité" (au sens statistique du terme), chacune étant indexée par un triplet (k,r,s) appartenant à l'ensemble $\mathcal{K}$ défini par 2.8:

<u>Condition $H1^{krs}$</u>: Il existe un processus $V=(V^i)_{i\leq d}$ tel que

3.1 $$(V^*)^k \text{ est P-localement intégrable}$$

et que, pour toute famille $(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$ on ait lorsque $n\uparrow\infty$:

3.2 $$\left[\frac{(Z^{\theta_n})^{1/r}-1}{u_n}-\frac{1}{r}\,\theta^T V\right]^k \xrightarrow{loc} 0,$$

3.3 $$A^{\theta_n}/u_n^s \xrightarrow{loc} 0. \quad \square$$

Cette condition implique notamment la différentiabilité de $\theta\to Z^\theta$ dans un certain sens, au point $\theta=0$. Elle entraine l'existence d'une famille $(T_p,T(n,p))\in\mathcal{Q}$ telle que $(Z^{\theta_n})^{*k/r}_{T(n,p)}$ soit intégrable. Cette dernière propriété est automatiquement satisfaite si $k=r$, auquel cas $3.2 \Rightarrow 3.1$: ainsi, $H1^{222}$ n'est autre que la condition H1(2) de [5].

On remarquera aussi que si les P_θ sont localement absolument continus par rapport à P, on a $A^\theta=0$ et donc 3.3 est automatique.

3.4 PROPOSITION. a) <u>$H1^{krs}$ implique $H1^{k'r's'}$ pour tout</u> $(k',s',r')\prec(k,r,s)$, <u>avec le même processus</u> V.

b) <u>$H1^{krs}$ implique que</u> $V^i\in\mathcal{H}^k_{o,loc}$ <u>pour</u> $i=1,\dots,d$.

Nous allons de même introduire diverses conditions de régularité "partielle":

<u>Condition $H3^{krs}$</u>: Il existe un processus $\overline{V}=(\overline{V}^i)_{i\leq d}$ tel que

3.5 $$(\overline{V}^*)^k \text{ est P-localement intégrable}$$

et que, pour toute famille $(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$, il existe $(T_p,T(n,p))\in\mathcal{Q}$ avec

3.6 $$[\![0,T(n,p)]\!]\subset\Sigma^{\theta_n}\quad \forall n,p\in\mathbb{N},$$

3.7 $$\left[\frac{(\overline{Z}^{\theta_n})^{1/r}-1}{u_n}-\frac{1}{r}\,\theta^T\overline{V}\right]^{*k}_{T(n,p)} \xrightarrow{L^1} 0 \quad \text{si } n\uparrow\infty,\ \forall p\in\mathbb{N},$$

3.8 $$\overline{A}^{\theta_n}_{T(n,p)}/u_n^s \xrightarrow{L^1} 0 \quad \text{si } n\uparrow\infty,\ \forall p\in\mathbb{N}. \quad \square$$

Lorsque $\Sigma^\theta=\Omega\times\mathbb{R}_+$ pour tout θ, $H3^{krs}$ est strictement analogue à

$H1^{krs}$. Là encore, lorsque $k=r$, les propriétés 3.6 et 3.7 impliquent 3.5, de sorte que $H3^{222}$ n'est autre que la condition H3(2) de [5].

Lorsque les P_θ sont localement absolument continus par rapport à P, on verra plus loin qu'on a aussi $\overline{A}^\theta = 0$, donc 3.8 est automatique. Enfin, de manière analogue à 3.5, on a la

3.9 PROPOSITION. a) <u>$H3^{krs}$ implique $H3^{k'r's'}$ pour tout</u> $(k',s',r') \prec (k,r,s)$, <u>avec le même processus</u> $\overline{V}$.

b) <u>$H3^{krs}$ implique que</u> $\overline{V}^i \in \mathcal{M}^k_{o,loc}$ <u>pour</u> $i=1,..,d$.

L'un des deux résultats principaux de cet article est alors le:

3.10 THEOREME: <u>Soit</u> $(k,r,s)\in\mathcal{K}$ <u>avec</u> $r\leq 2$ <u>et</u> $s\geq k$. <u>La condition $H1^{krs}$ implique la condition $H3^{krs}$, et dans ce cas le processus</u> $\overline{V}$ <u>est la projection de</u> V <u>sur</u> X (au sens de 2.6, à prendre composante par composante).

Passons maintenant aux conditions de dérivabilité sur les caractéristiques. Pour $k\geq 1$, soit la fonction f_k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par

3.11 $$f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x|\leq 1 \\ |x|^k & \text{si } |x|>1. \end{cases}$$

<u>Condition $H2^{krs}$</u>: Il existe un processus prévisible $\gamma=(\gamma^{ij})_{i\leq d,j\leq q}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^q$ et une fonction $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable $W=(W^i)_{i\leq d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant

3.12 $$|\gamma c\gamma^T|\cdot F_t + f_k(|W|)*\nu_t < \infty \quad \forall t>0,$$

tels que pour tout $t\geq 0$ on ait, lorsque $\theta \to 0$:

3.13 $$P(t\in\Sigma^\theta) \longrightarrow 1,$$

3.14 $$[(\beta^{\theta,T} - \theta^T\gamma)c(\beta^\theta - \gamma^T\theta)]\cdot F_t/|\theta|^2 \xrightarrow{P} 0,$$

3.15 $$[1*\nu'^{\theta}_t + \textstyle\sum_{u<t,a_u=1}(1-a^\theta_u)]/|\theta|^s \xrightarrow{P} 0,$$

3.16 $$f_k[\frac{(Y^\theta)^{1/r} - 1 - \theta^T W/r}{|\theta|}]*\nu_t \xrightarrow{P} 0,$$

3.17 $$\sum_{u\leq t,a_u<1}(1-a_u)\, f_k[\frac{1}{|\theta|}\{(\frac{1-a^\theta_u}{1-a_u})^{1/r} - 1 + \frac{\theta^T\hat{W}_u}{r(1-a_u)}\}] \xrightarrow{P} 0. \square$$

Là encore, avec les notations de [5] on a $H2^{222} = H2(2)$. On a aussi

$H2^{krs} \Rightarrow H2^{k'r's'}$ lorsque $(k',r',s') \prec (k,r,s)$, avec les mêmes processus γ et W; cela peut se voir directement, ou comme une conséquence de la proposition 3.9 et de notre second résultat principal, qui s'énonce ainsi:

3.18 THEOREME: Si $(k,r,s)\in\mathcal{K}$, les conditions $H2^{krs}$ et $H3^{krs}$ sont équivalentes, et dans ce cas on a $a=1 \Rightarrow \hat{W}=0$ et

3.19 $$\bar{V} = \gamma\bullet X^c + (W + \frac{\hat{W}}{1-a})*(\mu-\nu).$$

Ces deux théorèmes 3.10 et 3.18 ont été montrés dans [5] lorsque $k=r=s=2$. La méthode est d'ailleurs essentiellement la même ici, avec des raffinements techniques et certaines simplifications.

Lorsque X est continu, on a $\nu^\theta=0$. Donc $H2^{krs}$ se réduit au fait que $|\gamma c\gamma^T|\bullet F_t<\infty$ et à 3.13 et 3.14, d'où:

3.20 COROLLAIRE: Lorsque le processus de base X est continu, les conditions $H2^{krs}=H3^{krs}$ ne dépendent pas du triplet (k,r,s) dans $\mathcal{K}$, et sont donc entrainées par l'une quelconque des conditions $H1^{krs}$.

Par contre, dans le cas où X est discontinu, les conditions $H2^{krs}$ dépendent de (k,r,s). A titre d'exemple, considérons le cas très simple où X est un processus ponctuel admettant sous P_θ le compensateur suivant:

3.21 $$B_t^\theta = \int_0^t \rho_s^\theta \, ds,$$

où ρ^θ est prévisible, à valeurs dans $]0,\infty[$. On écrit $\rho=\rho^0$, et on suppose que $\Theta=\mathbb{R}$. La condition $H2^{krs}$ se ramène alors à l'existence d'un processus prévisible (réel) W tel que, lorsque $\theta \to 0$:

3.22 $$\int_0^t |W_s|^k \rho_s \, ds < \infty \qquad \forall t>0,$$

3.23 $$\int_0^t |[(\rho_s^\theta/\rho_s)^{1/r} - 1]/\theta - W_s/r|^k \rho_s \, ds \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t>0.$$

(Le remplacement de f_k par la fonction $x \to |x|^k$ est possible ici car $\int_0^t \rho_s \, ds < \infty$ pour tout t fini). Si $k=r$, 3.23 implique 3.22.

4 - SUR LA CONVERGENCE DES EXPONENTIELLES DE DOLEANS

Dans ce paragraphe, on considère une suite z'^n de semimartingales spéciales, vérifiant $z_0'^n=0$ et $\Delta z'^n \geq -1$. Leurs exponentielles de

Doléans $z^n = \mathcal{E}(z'^n)$ sont des semimartingales spéciales positives, vérifiant $z_0^n=1$. On note $z^n = 1+m^n+a^n$ et $z'^n = m'^n+a'^n$ les décompositions canoniques.

On se donne aussi une suite (u_n) de réels strictement positifs, tendant vers 0. Nous voulons essentiellement montrer l'équivalence, pour (k,r,s) donné dans $\mathcal{K}$, des deux conditions ci-dessous:

<u>Condition A^{krs}</u>: Il existe un processus v tel que

4.1 $$(v^*)^k \text{ est localement intégrable,}$$

4.2 $$\left[\frac{(z^n)^{1/r} - 1}{u_n} - \frac{v}{r}\right]^k \xrightarrow{\text{loc}} 0,$$

4.3 $$\mathrm{Var}(a^n)/u_n^s \xrightarrow{\text{loc}} 0. \quad \square$$

<u>Condition B^{krs}</u>: Il existe $w\in\mathcal{M}_{0,loc}^1$ continue et il existe un processus optionnel δ, tels que (cf. 3.11 pour f_k):

4.4 $$\sum_{u\leq .} f_k(\delta_u) \text{ est localement intégrable,}$$

4.5 $$\sum_{u\leq .} f_k\left[\frac{(1 + \Delta z_u'^n)^{1/r} - 1}{u_n} - \frac{\delta_u}{r}\right] \xrightarrow{\text{loc}} 0,$$

4.6 $$\left\langle \frac{z'^{n,c}}{u_n} - w, \frac{z'^{n,c}}{u_n} - w\right\rangle \xrightarrow{\text{loc}} 0,$$

4.7 $$\mathrm{Var}(a'^n)/u_n^s \xrightarrow{\text{loc}} 0. \quad \square$$

4.8 PROPOSITION: <u>Les conditions A^{krs} et B^{krs} sont équivalentes, et elles entrainent que</u> $v\in\mathcal{M}_{0,loc}^k$, $w = v^c$ <u>et</u> $\Delta v = \delta$.

Commençons par deux lemmes, après avoir remarqué que si $k=1$ on a les implications 4.2 ⇒ 4.1 et 4.5 ⇒ 4.4.

4.9 LEMME: <u>Si</u> $(k',r',s') \prec (k,r,s)$ <u>on a l'implication</u> $A^{krs} \Rightarrow A^{k'r's'}$, <u>avec le même processus</u> v, <u>qui appartient alors à</u> $\mathcal{M}_{0,loc}^k$.

<u>Preuve</u>. a) Commençons par un résultat auxiliaire. Nous fixons r, r'. Pour $x\geq-1$ on pose $\varphi(x) = (1+x)^{r/r'} - 1 - rx/r'$: il existe $K\in\mathbb{R}_+$ tel que $|\varphi(x)| \leq K(|x| + |x|^{1\vee(r/r')})$. On pose aussi

$$\psi_n(x,y) = \frac{[1 + u_n(x + \frac{y}{r})]^{1/r'} - 1}{u_n} - \frac{y}{r'} = \frac{\varphi[u_n(x + \frac{y}{r})]}{u_n} + xr/r'.$$

On vérifie alors aisément que, si $r'' = 1\vee(r/r')$:

4.10 $\quad \exists K\in\mathbb{R}_+$ avec $\quad |\psi_n(x,y)| \quad \leq \quad K(|x| + |x|^{r''} + |y| + |y|^{r''})$,

4.11 $\quad \exists K_Y\in\mathbb{R}_+$, $\exists N_Y\in\mathbb{N}$ tels que si $|x|\leq 1$, $|y|\leq Y$, on ait

$$|\psi_n(x,y)| \quad \leq \quad K_Y(|x| + u_n|y|).$$

b) Passons maintenant à la preuve du lemme. Supposons A^{krs}, et soit $(k',r',s') \prec (k,r,s)$. On a clairement 4.1 pour k' et 4.3 pour s'. Posons

$$U^n = [(z^n)^{1/r} - 1]/u_n - v/r, \qquad U'^n = [(z^n)^{1/r'} - 1]/u_n - v/r',$$

On a $|U^n|^k \xrightarrow{loc} 0$ par hypothèse, et il faut montrer $|U'^n|^{k'} \xrightarrow{loc} 0$.

On a $U'^n = \psi_n(U^n,v)$, donc $|U'^n|^* \leq K_Y(|U^n|^* + u_n v^*)$ sur $\{v^*\leq Y\}$ par 4.11. Comme $|U^n|^*_t \xrightarrow{P} 0$ on en déduit immédiatement $|U'^n|^*_t \xrightarrow{P} 0$.

Ensuite, il existe $(T_p,T(n,p))\in\Omega$ avec $v^*_{T_p}\in L^k$ et $|U^n|^*_{T(n,p)} \to 0$ dans L^k, donc les suites $\{|U^n|^{*k}_{T(n,p)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément intégrables. D'après 4.10 on a

$$|U'^n|^*_{T(n,p)} \leq K[|U^n|^*_{T(n,p)} + |U^n|^{*r''}_{T(n,p)} + v^*_{T_p} + (v^*_{T_p})^{r''}].$$

Comme $k' \leq k$ et $k'r'' \leq k$, on en déduit que chaque suite $\{|U'^n|^{*k'}_{T(n,p)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Donc comme $|U'^n|^*_{T(n,p)} \leq |U'^n|^*_p$, qui tend vers 0 en probabilité pour chaque p, on en déduit que $|U'^n|^*_{T(n,p)} \to 0$ dans $L^{k'}$, d'où $|U'^n|^{k'} \xrightarrow{loc} 0$.

On a ainsi montré $A^{k'r's'}$. En particulier, on a A^{111}, donc $(m^n-1)/u_n - v \xrightarrow{loc} 0$. Les m^n étant des martingales locales, il en est clairement de même de v, et $v_0=0$ est évident. Compte tenu de 4.1, on a donc $v\in\mathcal{H}^k_{0,loc}$. $\square$

4.12 LEMME: a) <u>Si</u> $(k',r',s') \prec (k,r,s)$, <u>on a l'implication</u> $B^{krs} \Rightarrow B^{k'r's'}$, <u>avec les mêmes processus</u> w <u>et</u> δ.

b) <u>B^{krs} implique l'existence d'une unique martingale locale purement discontinue</u> w' <u>telle que</u> $w'_0=0$ <u>et</u> $\Delta w'=\delta$, <u>et on a</u> $w'\in\mathcal{H}^k_{0,loc}$.

<u>Preuve</u>. a) Supposons B^{krs}; soit $(k',r',s') \prec (k,r,s)$. Comme $k'\leq k$ on a $f_{k'}\leq f_k$, d'où 4.4 pour k', tandis que 4.7 pour s' est évident. Posons

$$\gamma^n = [(1+\Delta z'^n)^{1/r}-1]/u_n - \delta/r, \qquad \gamma'^n = [(1+\Delta z'^n)^{1/r'}-1]/u_n - \delta/r',$$

$$U^n = \sum_{u\leq .} f_k(\gamma^n_u), \qquad U'^n = \sum_{u\leq .} f_{k'}(\gamma'^n_u).$$

On a $U^n \xrightarrow{loc} 0$ par hypothèse, et il reste à montrer $U'^n \xrightarrow{loc} 0$.

Reprenons les notations de la preuve précédente. On a $\gamma'^n = \psi_n(\gamma^n,\delta)$, donc 4.11 implique $|\gamma'^n| \leq K_Y(|\gamma^n|+u_n|\delta|)$ si $|\gamma^n|\leq 1$,

$|\delta|\le Y$ et $n\ge N_Y$. Fixons t et posons $A_Y = \{\sum_{u\le t} \delta_u^2 \le Y\}$ et $B_n = \{U_t^n \le 1/2K_Y\}$. Comme $f_k(x)=f_{k'}(x)=x^2$ pour $|x|\le 1$, il vient alors $U_t'^n \le 2K_Y^2(U_t^n + u_n^2 \sum_{u\le t} \delta_u^2)$ sur $A_Y \cap B_n$. Comme $U_t^n \xrightarrow{P} 0$, et comme $\lim_{Y\uparrow\infty} P(A_Y) = 1$ par 4.4, on en déduit $U_t'^n \xrightarrow{P} 0$, et en particulier les temps d'arrêt $S_n = \inf(t: U_t'^n \ge 1)$ vérifient $S_n \xrightarrow{P} \infty$.

Soit $(T_p,T(n,p))\in\mathcal{Q}$ avec $\sum_{u\le T_p} f_k(\delta_u) \in L^1$ et $U^n_{T(n,p)} \xrightarrow{L^1} 0$. On voudrait montrer que $U'^n_{T(n,p)} \to 0$ dans L^1, et on a vu ci-dessus que cette convergence a lieu au moins en probabilité. Quitte à remplacer $T(n,p)$ par $T(n,p)\wedge S_n$ (ce qui, compte tenu de $S_n \xrightarrow{P} \infty$, n'altère pas l'appartenance à $\mathcal{Q}$), on peut d'ailleurs supposer que $T(n,p) \le S_n$, donc $U'^n_{T(n,p)-} \le 1$. Il reste donc à montrer l'uniforme intégrabilité de chaque suite $\{\Delta U'^n_{T(n,p)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, et pour cela il suffit même de démontrer l'uniforme intégrabilité de $\{|\gamma'^n_{T(n,p)}|^{k'}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après 4.10, on a $|\gamma'^n| \le K[|\gamma^n| + |\gamma^n|^{r''} + |\delta| + |\delta|^{r''}]$. On a par construction $\delta_{T(n,p)}\in L^k$, et $\gamma^n_{T(n,p)} \xrightarrow{L^k} 0$: comme $k'\le k$ et $k'\le r''k$, le résultat cherché est alors immédiat.

b) Si on sait qu'il existe $w'\in\mathcal{H}^1_{0,loc}$ vérifiant $\Delta w'=\delta$, la condition 4.4 implique facilement que (et en fait équivaut à) $w'\in\mathcal{H}^k_{0,loc}$, et l'unicité de w' est bien connue.

Quant à l'existence de w', comme on a 4.4 avec $k=1$, il suffit de montrer que la projection prévisible de δ est nulle. Soit donc T un temps prévisible borné. D'après (a) on a B^{111}; il existe une famille $(T_p,T(n,p))\in\mathcal{Q}$ avec $\sum_{u\le T_p} f_1(\delta_u) \in L^1$, $\mathrm{Var}(a'^n)_{T(n,p)}/u_n \to 0$ dans L^1, et $B^n_{T(n,p)} \to 0$ dans L^1, où B^n désigne le premier membre de 4.5 pour $k=r=1$. On en déduit

$$(\Delta a'^n_T/u_n)1_{\{T\le T(n,p)\}} \xrightarrow{L^1} 0, \quad (\Delta z'^n_T/u_n - \delta_T)1_{\{T\le T(n,p)} \xrightarrow{L^1} 0$$

(car $f_1(Z_n) \to 0$ dans L^1 implique $Z_n \to 0$ dans L^1), donc par différence on a aussi $(\Delta m'^n_T/u_n - \delta_T)1_{\{T\le T(n,p)\}} \to 0$ dans L^1. Comme $E(\Delta m'^n_T|\mathcal{F}_{T-}) = 0$ il vient $E(\delta_T|\mathcal{F}_{T-}) = 0$, ce qui prouve le résultat. □

<u>Preuve de 4.8</u>. a) Commençons par des notations. Soit $r_n = \inf(t: |z^n_t-1|\ge\frac{1}{2})$. Sous A^{krs} on pose $w=v^c$ et $\delta=\Delta v$; sous B^{krs} on pose $v = w+w'$ (cf. 4.12b). Appelons B^n et C^n les premiers membres de 4.5 et 4.6, et

$$\gamma^n = \frac{(1+\Delta z'^n)^{1/r} - 1}{u_n} - \frac{\delta}{r}, \qquad y^n = \frac{(z^n)^{1/r} - (z^n_-)^{1/r}}{u_n} - \frac{\delta}{r}.$$

On a $z^n = z^n_-(1+\Delta z'^n)$, donc $(z^n_-)^{1/r}\,\gamma^n = y^n + \frac{\delta}{r}(1-(z^n_-)^{1/r})$. Comme de plus $\frac{1}{2} \leq z^n_- \leq \frac{3}{2}$ sur $[0,r_n]$, il existe $K\in\mathbb{R}_+$ tel que

4.13 $|\gamma^n| \leq K(|y^n| + |\delta|)$, $|y^n| \leq K(|\gamma^n| + |\delta|)$ sur $[0,r_n]$.

Posons enfin $X^n = (z^n-1)/u_n - v$, $X'^n = z'^n/u_n - v$, et $Y^n = [(z^n)^{1/r}-1]/u_n - v/r$ (donc $\Delta Y^n = y^n$).

b) Supposons A^{krs}. Comme $\delta=\Delta v$ et $v\in\mathcal{H}^k_{0,loc}$, on a 4.4. On a aussi A^{111}, donc $X^n \xrightarrow{loc} 0$, ce qui entraine

4.14 $$(z^n-1)^*_t \xrightarrow{P} 0,$$

et en particulier

4.15 $$r_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Sur $[0,r_n]$ on a $a'^n = (1/z^n_-)\cdot a^n$ et $1/z^n_- \leq 2$, donc $\mathrm{Var}(a'^n) \leq 2\mathrm{Var}(a^n)$. 4.7 découle alors de 4.3, 4.15 et 2.13.

Appliquons 4.2 et 4.3 pour $k=r=s=1$: on obtient $m^n/u_n - v \xrightarrow{loc} 0$, et comme m^n et v sont des martingales locales on en déduit que $m^n/u_n \xrightarrow{\mathcal{E}} v$ (convergence au sens d'Emery [2]; la plupart des résultats que nous utiliserons au sujet de la topologie d'Emery se trouvent démontrés dans Mémin [7]). 4.3 implique aussi $a^n/u_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$, donc $X^n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$. Comme $X'^n = (1/z^n_-)\cdot X^n + (1/z^n_- - 1)\cdot v$ on déduit alors de manière classique de 4.14, 4.15 et de $X^n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$ que

4.16 $$X'^n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0.$$

Cette propriété implique $[X'^n,X'^n]_t \xrightarrow{P} 0$ $\forall t\geq 0$. Comme $C^n \leq [X'^n,X'^n]$ on en déduit 4.6, d'après 2.13.

Il nous reste à montrer 4.5. D'abord, il existe $K'\in\mathbb{R}_+$ tel que $|(1+x)^{1/r} - 1 - x/r| \leq K'x^2$, donc $|\gamma^n - \Delta X'^n/r| \leq K'(\Delta z'^n)^2/u_n$, et

$$\sum_{u\leq .}(\gamma^n_u)^2 \leq \frac{2}{r^2}[X'^n,X'^n] + 2K'^2[\frac{z'^n}{\sqrt{u_n}},\frac{z'^n}{\sqrt{u_n}}]^2$$

Mais 4.16 entraine aussi $z'^n/\sqrt{u_n} \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$, donc on a $\sum_{u\leq t}(\gamma^n_u)^2 \xrightarrow{P} 0$ pour tout $t\geq 0$. Comme $B^n_t = \sum_{u\leq t} f_k(\gamma^n_u)$ il est facile d'en déduire que $B^n_t \xrightarrow{P} 0$ $\forall t\geq 0$; en particulier les temps d'arrêt $S_n = \inf(t: B^n_t\geq 1)$ vérifient $S_n \xrightarrow{P} \infty$.

Soit alors $(T_p,T(n,p))\in\mathfrak{Q}$ avec $v^*_{T_p}\in L^k$ et $(Y^n)^*_{T(n,p)} \xrightarrow{L^k} 0$ (cf. 4.2 et 4.3). Quitte à remplacer $T(n,p)$ par $T(n,p)\wedge S_n$ (ce qui n'altère pas l'appartenance à $\mathfrak{Q}$ puisque $S_n \xrightarrow{P} \infty$), on peut supposer que $T(n,p)\leq S_n$, donc $B^n_{T(n,p)-}\leq 1$. Comme $f_k(x) \leq 1+|x|^k$ on déduit alors de 4.13 que

$$B^n_{T(n,p)} \leq 1 + f_k(\gamma^n_{T(n,p)}) \leq 2 + K^k[|Y^n|^*_{T(n,p)} + v^*_{T_p}]^k.$$

Donc chaque suite $\{B^n_{T(n,p)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable, et comme $B^n_{T(n,p)} \le B^n_p \xrightarrow{P} 0$ on en déduit que $B^n_{T(n,p)} \xrightarrow{L^1} 0$: on a donc 4.5.

c) Supposons inversement B^{krs}. Rappelons que $v=w+w'$, où w' est donné par 4.12b. On a donc $v\in\mathcal{H}^k_{0,loc}$ et 4.1.

On a aussi B^{111}, et 4.5 pour $k=r=1$ s'écrit $\sum_{u\le .} |\Delta X'^n_u| \wedge |\Delta X'^n_u|^2 \xrightarrow{loc} 0$. Comme $[X'^n,X'^n] = C^n + \sum_{u\le .}(\Delta X'^n_u)^2$, en utilisant 4.6 il est facile d'en déduire que $[X'^n,X'^n]^{1/2} \xrightarrow{loc} 0$.

La martingale locale $Z^n = X'^n - a'^n/u_n$ vérifie

$$[Z^n,Z^n] \le 2[X'^n,X'^n] + 2[a'^n,a'^n]/u_n^2 \le 2[X'^n,X'^n] + 2\mathrm{Var}(a'^n)^2/u_n^2$$

et, étant donné 4.7 pour $s=1$, il vient $[Z^n,Z^n]^{1/2} \xrightarrow{loc} 0$. Comme les Z^n sont des martingales locales, cela entraine $Z^n \xrightarrow{\mathscr{A}} 0$, et en appliquant encore 4.7 pour $s=1$ on obtient 4.16.

4.16 entraine $z'^n \xrightarrow{\mathscr{A}} 0$, donc $z^n = \mathcal{E}(z'^n) \xrightarrow{\mathscr{A}} 1$; par suite on a aussi 4.14 et 4.15. De plus $X^n = z^n_-\bullet X'^n + (z^n_- -1)\bullet v$, donc $X^n \xrightarrow{\mathscr{A}} 0$ par 4.16 et 4.14, et $|X^n|^*_t \xrightarrow{P} 0$ $\forall t\ge 0$. Cette propriété implique $|Y^n|^*_t \xrightarrow{P} 0$, et en particulier les temps d'arrêt $S_n = \inf(t: |Y^n_t|\ge 1)$ vérifient $S_n \xrightarrow{P} \infty$.

Soit alors $(T_p,T(n,p))\in\mathfrak{Q}$ avec $v^*_{T_p}\in L^k$ et $B^n_{T(n,p)} \xrightarrow{L^1} 0$. Comme en (b) on peut supposer que $T(n,p)\le S_n$, donc $|Y^n|^*_{T(n,p)-} \le 1$. En utilisant 4.13 et $|x| \le 1 + f_k(x)^{1/k}$ on obtient

$$\begin{aligned}|Y^n|^*_{T(n,p)} &\le 1 + |y^n_{T(n,p)}| \le 1 + K(|\gamma^n_{T(n,p)}| + |\delta_{T(n,p)}|)\\ &\le 1 + K + K\, f_k(\gamma^n_{T(n,p)})^{1/k} + K|\delta_{T(n,p)}|\\ &\le 1 + K + K(B^n_{T(n,p)})^{1/k} + K\, v^*_{T_p}.\end{aligned}$$

Donc la suite $\{|Y^n|^{*k}_{T(n,p)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Exactement comme à la fin de (b), on en déduit que $|Y^n|^{*k}_{T(n,p)} \xrightarrow{L^1} 0$, d'où 4.2.

Enfin $a^n = z^n_-\bullet a'^n$, donc $\mathrm{Var}(a^n) \le 2\mathrm{Var}(a'^n)$ sur $[0,r_n]$, et 4.3 découle de 4.15 et 4.7. □

5 - EQUIVALENCE DE H2 ET H3

Commençons par plusieurs lemmes.

5.1 LEMME: <u>$H3^{krs}$ équivaut à l'existence d'un processus $\overline{V}$ tel que, pour toute famille $(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$, il existe une suite S_n de temps d'arrêt vérifiant</u>

5.2 $$[\![0,S_n]\!] \subset \Sigma^{\theta_n},$$

5.3 $$S_n \xrightarrow{P} \infty,$$

<u>et telle que les processus arrêtés</u> $z^n = (\overline{Z}^{\theta_n})^{S_n}$ <u>vérifient</u> A^{krs} <u>avec</u> $v = \theta^T\overline{V}$.

Etant donné 4.9, cela démontre en particulier la proposition 3.9.

<u>Preuve</u>. Supposons d'abord $H3^{krs}$. D'après 3.5 il est clair que si $(\theta_n, u_n, \theta)\in\tau$, on a

5.4 $$P(t\in\Sigma^{\theta_n}) \longrightarrow 1, \quad \forall t\geq 0.$$

Mais $\Sigma^{\theta_n} = \bigcup_{m\geq 1} [\![0,S_{n,m}]\!]$ pour des temps d'arrêt $S_{n,m}$ croissants en m; si $S_{n,\infty} = \lim_m S_{n,m}$, il existe $m_n\in\mathbb{N}$ tel que $P(S_{n,m_n}\leq n\wedge(S_{n,\infty}-1)) \leq 1/n$. D'après 5.4 on voit facilement que $S_n := S_{n,m_n}$ vérifie 5.2 et 5.3. Il est alors évident que $H3^{krs}$ implique A^{krs} pour la suite $z^n = (\overline{Z}^{\theta_n})^{S_n}$, avec $v = \theta^T\overline{V}$.

La réciproque est également immédiate, une fois remarqué (ce qu'on a déjà utilisé plusieurs fois) que si $(T_p, T(n,p))\in\Omega$ et si on a 5.3, alors $(T_p, T(n,p)\wedge S_n)\in\Omega$. □

5.5 LEMME: <u>La propriété 3.12 implique</u>

5.6 $$\sum_{u\leq t,\, a_u<1} (1-a_u)\, f_k\Big(\frac{|\widehat{W}_u|}{1-a_u}\Big) < \infty.$$

<u>Preuve</u>. La fonction

5.7 $$g_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x|\leq 1 \\ \frac{2}{k}|x|^k + 1 - \frac{2}{k} & \text{si } |x|>1 \end{cases}$$

est convexe, et il existe $\eta\in]0,1[$ tel que $\eta \leq f_k/g_k \leq 1/\eta$. On peut donc remplacer f_k par g_k dans 5.6 et dans 3.12. D'après l'inégalité de Jenssen on a $g_k(|\widehat{W}|) \leq \widehat{g_k(|W|)}$, donc 3.12 implique

$$\sum_{u\leq t} g_k(|\widehat{W}_u|) < \infty,$$

et de même avec f_k au lieu de g_k. Comme le processus $\frac{1}{1-a} 1_{\{a<1\}}$ est localement borné et comme $f_k(xu) \leq C_u f_k(x)$ pour une constante C_u, on en déduit 5.6. □

Soit γ et W vérifiant 3.12 (donc 5.6). On notera $H^i(\theta)$ pour $i=1$ (resp. 2, 3, 4) le premier membre de 3.14 (resp. 3.15, 3.16, 3.17). Si $\zeta = (\theta_n, u_n, \theta)\in\tau$ on pose aussi

$$5.8 \quad \begin{cases} H^{1,n}(\zeta) &= [(\beta^{\theta_n,T}/u_n - \theta^T\gamma)c(\beta^{\theta_n}/u_n - \gamma^T\theta)]\bullet F, \\ H^{2,n}(\zeta) &= H^2(\theta_n), \\ H^{3,n}(\zeta) &= f_k[\frac{(Y^{\theta_n})^{1/r} - 1}{u_n} - \frac{\theta^T W}{r}] * \nu, \\ H^{4,n}(\zeta) &= \sum_{u\leq .,a_u<1} (1-a_u) f_k[\frac{1}{u_n}\{(\frac{1-a_u^{\theta_n}}{1-a_u})^{1/r} - 1\} + \frac{\theta^T\hat{W}_u}{r(1-a_u)}] \end{cases}$$

5.9 LEMME: <u>Si γ et W vérifient 3.12, la condition $H2^{krs}$ équivaut à ce que, pour toute famille $\zeta=(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$ il existe des temps d'arrêt S_n vérifiant 5.2, 5.3, et</u>

$$5.10 \qquad H^{i,n}(\zeta)_t \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t\geq 0, \quad \forall i=1,2,3,4.$$

<u>Preuve</u>. D'abord, on remarque facilement que $H2^{krs}$ équivaut à ce que, pour toute famille $\zeta=(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$, on ait 5.4 et $H^i(\theta_n)_t \xrightarrow{P} 0$ $\forall t\geq 0$, $\forall i=1,2,3,4$. Mais, d'après la preuve de 5.1, 5.4 équivaut à l'existence de temps d'arrêt S_n vérifiant 5.2 et 5.3, donc on peut remplacer ci-dessus $H^i(\theta_n)_t \xrightarrow{P} 0$ par $H^i(\theta_n)_{t\wedge S_n} \xrightarrow{P} 0$.

Il reste à montrer que 5.10 équivaut à $H^i(\theta_n)_{t\wedge S_n} \xrightarrow{P} 0$. C'est évident pour $i=2$, et nous allons le montrer pour $i=3$ (pour $i=1$ c'est plus facile, en utilisant $|\gamma c\gamma^T|\bullet F_t < \infty$, et pour $i=4$ c'est exactement pareil, en utilisant 5.6).

Il existe une constante K telle que $f_k(x+y) \leq K[f_k(x) + f_k(y)]$. Si $U_n = (\theta_n^T/u_n - \theta^T)W/r$, on a alors

$$5.11 \qquad H^3(\theta_n) \leq KH^{3,n}(\zeta) + Kf_k(U_n)*\nu, \quad H^{3,n}(\zeta) \leq KH^3(\theta_n) + Kf_k(U_n)*\nu.$$

Mais $U_n \to 0$, donc $f_k(U_n) \to 0$; on a aussi $|U_n| \leq |W|$, donc $f_k(U_n) \leq f_k(|W|)$, et par suite $f_k(U_n)*\nu_t \longrightarrow 0$ d'après 3.12 et le théorème de Lebesgue. L'équivalence cherchée découle alors immédiatement de 5.11.$\square$

<u>Preuve du théorème 3.18</u>. a) Supposons d'abord $H2^{krs}$, et soit

$$5.12 \qquad \tilde{W}_t = W(t,\Delta X_t)\, 1_D(t) - \frac{\hat{W}_t}{1-a_t}\, 1_{\{a_t<1\}}\, 1_{D^c}(t).$$

Si $\zeta=(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$, on pose $w = \theta^T\gamma\bullet X^c$ et $\delta = \theta^T\tilde{W}$. Remarquons que, formellement, le compensateur du processus croissant $\sum_{u\leq .} f_k(\delta_u)$ est

$$5.13 \qquad f_k(\theta^T W)*\nu + \sum_{u\leq .} (1-a_u)\, f_k(\frac{\theta^T\hat{W}_u}{1-a_u}).$$

D'après 3.12 et 5.5, le processus prévisible 5.13 est fini, donc localement intégrable. Il en est donc de même de $\sum_{u\leq .} f_k(\delta_u)$, d'où 4.4.

Vu 2.19, on a $H^{2,n}(\zeta) = \overline{A}'^{\theta_n}/u_n^s$ et

$$H^{1,n}(\zeta) = \langle \frac{\overline{Z}'^{\theta_n}}{u_n} - w, \frac{\overline{Z}'^{\theta_n}}{u_n} - w \rangle,$$

tandis que le compensateur de $\sum_{u\leq .} f_k[\{(1+\Delta\overline{Z}'^{\theta_n})^{1/r} - 1\}/u_n - \delta_u/r]$ est $H^{3,n}(\zeta)+H^{4,n}(\zeta)$. On déduit alors du lemme 5.9 que les processus arrêtés $(\overline{Z}'^{\theta_n})^{S_n}$ vérifient 4.5, 4.6, 4.7 avec w et δ, donc B^{krs}.

Par 4.12 il en découle d'abord l'existence de $w' \in \mathcal{M}^k_{0,loc}$ unique, purement discontinue, avec $\Delta w' = \delta$; en particulier, la projection prévisible de δ est nulle, tandis que celle de $W(t,\Delta X_t)1_D(t)$ est $\hat{W}_t$. Vu 5.12 et $\delta = \theta^T \tilde{W}$ on en déduit $a=1 \Rightarrow \theta^T\hat{W}=0$, donc aussi $\hat{W}=0$ car θ est arbitraire. On peut alors clairement définir $\overline{V}$ par 3.19.

Par 4.8 il découle ensuite que les processus arrêtés $(\overline{Z}^{\theta_n})^{S_n}$ vérifient A^{krs}, avec $v=\theta^T\overline{V}$, où $\overline{V}$ est le processus ci-dessus. D'après 5.1 on a donc $H3^{krs}$.

b) Réciproquement, supposons $H3^{krs}$. On a $\overline{V} = \overline{V}'+\overline{V}''$, où $\overline{V}'$ est la pojection de $\overline{V}$ sur X (cf. 2.6), qui s'écrit

5.14 $\qquad \overline{V}' = \gamma \bullet X^c + (W + \frac{\hat{W}}{1-a}) * (\mu - \nu)$, avec $W = M^P_\mu(\Delta\overline{V}|\tilde{\mathcal{P}})$

(et $a=1 \Rightarrow \hat{W}=0$).

Fixons $\zeta=(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$. D'après le lemme 5.1, il existe des temps d'arrêt S_n vérifiant 5.1 et 5.3, tels que les $(\overline{Z}^{\theta_n})^{S_n}$ vérifient A^{krs} avec $v = \theta^T\overline{V}$; en particulier, d'après la preuve de 4.8 on a alors $(\overline{M}^{\theta_n})^{S_n}/u_n - \theta^T\overline{V} \xrightarrow{loc} 0$. Cela implique l'existence d'une famille $(T_p, T(n,p)) \in \mathfrak{Q}$ telle que $|(\overline{M}^{\theta_n})^{S_n}/u_n - \theta^T\overline{V}|^*_{T(n,p)} \xrightarrow{L^1} 0$, donc $(\overline{M}^{\theta_n})^{S_n\wedge T(n,p)}/u_n$ converge vers $(\theta^T\overline{V})^{T_p}$ dans l'espace $\mathcal{M}^1$ de martingales. On sait ([3], (4.46)) que le sous-espace de $\mathcal{M}^1$ constitué des martingales de la forme 2.6 est fermé dans $\mathcal{M}^1$. Comme $\overline{M}^\rho$ est de la forme 2.6 pour tout $\rho\in\Theta$, il en est donc de même de $\theta^T\overline{V}$ pour tout θ, donc de $\overline{V}$. On en déduit que $\overline{V}=\overline{V}'$ est donné par 5.14.

Par ailleurs, 4.8 implique que les $(\overline{Z}'^{\theta_n})^{S_n}$ vérifient B^{krs} avec $w = \theta^T\overline{V}^c = \theta^T\gamma\bullet X^c$ et $\delta = \theta^T\Delta\overline{V}$; comme $\delta_t = \theta^T W(t,\Delta X_t)$ si $t\in D$, on déduit 3.12 de 4.4. De plus, exactement comme dans la partie (a) de la preuve, 5.10 découle de 4.5, 4.6 et 4.7, donc on a $H2^{krs}$ d'après le lemme 5.9. □

6 - H1 IMPLIQUE H3

Commençons par remarquer qu'on a de manière immédiate (cf. 5.1, en plus simple car il n'y a pas besoin d'arrêter les processus):

6.1 LEMME: <u>$H1^{krs}$ équivaut à l'existence d'un processus</u> V <u>tel que, pour toute famille</u> $(\theta_n, u_n, \theta) \in \tau$, <u>les processus</u> $Z^n = Z^{\theta_n}$ <u>vérifient A^{krs} avec</u> $v = \theta^T V$.

Etant donné 4.9, on en déduit la proposition 3.4.

Dans le second lemme, Q est une mesure positive sur un espace $(E,\mathcal{E})$, σ-finie pour une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$. Soit des réels strictement positifs u_n, tendant vers 0. Soit H_n, H des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables sur E, telles que $1+H_n \geq 0$ et

6.2 $$Q[f_k(H)] < \infty,$$

6.3 $$Q[f_k(\frac{(1+H_n)^{1/r} - 1}{u_n} - \frac{H}{r})] \longrightarrow 0,$$

où $1 \leq r \leq k$. On déduit facilement de 6.2 et 6.3 que $Q(|H| \wedge H^2) < \infty$ et $Q(|H_n| \wedge H_n^2) < B$ (car $r \leq k$), donc les espérances conditionnelles $H' = Q(H|\mathcal{G})$ et $H'_n = Q(H_n|\mathcal{G})$ existent. Noter que $1+H'_n \geq 0$.

6.4 LEMME: <u>Sous les hypothèses précédentes, les fonctions</u> H', H'_n <u>vérifient également 6.2 et 6.3</u>.

<u>Preuve</u>. a) Dans 6.2 et 6.3, on peut remplacer f_k par la fonction g_k définie en 5.7. Comme g_k est convexe, $Q[g_k(H')] \leq Q[g_k(H)] < \infty$.

b) Posons $g_{k,n}(x) = g_k(\frac{(1+x)^{1/r} - 1}{u_n})$. En dérivant $g_{k,n}$ deux fois on vérifie que $g_{k,n}$ est convexe sur $[-1,\infty[$, pourvu que $u_n \leq 1/r$. Rappelons aussi que $g_k(x+y) \leq K[g_k(x) + g_k(y)]$ pour une certaine constante K. Enfin, pour tout $\alpha > 0$ il existe une constante K'_α telle que si $|x| \leq \alpha$, on ait $x^2 \leq K'_\alpha g_1(x)$ et $g_k(x) \leq K'_\alpha x^2$.

c) On dit que la suite (X_n) de fonctions mesurables sur E est Q-UI (uniformément intégrable) si d'une part $\sup_n Q(|X_n|) < \infty$, et si d'autre part $\lim_{\alpha\uparrow\infty} \sup_n Q(|X_n| 1_{\{|X_n|>\alpha\}}) = 0$. On montre comme dans le cas d'une probabilité que si $X_n \to X$ dans $L^1(Q)$, la suite (X_n) est Q-UI; on montre aussi que si les X_n sont Q-UI, il en est de même des $X'_n = Q(X_n|\mathcal{G})$ (par contre, $X_n \to X$ en Q-mesure et (X_n) Q-UI n'entrainent pas $X_n \to X$ dans $L^1(Q)$).

d) Posons

$$U_n = \frac{(1+H_n)^{1/r} - 1}{u_n}, \qquad V_n = U_n - H/r, \qquad Y_n = g_k(V_n),$$

$$U'_n = \frac{(1+H'_n)^{1/r} - 1}{u_n}, \qquad V'_n = U'_n - H'/r, \qquad Y'_n = g_k(V'_n),$$

$$W_n = H_n/u_n - H, \qquad W'_n = H'_n/u_n - H' = Q(W_n|\mathcal{G}).$$

e) Passons maintenant à la démonstration du lemme. D'abord, exactement comme pour 4.12 (en plus simple), on déduit de 6.2 et 6.3 qu'on a aussi 6.3 pour $k=r=1$, soit $Q[g_1(W_n)] \to 0$. Comme g_1 est convexe, on a aussi $Q[g_1(W'_n)] \le Q[g_1(W_n)]$, donc

6.5 $$Q[g_1(W'_n)] \longrightarrow 0.$$

D'après (b) on a $g_k(U_n) \le Kg_k(V_n) + Kg_k(H/r)$, et cette dernière expression tend vers $Kg_k(H/r)$ dans $L^1(Q)$ d'après 6.2 et 6.3; vu (c), la suite $g_k(U_n)$ est donc Q-UI.

On a $g_k(U_n) = g_{k,n}(H_n)$ et $g_k(U'_n) = g_{k,n}(H'_n)$; (b) implique alors que $g_k(U'_n) \le Q[g_k(U_n)|\mathcal{G}]$ si $u_n \le 1/r$, et d'après (c) on en déduit que la suite $g_k(U'_n)$ est Q-UI. On a aussi $Y'_n \le Kg_k(U'_n) + Kg_k(H'/r)$, donc d'après (a) et 6.2 on a finalement:

6.6 la suite (Y'_n) est Q-UI.

Considérons ensuite la fonction ψ_n définie dans la preuve de 4.9, avec (r,r') remplacé par $(1,r)$: on a alors $V'_n = \psi_n(W'_n,H')$. D'après 4.11 on voit donc que $|V'_n| \le K_\alpha(|W'_n| + u_n|H'|)$ sur l'ensemble $G_\alpha = \{|W'_n|\le 1,\ |H'|\le\alpha\}$, dès que $n\ge N_\alpha$. Si alors $\alpha' = (1+\alpha)K_\alpha$ et $K''_\alpha = K'_{\alpha'}$, on a $|V'_n|\le\alpha'$ sur G_α, donc d'après (b):

$$Y'_n \le K''_\alpha V'^2_n \le 2K''_\alpha K'^2_\alpha(W'^2_n + u_n^2 H'^2) \le 2K''^2_\alpha K'^2_\alpha[g_1(W'_n) + u_n^2 g_1(H')],$$

$$Q(Y'_n 1_{G_\alpha}) \le 2K''^2_\alpha K'^2_\alpha\{Q[g_1(W'_n) + u_n^2 Q[g_1(H')]]\}.$$

Donc, d'après 6.5 il vient pour tout $\alpha>0$:

6.7 $$Q(Y'_n 1_{G_\alpha}) \longrightarrow 0$$

Il reste alors à écrire

$$\begin{aligned} Q(Y'_n) = {} & Q(Y'_n 1_{\{Y'_n>b\}}) + Q(Y'_n 1_{\{Y'_n\le b,\,|H'|>\alpha\}}) \\ & + Q(Y'_n 1_{\{Y'_n\le b,\,|H'|\le\alpha,\,|W'_n|>1\}}) + Q(Y'_n 1_{\{Y'_n\le b\}\cap G_\alpha}) \\ \le {} & Q(Y'_n 1_{\{Y'_n>b\}}) + bQ(|H'|>\alpha) + bQ(|W'_n|>1\} + Q(Y'_n 1_{G_\alpha}). \end{aligned}$$

D'après 6.5, 6.6, 6.7 et le fait que $\lim_{\alpha\uparrow\infty} Q(|H'|>\alpha) = 0$, il est alors facile de voir que $Q(Y'_n) \to 0$, ce qui est le résultat cherché. □

On en déduit d'abord le résultat annoncé après 2.7:

6.8 COROLLAIRE: <u>Si</u> $M\in\mathcal{H}^k_{loc}$, <u>sa projection sur</u> X <u>est dans</u> $\mathcal{H}^k_{0,loc}$.

<u>Preuve</u>. C'est un corollaire de la première assertion (presque trivia-

le) de 6.4, à savoir celle qui concerne 6.2.

Par hypothèse il existe une suite localisante (T_p) de temps d'arrêt telle que $E(\sum_{u\leq T_p} f_k(\Delta M_u)) < \infty$. On va appliquer 6.4 à $E = \tilde{\Omega}$, $\varsigma = \tilde{\mathcal{P}}$, et $H = \Delta M\, 1_{[\![0,T_p]\!]}$ qui vérifie 6.2. On a $H' = W\, 1_{[\![0,T_p]\!]}$, où $W = M_\mu^P(\Delta M|\tilde{\mathcal{P}})$, et H' vérifie aussi 6.2, à savoir $E(f_k(W)*\nu_{T_p}) < \infty$. Par suite $f_k(W)*\nu_t < \infty$ pour tout t, et d'après 5.5 on a aussi 5.6. Si $\overline{M}$ désigne la projection de M sur X, on a

$$\Delta\overline{M}_t = W(t,\Delta X_t)1_D(t) + \frac{\hat{W}_t}{1-a_t} 1_{\{a_t<1\}} 1_{D^c}(t).$$

Par suite le compensateur du processus croissant $G = \sum_{u\leq .} f_k(\Delta\overline{M}_u)$ est formellement $G' = f_k(V)*\nu + \sum_{u\leq .,a_u<1} (1-a_u)f_k[\hat{W}_u/(1-a_u)]$. Comme G' est prévisible et à valeurs finies (d'après ce qui précède), il est localement intégrable, et il en est donc de même de G, ce qui prouve que $\overline{M}\in\mathcal{M}^k_{0,loc}$. □

Pour la suite, nous avons besoin de quelques notations. Rappelons que $\Gamma^\theta = \{Z^\theta_->0\}$, et définissons une surmartingale locale sur Γ^θ par $Z'^\theta = (1/Z^\theta_-)\bullet Z^\theta$. On a la décomposition

6.9 $\quad Z'^\theta = M'^\theta - A'^\theta$, M'^θ est une martingale locale sur Γ^θ, A'^θ est un processus croissant prévisible sur Γ^θ, et $A'^\theta_0 = M'^\theta_0 = 0$.

Posons aussi sur Γ^θ:

6.10 $\quad K'^\theta = [a - a^\theta - {}^P(\Delta Z'^\theta 1_{D^c})]1_{\{a<1\}}$, $\quad U'^\theta = Y^\theta - 1 - M_\mu^P(\Delta Z'^\theta|\tilde{\mathcal{P}})$,

où ${}^P N$ désigne la P-projection prévisible du processus N.

6.11 LEMME: a) <u>On a</u> $\langle Z'^{\theta,c}, X^{i,c}\rangle = (c\beta)^i\bullet F$ <u>sur</u> Γ^θ.

b) <u>On a</u> $K'^\theta\geq 0$, $U'^\theta\geq 0$, <u>et le processus</u> $A'^\theta - \overline{A}'^\theta - U'^\theta*\nu - \sum_{u\leq .} K'^\theta_u$ <u>est croissant sur</u> Γ^θ (on a $\Gamma^\theta\subset\Sigma^\theta$ par 2.11).

c) <u>On a</u> $K'^\theta\leq 3$ <u>et</u> $U'^\theta\leq 3$ <u>sur</u> $\{Z^\theta_-\geq 1/2\}$.

<u>Preuve</u>. (a) et (b) constituent la proposition 6.3 de [4]. D'après la démonstration de cette dernière, rappelons aussi deux formules équivalentes à 6.10: soit $Q = (P+P_\theta)/2$, et z et z' les processus densité de P et P_θ par rapport à Q; on a alors $Z^\theta = z'/z$, et (si ${}^{p,Q}N$ désigne la Q-projection prévisible de N):

$$K'^\theta = 1_{\{a<1\}} \frac{1}{z'_-}\, {}^{p,Q}(z' 1_{\{z=0\}} 1_{D^c}), \qquad U'^\theta = \frac{1}{z'_-} M_\mu^Q(z' 1_{\{z=0\}}|\tilde{\mathcal{P}})$$

sur Γ^θ. On a aussi $1/z' = (1+Z^\theta)/2Z^\theta$, donc si $Z^\theta_-\geq 1/2$ il vient

$1/z'_- \leq 3/2$. Comme $z'\leq 2$ par construction, on en déduit (c). □

<u>Preuve du théorème 3.10</u>. a) On suppose $H1^{krs}$ avec $r\leq 2$ et $s\geq k$. On note $\overline{V}$ la projection de V sur X: d'après 6.8, on a 3.5. On pose aussi $W = M^P_\mu(\Delta V|\tilde{\mathcal{P}})$, et on considère $\gamma=(\gamma^{ij})_{i\leq d, j\leq q}$ prévisible tel que

$$6.12 \qquad (\gamma c)^{ij}\bullet F = \langle V^{i,c}, X^{j,c}\rangle = \langle \overline{V}^{i,c}, X^{j,c}\rangle \quad P\text{-p.s.}$$

Etant donné 2.7, on a 3.19 et $a=1 \Rightarrow \hat{W}=0$, et 3.5 implique alors 3.12. Vu le lemme 5.9, il reste à montrer que si $\zeta=(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$, il existe des temps d'arrêt S_n vérifiant 5.2 et 5.3, et on a 5.11.

b) Dans la suite on fixe $\zeta=(\theta_n,u_n,\theta)\in\tau$. On a $|Z^{\theta_n}-1|^*_t \xrightarrow{P} 0$ par 3.2, et on montre comme en 5.1 qu'il existe des temps d'arrêt S_n vérifiant 5.3 et

$$6.13 \qquad [\![0,S_n]\!] \subset \{Z_-^{\theta_n} \geq \tfrac{1}{2}\}$$

(donc aussi 5.2 car $\Gamma^\theta\subset\Sigma^\theta$), et les processus arrêtés $z^n = (Z^{\theta_n})^{S_n}$ vérifient A^{krs} avec $v = \theta^T V$. Donc d'après 4.8 les processus arrêtés $z'^n = (Z'^{\theta_n})^{S_n}$ vérifient B^{krs} avec $w = \theta^T V^c$ et $\delta = \theta^T\Delta V$.

Etant donnés 6.11(a) et 5.8, on a

$$H^{1,n}(\zeta) \leq \langle \frac{z'^{n,c}}{u_n} - w, \frac{z'^{n,c}}{u_n} - w\rangle \quad \text{sur } [\![0,S_n]\!],$$

de sorte que 4.6 implique 5.10 pour $i=1$. On a déjà vu que $H^{2,n}(\zeta) = \overline{A}'^{\theta_n}/u_n^s$, qui d'après 6.11(b) est majoré par A'^{θ_n}/u_n^s sur $[\![0,S_n]\!]$. Donc 5.10 pour $i=2$ découle de 4.7.

c) Notons B^n le premier membre de 4.5. Il existe une famille $(T_p,T(n,p))\in\mathcal{Q}$ telle que $E(B^n_{T(n,p)}) \to 0$ et $E(\sum_{u\leq T_p} f_k(|\Delta V_u|)) < \infty$, et $T(n,p)\leq S_n$.

Nous allons appliquer le lemme 6.5 à la mesure $Q = M^P_\mu$ sur $E = \tilde{\Omega}$, à la tribu $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{P}}$, et aux fonctions $H_n = \Delta z'^n\, 1_{[\![0,T(n,p)]\!]}$ et $H = \delta\, 1_{[\![0,T_p]\!]} = \theta^T\Delta V\, 1_{[\![0,T_p]\!]}$. On a 6.2, et aussi

$$6.14 \qquad Q[f_k(\frac{(1+H_n)^{1/r}-1}{u_n} - \frac{H}{r})] \leq E(B^n_{T(n,p)})+E[\sum_{T(n,p)<u\leq T_p} f_k(\frac{\theta^T\Delta V_u}{r})],$$

d'où 6.3. Par ailleurs $H' = \theta^T W\, 1_{[\![0,T_p]\!]}$ par définition de W, et 6.10 entraine $H'_n = (Y^{\theta_n} - 1 - U'^{\theta_n})1_{[\![0,T(n,p)]\!]}$. Donc si

$$H'^{3,n} = f_k[\frac{(Y^{\theta_n} - U'^{\theta_n})^{1/r} - 1}{u_n} - \frac{\theta^T W}{r}]*\nu,$$

le lemme 6.5 implique

6.15 $$E(H'^{3,n}_{T(n,p)}) \longrightarrow 0.$$

Apliquons une nouvelle fois le lemme 6.5 à la mesure Q suivante sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$: $Q(d\omega,dt) = P(d\omega)\sum_{u>0:\ 0<a_u(\omega)<1,(\omega,u)\notin D} \varepsilon_u(dt)$, qui est $\mathcal{P}$-σ-finie, à la tribu $\mathcal{G}=\mathcal{P}$, et aux mêmes fonctions H_n et H que ci-dessus. On a encore 6.2 et 6.14, donc 6.3. D'après la preuve du lemme 6.2 de [6] on a $H' = {}^{P}(H\, 1_{D^c})/(1-a)$, et de même pour H'_n. Etant donnés 6.10 et la définition de W, il vient alors

$$H' = [{}^{P}({}_{\theta}{}^{T}\Delta V) - {}^{P}({}_{\theta}{}^{T}\Delta V\, 1_D)]1_{[\![0,T_p]\!]}\, 1_{\{0<a<1\}}\, \frac{1}{1-a} = -\frac{{}_{\theta}{}^{T}\hat{W}}{1-a}\, 1_{[\![0,T_p]\!]},$$

$$H'_n = (a - a^{\theta_n} - K'^{\theta_n})\, \frac{1}{1-a}\, 1_{\{0<a<1\}}\, 1_{[\![0,T(n,p)]\!]}.$$

Par suite si

$$H'^{4,n} = \sum_{u\leq .,0<a_u<1} (1-a_u)\, f_k\Big[\frac{1}{u_n}\Big\{\Big(\frac{1-a_u^{\theta_n}}{1-a_u} - \frac{K_u'^{\theta_n}}{1-a_u}\Big)^{1/r}-1\Big\} + \frac{{}_{\theta}{}^{T}\hat{W}_u}{r(1-a_u)}\Big],$$

il vient

$$E(H'^{4,n}_{T(n,p)}) = E\Big[\sum_{u\leq T(n,p),0<a_u<1,u\notin D} f_k\Big[\frac{1}{u_n}\Big\{\Big(\frac{1-a_u^{\theta_n}- K_u'^{\theta_n}}{1-a_u}\Big)^{1/r}-1\Big\}+ \frac{{}_{\theta}{}^{T}\hat{W}_u}{r(1-a_u)}\Big]\Big]$$

$$= E\Big\{\sum_{u\leq T(n,p),0<a_u<1,u\notin D} f_k\Big[\frac{(1+H'_n)^{1/r}-1}{u_n} - \frac{H'}{r}\Big]\Big\}$$

$$\leq Q\Big[f_k\Big(\frac{(1+H'_n)^{1/r} - 1}{u_n} - \frac{H'}{r}\Big)\Big].$$

Donc 6.5 implique

6.16 $$E(H'^{4,n}_{T(n,p)}) \longrightarrow 0.$$

d) On a $f_k(x+y) \leq Kf_k(x) + Kf_k(y)$; on a aussi $x^{1/r} - (x-y)^{1/r} \leq y^{1/r}$ si $0\leq y\leq x$. Donc d'après 5.8,

6.17
$$\begin{cases} H^{3,n} \leq KH'^{3,n} + Kf_k[(U'^{\theta_n})^{1/r}/u_n]*\nu, \\ \\ H^{4,n} \leq KH'^{4,n} + K\sum_{u\leq .,0<a_u<1} (1-a_u)\, f_k\Big[\Big(\frac{K_u'^{\theta_n}}{1-a_u}\Big)^{1/r}/u_n\Big]. \end{cases}$$

Supposons que $u_n\leq 1$, et soit $x\in[0,3]$. Si $x^{1/r}/u_n \leq 1$ on a $f_k(x^{1/r}/u_n) = x^{2/r}/u_n^2 \leq x/u_n^r \leq x/u_n^k$ car $r\leq 2\wedge k$; si $x^{1/r}/u_n > 1$ on a $f_k(x^{1/r}/u_n) = x^{k/r}/u_n^k \leq 3^{k/r-1}\, x/u_n^k$. Donc dans tous les cas il vient $f_k(x^{1/r}/u_n) \leq K'x/u_n^k$. Etant donné 6.11(b,c), on voit donc que les derniers termes des deux expressions 6.17 sont majorées par $KK'A'^{\theta_n}/u_n^k$. Il suffit alors d'appliquer 6.15 et 6.16, 4.7, et le fait que $s\geq k$, pour obtenir 5.10 pour $i=3$ et $i=4$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELLACHERIE C., MEYER P.A. (1982): Probabilités et potentiel II, Hermann: Paris.

[2] EMERY M. (1979): Une topologie sur l'espace des semimartingales. Sém. Proba. XIII, Lect. Notes in Math. 721, 260-281. Springer Verlag: Berlin.

[3] JACOD J. (1979): Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714. Springer Verlag: Berlin.

[4] JACOD J. (1990): Sur le processus de vraisemblance partielle. A paraitre aux Ann. IHP.

[5] JACOD J. (1990): Regularity, partial regularity, partial information process, for a filtered statistical model. A paraitre dans Probab. Theory Rel. Fields.

[6] LECAM L. (1986): Asymptotic methods in statistical decision theory. Springer Verlag: Berlin.

[7] MEMIN J. (1980): Espaces de semimartingales et changements de probabilités. Z. Wahrsch. Verw. Geb. 52, 9-40.

[8] STRASSER H. (1985): Mathematical theory of statistics. De Gruyter: Berlin.