SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

YAO-ZHONG HU
PAUL-ANDRÉ MEYER

# Sur les intégrales multiples de Stratonovitch

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 22 (1988), p. 72-81
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__72_0>

Séminaire de Probabilités XXII

# SUR LES INTEGRALES MULTIPLES DE STRATONOVITCH

par Y.Z. Hu et P.A. Meyer

Ce travail est le développement d'idées introduites dans les articles de Meyer-Yan sur les distributions de Hida ( Sém. Prob. XXI ) et de Hu-Meyer sur l'intégrale de Feynman ( ce volume ). L'exposé qui suit présente plutôt des conjectures que des problèmes résolus.

## I. INTRODUCTION

1. Soit $\Omega$ l'espace canonique du mouvement brownien réel $(B_t)$ issu de 0 . Si $f_n$ est une fonction définie sur le simplexe $P_n=\{s_1<\ldots<s_n\}$ de $\mathbb{R}_+^n$, appartenant à $L^2(P_n)$, nous considérons l'intégrale multiple d'Ito ( intégrale itérée )

$$(1)\quad \int_{s_1<\ldots<s_n} f_n(s_1,\ldots,s_n)dB_{s_n}\ldots dB_{s_1} = J_n(f_n) = \frac{1}{n!}I_n(f_n)$$

Dans la dernière expression, la fonction $f_n$ a été prolongée par symétrie à $\mathbb{R}_+^n$ , sans changer de notation, et $I_n(f_n)$ est une intégrale étendue à $\mathbb{R}_+^n$. Si la fonction $f_n$ est suffisamment régulière ( nous reviendrons sur ce point ) on peut aussi définir une intégrale multiple de Stratonovitch ( le ° est la marque de Stratonovitch dans cet exposé )

$$(2)\quad \int_{s_1<\ldots<s_n} f_n(s_1,\ldots,s_n)d^\circ B_{s_n}\ldots d^\circ B_{s_1} = \overset{\circ}{J}_n(f_n) = \frac{1}{n!}\overset{\circ}{I}_n(f_n)$$

La relation entre les intégrales (1) et (2) peut être décrite de la manière suivante : définissons la <u>trace</u> d'une fonction symétrique de n variables comme la fonction symétrique de n-2 variables

$$(3)\qquad \mathrm{Tr}f_n(s_1,\ldots,s_{n-2}) = \int f_n(s_1,\ldots,s_{n-2},s,s)ds$$

( $\mathrm{Tr}f_n = 0$ si n=0 ou 1 ). Si l'on travaille sur les simplexes croissants, on a une forme plus compliquée : pour $s_1<s_2\ldots<s_{n-2}$

$$(4)\quad \mathrm{Tr}f_n(s_1,\ldots,s_{n-2}) = \int_0^{s_1} f_n(s,s,s_1\ldots,s_{n-2})ds + \int_{s_1}^{s_2} f_n(s_1,s,s,s_2,\ldots)ds$$
$$+ \ldots + \int_{s_n}^{\infty} f_n(s_1,\ldots,s_{n-2},s,s)ds \quad .$$

Alors on a la formule

$$(5)\qquad \overset{\circ}{J}_n(f_n) = \Sigma_{k\leq n/2}\ \frac{1}{2^k k!}\ J_{n-2k}(\mathrm{Tr}^k f_n)$$

que nous justifierons ci-dessous ( remarque a)). Sur les intégrales $I_n$ , on a une formule plus compliquée, mais peut être plus intuitive : l'intégrale d'Ito (1) ne comporte pas de contribution des diagonales de $\mathbb{R}_+^n$ . Appelons k-diagonale un ensemble de la forme $s_{i_1}=s_{j_1}\ldots s_{i_k}=s_{j_k}$ où tous les indices $i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k$ sont distincts. Le nombre des k-diagonales distinctes est $n!/(n-2k)!2^k k!$. D'autre part, si l'on calcule la contribution d'une k-diagonale par la règle usuelle $dB_s^2=ds$, on obtient $I_{n-2k}(\mathrm{Tr}^k f_n)$, et la formule (3) signifie que l'<u>intégrale de Stratonovitch</u> $\mathring{I}_n(f_n)=n!\mathring{J}_n(f_n)$ <u>s'obtient en ajoutant à $I_n(f_n)$ toutes les contributions diagonales</u>. Dans le cas brownien, on a $dB_s^k=0$ pour $k>2$, de sorte que les coincidences $s_i=s_j=s_k$ d'ordre $k>2$ n'ont pas à être comptées. Si l'on avait à définir des intégrales de Stratonovitch multiples pour le processus de Poisson, par exemple, il ne faudrait pas les oublier.

La formule (4) peut prendre une forme beaucoup plus agréable si l'on note $\underline{f}$ une <u>suite</u> $(f_n)$ de fonctions ( $f_n\in L^2(P_n)$ pour $n>0$ , $f_0\in\mathbb{R}$ ) et que l'on pose $J(\underline{f}) = \Sigma_n\ J(f_n)$ ( $J(f_0)=f_0$ ). Alors l'opérateur Tr peut être considéré comme transformant $\underline{f}$ en une nouvelle suite, et la formule (4) s'écrit

(6) $$\mathring{J}(\underline{f}) = \Sigma_k \frac{1}{2^k k!} J(\mathrm{Tr}^k\underline{f}) = J(e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}}\underline{f}) .$$

Mais alors la manière dont on calcule l'intégrale d'Ito à partir de l'intégrale de Stratonovitch est formellement évidente

(7) $$J(\underline{f}) = \mathring{J}(e^{-1/2\ \mathrm{Tr}}\underline{f}) = \Sigma_k \frac{(-1)^k}{2^k k!}\mathring{J}(\mathrm{Tr}^k\underline{f}) .$$

REMARQUES. a) Nous allons justifier partiellement la formule (5) ( nous donnerons plus loin une justification plus détaillée, ainsi que des commentaires sur la définition des traces qui y figurent ). Soit d'abord $(M_t)$ une semimartingale continue, nulle en 0, de crochet $(A_t)$. Il est bien connu que

(8) $$\int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} dM_{s_n}\ldots dM_{s_1} = A_t^{n/2}\ H_n(M_t/\sqrt{A_t})\ \text{( pol. d'Hermite)}$$

tandis que

(9) $$\int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} d^\circ M_{s_n}\ldots d^\circ M_{s_1} = \frac{1}{n!}M_t^n$$

Prenons maintenant $M_t=\int^t a(s)dB_s$, et $t=\infty$ ( $A_\infty=\langle a,a\rangle$, $M_\infty$ est noté $\tilde{a}$ dans les articles précédents ). L'intégrale (8) vaut $J_n(a^{\otimes n})$, et $\mathrm{Tr}^k(a^{\otimes n}) = \langle a,a\rangle^k a^{\otimes n-2k}$. Ainsi la formule (7) s'écrit

$$\langle a,a\rangle^{n/2}H_n(\tilde{a}/\sqrt{\langle a,a\rangle}) = \Sigma_{k\leq n/2}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\langle a,a\rangle^k\frac{1}{(n-2k)!}\tilde{a}^k$$

qui est l'expression classique des polynômes d'Hermite. On aurait un calcul plus simple en utilisant les vecteurs exponentiels, i.e. la suite $\underline{f}=(a^{\otimes n})_{n\geq 0}$ , ce qui revient a travailler sur la fonction génératrice des polynômes d'Hermite.

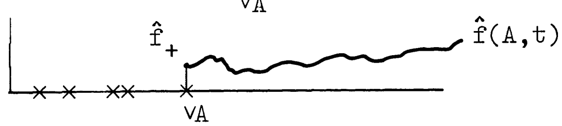
b) Cette remarque est un peu une digression, qui conduit à une justification plus précise de la formule (5). Nous utilisons la notation de Guichardet-Maassen pour les développements en chaos de Wiener, qui a été expliquée ailleurs ( Sém. XXI p. 34, et d'autres exposés de ce volume-ci ).

Considérons un processus adapté $(f_t)$. Chaque v.a. $f_t$ admet un développement en chaos de Wiener, que nous écrirons

$$f_t = \int_{\mathcal{P}} \hat{f}(A,t)dB_A$$

L'adaptation signifie que $\hat{f}(A,t)=0$ pour $A\not\subset[0,t[$ . Traçons le graphe de $\hat{f}(A,\cdot)$, et supposons le ( suivant les idées de Lindsay-Maassen ) de la forme

$$\hat{f}(A,t) = \hat{f}_+(A) + \int_{\vee A}^{t}\hat{f}'(A,s)ds \quad , \ t>\vee A \text{ ( le sup de A )}$$




Alors Lindsay et Maassen ont montré que, sous des conditions d'intégrabilité que nous ne préciserons pas, $(f_t)$ est une quasimartingale dont la partie à variation finie et la partie martingale sont

$$V_t = \int_0^t f'_s ds \ \ (f'_s = \int_{\mathcal{P}}\hat{f}'(A,s)dB_A) \ ; \ M_t = E[f_+|\mathcal{F}_t] \ ( \ f_+ = \int_{\mathcal{P}}\hat{f}_+(A)dB_A) \ .$$

Pour définir l'intégrale de Stratonovitch $\int f_s d^\circ B_s$ il nous faut connaître le terme correcteur $\frac{1}{2}[f,B]$, qui est ( au facteur 1/2 près ) le processus intervenant dans la représentation $M_t = E[M_t] + \int_0^t m_s dB_s$ . Ce processus est donné par

$$m_t = \int_{\mathcal{P}} \hat{m}_t(A)dB_A \quad , \quad \hat{m}_t(A) = \hat{f}_+(A+t) \quad ( \ t>\vee A \ )$$
$$= 0 \quad ( \ t\leq\vee A \ )$$

( nous avons écrit A+t au lieu de $A\cup\{t\}$ ). Nous désignons ce processus $(m_t)$ par $(f_t^+)$ ; ainsi on a $\hat{f}_t^+(A) = \lim_{u\downarrow\downarrow t} \hat{f}(A+t,u)$ pour $t>\vee A$ ( 0 sinon ) et l'intégrale de Stratonovitch vaut

$$\int_0^t f_s d^\circ \ _s = \int_0^t f_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_s^+ ds$$

Rien n'empêche maintenant de prendre cette formule comme définition, sous la seule réserve de l'existence des limites $\hat{f}_t^+(A)$ ( et des v.a. correspondantes ), mais sans exiger l'existence des dérivées $\hat{f}'(A,s)$. Faisons quelques calculs suivant ces règles.

1) $\int_0^t g(s)d^\circ B_s = \int_0^t g(s)dB_s$

2) Calculons l'intégrale de Stratonovitch itérée $\int_{s_1<s_2<t} g(s_1,s_2)d^\circ B_{s_1}d^\circ B_{s_2}$

Dans ce cas nous prenons $f_s = \int_0^s g(s_1,s)d^\circ B_s$ , et d'après 1) ci dessus on peut remplacer $d^\circ$ par d . Alors $\hat{f}(A,s)=g(s_1,s)$ si $A=\{s_1\}$ avec

$s_1<s$, et 0 sinon , de sorte que $\hat{f}_+(A,s)=\lim_{u\downarrow\downarrow s} g(s,u)$ si $A=\emptyset$, et 0 sinon. Il reste pour l'intégrale de Stratonovitch ( en désignant par $g(s,s)$ la limite précédente )

$$\int_{s_1<s_2<t} g(s_1,s_2)d^\circ B_{s_1}d^\circ B_{s_2} = \int_{\cdots} \ldots dB_{s_1}dB_{s_2} + \frac{1}{2}\int_0^t g(s,s)ds \quad .$$

Le calcul d'une intégrale itérée triple est instructif, et montre comment apparaissent les divers éléments de trace. Il apparaît clairement que c'est la définition de la trace par continuité, et non la définition hilbertienne de la trace, ( cf. Hu-Meyer [5] ) qui est naturelle dans ce problème.

c) Nous sommes certains que les intégrales multiples de Stratonovitch font partie du folklore, mais nous manquons de références précises, à l'exception de Benarous [2] qui étudie systématiquement des i.s. de Stratonovitch

$$\int_{s_1<\ldots<s_n<t} d^\circ X_{s_n}^{\varepsilon_n}\ldots d^\circ X_{s_1}^{\varepsilon_1}$$

où $\varepsilon_i$ prend les valeurs $0,\ldots,n$ : $dX_t^0=dt$, tandis que les $X_t^i$ $(i>0)$ sont des mouvements browniens indépendants.

2. Soit $\sigma$ un paramètre positif. Nous désignons par $\Omega_\sigma$ l'espace canonique pour le mouvement brownien $B_t^\sigma$ de même loi que $\sigma B_t$, et toutes les notations relatives à ce mouvement brownien seront affectées d'un $\sigma$, par exemple $I^\sigma(\underline{f})$, $\mathring{J}^\sigma(\underline{f})$... Ainsi, les formules (6), (7) prennent la forme suivante lorsqu'on introduit le paramètre $\sigma$

(10) $$\mathring{J}^\sigma(\underline{f}) = J^\sigma(e^{\frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{Tr}}\underline{f}) \ , \quad J^\sigma(\underline{f}) = \mathring{J}^\sigma(e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{Tr}}\underline{f}) \ .$$

Dans l'article Hu-Meyer [5], nous avons introduit une sorte de "prolongement analytique" des v.a. sur $\Omega$ en v.a. sur $\Omega_\sigma$ , que nous avions notées $f\mapsto f^\sigma$. Nous préférons ici le noter $M_\sigma f$ , le M rappelant que $M_\sigma f$ est en quelque sorte "la même v.a." que $f$ . Ce prolongement obéit aux règles suivantes : $M_\sigma 1=1$ ; $M_\sigma B_t=B_t^\sigma$ ( plus généralement, $M_\sigma(\int a_s dB_s) = \int a_s dB_s^\sigma$ si a(.) est une fonction déterministe ) ; enfin, la correspondance est <u>multiplicative</u>, pour le produit ordinaire des v.a. sur $\Omega$ et $\Omega_\sigma$. Dans l'article [5], nous avons calculé $M_\sigma$ :

(11) $$M_\sigma(J(\underline{f})) = J^\sigma(e^{\frac{(\sigma^2-1)}{2}\mathrm{Tr}}\underline{f}) \ .$$

En rapprochant cette formule de (9), on obtient la formule intéressante

(12) $$M_\sigma(\mathring{J}(\underline{f})) = \mathring{J}^\sigma(\underline{f})$$

qui illustre bien la simplicité du calcul de Stratonovitch.

3. Nous pouvons maintenant présenter le but de ce travail, qui ne sera atteint que très partiellement.

A) Soient U et $U_\sigma$ deux v.a. sur $\Omega$ et $\Omega_\sigma$ respectivement, telles que $U_\sigma = M_\sigma(U)$. A quelles conditions sur la fonction a peut on montrer que $a\circ U_\sigma = M_\sigma(a\circ U)$ ?

B) Soient $(f_t)$ et $(f_t^\sigma)$ deux processus adaptés définis sur $\Omega$ et $\Omega_\sigma$ respectivement, et tels que $f_t^\sigma = M_\sigma(f_t)$ pour tout t . A quelles conditions peut on montrer que

$$\int f_s^\sigma d^\circ B_s^\sigma = M_\sigma\Big( \int f_s d^\circ B_s \Big) \ ?$$

C) Considérons les solutions de deux équations différentielles de Stratonovitch, admettant les mêmes coefficients

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s) d^\circ B_s + \int_0^t b(X_s)ds \quad , \quad X_t^\sigma = x + \int_0^t a(X_s^\sigma) dB_s^\sigma + \int_0^t b(X_s^\sigma)ds$$

sur $\Omega$ et $\Omega_\sigma$ respectivement. Peut on affirmer que $X_t^\sigma = M_\sigma(X_t)$ ?

Ces trois propriétés sont intuitivement évidentes : par exemple, la définition de $M_\sigma$ a été conçue pour exprimer A) lorsque la fonction a est un polynôme, et U un vecteur exponentiel. La propriété B) a été vérifiée plus haut dans des cas simples. Quant à la propriété C), elle est formellement évidente à partir de A) et B) si l'on résout l'é.d.s. par la méthode d'itération. Ce qui manque dans les trois cas, c'est une bonne topologie permettant de passer à la limite, à la fois sur les traces et sur les intégrales de Stratonovitch.

La suite de l'exposé présente l'état du problème au moment où le volume XXII est rassemblé ( Novembre 87 ), en espérant que ces sujets intéresseront d'autres mathématiciens.

## II. QUELQUES RESULTATS PARTIELS

1. Une norme permettant le contrôle de l'intégrale de Stratonovitch.

Il va être essentiel ici de se placer sur un intervalle borné $[0,a]$ au lieu de $\mathbb{R}_+$ entier. On désigne par $\mathcal{I}$ cet intervalle, par $P_n$ l'ensemble des n-uples $s_1<\dots<s_n\leq a$ , par $\overline{P}_n$ l'ensemble des n-uples $s_1\leq\dots\leq s_n\leq a$. Soit $\underline{f}=(f_n)$ une suite de fonctions boréliennes, la notation $f_n$ désignant à la fois une fonction symétrique sur $\mathcal{I}^n$, et sa restriction à $\overline{P}_n$ ou $P_n$ . Nous écrivons comme en (1)

$$J(\underline{f}) = \Sigma_n J_n(f_n) = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(f_n)$$

et de même comme en (5) pour l'intégrale de Stratonovitch. La seule différence est le fait que tout est nul hors de $[0,a]$.

Nous avons d'après (5)

$$\mathring{J}(\underline{f}) = \Sigma_n J_n\Big( \Sigma_k (2^k k!)^{-1} \mathrm{Tr}^k f_{n+2k} \Big)$$

et par conséquent

(1) $\qquad \|\overset{\circ}{J}(\underline{f})\|_2^2 = \Sigma_n |\mu_n(\underline{f})|^2$

$\mu_n$ est une certaine mesure positive sur la somme des $\mathcal{J}^n$ ( ou des $\overline{P}_n$ : cela revient au même )

$$\mu_n(\underline{f}) = \int_{P_n} \Sigma_k \, (2^k k!)^{-1} \mathrm{Tr}^k f_{n+2k}$$

Cette mesure est bornée : $\mathrm{Tr}^k 1 = a^k$, donc $\mu_n(1) = e^{a/2}\int_{P_n} 1 = e^{a/2} a^n/n!$ . L'inégalité de Schwarz nous donne

(2) $\qquad \|\overset{\circ}{J}(\underline{f})\|_2^2 \leqq e^{a/2}\,\mu(\underline{f}^2) \qquad$ où $\mu = \Sigma_n \mu_n$

La mesure $\mu$ est bornée, de masse $e^a$ . Si h appartient à $L^2(\mathcal{J})$ et $f_n = h^{\otimes n}$ on a $\mathrm{Tr}^k f_{n+2k} = \langle h,h\rangle^k f_n$ , $\mu_n(f) = \exp(\frac{1}{2}\langle h,h\rangle)(\int h(t)dt)^n/n!$ , et $\mu(f) = \exp(\int h(t)dt + \frac{1}{2}\langle h,h\rangle)$ : la majoration précédente ne permet d'établir que $\overset{\circ}{J}(\underline{f})$ est dans $L^2$ que si $\mu(\underline{f}^2)<\infty$ , ce qui exige que l'on remplace h par $h^2$, et donc que h appartienne à $L^4$ : notre majoration est donc assez grossière, car $\overset{\circ}{J}(\underline{f}) = \exp(\int h(s)dB_s)$ appartient à $L^2$ pour $h\in L^2$.

Quoi qu'il en soit, considérons d'abord une suite $\underline{f}=(f_n)$ de fonctions boréliennes ( sur les $\overline{P}_n$ , ou symétriques sur les $\mathcal{J}^n$ ), telle que l'on ait $\Sigma_n \mu_n(|f_n|)^2 < \infty$ . Ceci est une condition minimale pour l'application de la formule (5) ; on remarquera qu'il s'agit de fonctions et non de classes, et que les valeurs de ces fonctions sur $\overline{P}_n$ ne sont pas déterminées par leurs valeurs sur $P_n$ ; autrement dit, elles ne sont pas déterminées par les v.a. qui leurs correspondent sur l'espace de Wiener. Notre première remarque sera que si l'on désigne par $\underline{f}^k$ la fonction tronquée de $\underline{f}$ à k ( $\underline{f}^k = (f_n^k)$ ), $\overset{\circ}{J}(\underline{f}^k)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $\overset{\circ}{J}(\underline{f})$. Mais après troncation on a $\mu(\underline{f}^{k2})<\infty$ . Cela permet de limiter les raisonnements sur l'intégrale de Stratonovitch aux fonctions vérifiant une estimation du type (2).

Considérons ensuite les fonctions $\underline{f}$ du type $f_n = h^{\otimes n}$ , avec $|h|\leq 1$ : elles sont uniformément bornées, et forment un ensemble stable par multiplication, qui contient la constante 1 ( correspondant à h=0 ! ), qui engendre toute la tribu symétrique sur la somme des $\mathcal{J}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces fonctions est donc dense dans $L^2(\mu)$, par le théorème des classes monotones. Mais alors, on voit qu'en passant à la limite à partir des vecteurs exponentiels, on obtient des fonctions de $L^2(\mu)$ <u>dont les valeurs sur les diagonales sont entièrement arbitraires</u> ( ne sont déterminées en aucune manière par les valeurs sur les $P_n$). Le problème de la définition des traces ( par passage à la limite, ou par un procédé hilbertien ) est donc mal posé : si les $f_n$ sont peu régulières, leurs valeurs diagonales doivent être <u>données</u>, non calculées.

2. Une expression des traces. Pour calculer les traces de $f=(f_n)$, il n'est pas nécessaire de connaître $f_n(s_1,\dots,s_n)$ sur $\mathcal{J}^n$ ou $\overline{P}_n$ entier, autrement dit sur les n-uples à coincidences multiples

$$(s_1=s_2\dots=s_{i_1})<(s_{i_1+}=\dots=s_{i_1+i_2})<\dots<(s_{i_1+\dots+i_{m-1}+1}=\dots=s_n)$$

La mesure $\mu$ est portée par l'ensemble des n-uples admettant au plus des coincidences simples, que nous noterons

$$(s_1<\dots<\underline{s}_{i_1}\dots<\underline{s}_{i_k}\dots<s_n)$$

où les k indices soulignés comptent double ( i.e. doivent être remplacés par $s_{i_1}=s_{i_1+1}\dots s_{i_k}=s_{i_k+1}$). Comment calcule t on $Tr^k f_{n+2k}=g_n$ pour une fonction donnée de cette manière ? Voici la règle qui donne le résultat.

Remarquons d'abord que pour calculer une intégrale de Stratonovitch nous n'avons besoin de connaître que $g_n(s_1,\dots,s_n)$ sur $P_n$, autrement dit aucun indice n'est souligné. Nous plaçons alors

entre 0 et $s_1$ $p_1$ indices $t_1^1<\dots<t_{p_1}^1$ ( $p_1\geqq 0$ )
entre $s_1$ et $s_2$ $p_2$ indices $t_1^2<\dots<t_{p_2}^2$
....
entre $s_n$ et $+\infty$ ( ou plutôt a si l'on travaille sur $[0,a]$ )
$p_{n+1}$ indices $t_1^{n+1}<\dots<t_{p_{n+1}}^{n+1}$

où $p_1+\dots+p_{n+1}=k$ . On somme sur tous les choix possibles des $p_i$ les intégrales

$$(3)\qquad \int_{\substack{0<t_1^1<\dots<t_{p_1}^1<s_1\\ \dots\\ s_n<t_1^{n+1}\dots<t_{p_{n+1}}^{n+1}}} \begin{array}{l} f_{n+2k}(\underline{t}_1^1,\dots\underline{t}_{p_1}^1,s_1,\underline{t}_1^2\dots,\underline{t}_{p_2}^2,s_2,\dots s_n,\dots\underline{t}_{p_{n+1}}^{n+1}) \\ \dots\qquad dt_1^1\dots dt_{p_1}^1\dots dt_{p_{n+1}}^{n+1}\end{array}$$

<u>La somme de toutes ces intégrales est alors, non pas</u> $Tr^k f_{n+2k}$ , <u>mais</u> $Tr^k f_{n+2k}/k!$ . Ce mode de calcul ( qui s'applique aussi aux n-uples à j indices soulignés : il y a seulement n+1-j entiers $p_i$ au lieu de n+1 ) s'établit par une fastidieuse récurrence sur k .

3. Application aux e.d.s. Rappelons les notations de l'article [ ].

Considérons l'e.d.s. ( au sens de Stratonovitch ici, mais les résultats de [5] s'appliquent sans changement ).

$$(4)\qquad X_t = x+\int_0^t a(X_s)d^\circ B_s + \int_0^t b(X_s)ds$$

Développons $h(X_t)$ en intégrales <u>d'Ito</u>

$$(5)\qquad h(X_t) = \Sigma_n \int_{P_n} F_{n,t}(s_1,\dots,s_n\ ;\ x,h)dB_{s_1}\dots dB_{s_n}$$

On a tout d'abord

$$(6)\qquad F_{n,t}(\cdot;x,h) = \int F_{n,t}(\cdot;x,y)h(y)dy$$

Ensuite, si l'on désigne par $u\square v$ la composition $\int u(.,z)v(z,.)dz$ de deux fonctions $u(x,y)$, $v(x,y)$, on a

(7) $$F_{n,t}(s_1,\dots,s_n;.,.) = p_{s_1}\square ap'_{s_2-s_1}\square\cdots\square ap'_{t-s_n}$$

où $p_t(x,y)$ est la solution élémentaire de l'équation parabolique associée à (4), et $p'_t(x,y)$ est sa dérivée en x ( enfin $ap'_t(x,y)=a(x)p'_t(x,y)$).

Si l'on remplace $B_t$ par $B^\sigma_t$ , la solution élémentaire devient $p^\sigma_t(x,y)$ et les coefficients du développement en chaos $F^\sigma_{n,t}$ . La formule que nous cherchons à établir s'écrit

(8) $$F^\sigma_{n,t} = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma^2-1)^k}{2^k k!} \mathrm{Tr}^k F_{n+2k,t}$$

Cette série convergeant, on l'espère, dans $L^2(\rho_n)$ - au moins après multiplication par $h(y)$ et intégration en y. En particulier, pour n=0

(9) $$p^\sigma_t(x,y) = \Sigma_k \frac{(\sigma^2-1)^k}{2^k k!} \mathrm{Tr}^k F_{2k,t}$$

qui est une propriété d'analyticité de la solution de l'équation de Stratonovitch par rapport au paramètre $\sigma$, et en même temps identifie les traces $\mathrm{Tr}^k F_{2k,t}$ comme les dérivées k-ièmes de $p^\sigma_t$ par rapport à $\sigma^2$, pour $\sigma=1$.

Ce que nous allons montrer, en nous appuyant sur le calcul de traces précédent, c'est que la formule générale (8) se ramène à la formule (9), et à la formule analogue que l'on obtient en dérivant en x ( et dont la validité n'est pas une conséquence triviale de (9) ! ). Pour voir cela, on remarque que

$$F^\sigma_{n,t}(s_1,\dots,s_n) = F^\sigma_{n-1,s_n}(s_1,\dots,s_{n-1})\square ap'_{t-s_n}$$

On raisonne par récurrence sur n, et on est ramené à vérifier que pour tout $\ell$

$$\frac{1}{\ell!}\mathrm{Tr}^\ell F_{n+2\ell}(s_1,\dots,s_n) = \Sigma_{j+k=\ell} \frac{1}{j!k!}\mathrm{Tr}^j F_{n-1+2j,s_n}(s_1,\dots,s_{n-1}) \square a\mathrm{Tr}^k F'_{2k,t-s_n}$$

Compte tenu de l'expression donnée au paragraphe précédent pour $\mathrm{Tr}^k/k!$, on s'aperçoit que cela revient à développer $\mathrm{Tr}^\ell F_{n+2\ell,t}/\ell!$ suivant la valeur du dernier entier $p_{n+1}$ , dans la formule (3) .

En reprenant les majorations des coefficients $F_{n,k}$ que nous avons données dans [5], nous pensons avoir démontré que la série au second membre de (9) est effectivement convergente au voisinage de $\sigma=1$ - mais cela ne prouve pas que sa somme est égale au premier membre, et pour cette raison nous nous sommes abstenus de recopier les calculs, qui sont lourds ( et n'ont pas été complètement vérifiés ).

Nous allons maintenant rapprocher la formule (9) d'une formule de théorie de perturbations. Considérons deux semi-groupes $(P_t)$ et $(Q_t)$ qui s'écrivent formellement

$$P_t = e^{tH} \qquad Q_t = e^{t(H+K)}$$

Alors on a formellement

$$(10) \qquad Q_t = P_t + \Sigma_{n \geqq 1} \int_{s_1<\dots<s_n<t} P_{s_1} K P_{s_2-s_1} K \dots K P_{t-s_n} ds_1 \dots ds_n$$

Pour appliquer cette formule, nous posons

$$Uf(x) = a(x)\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \; Vf(x) = b(x)\frac{\partial f}{\partial x}$$

( il paraîtrait naturel de noter ces opérateurs A et B, mais A désigne dans [5] l'adjoint de U ). Le générateur infinitésimal du semi-groupe associé à l'e.d.s. de Stratonovitch est

$$L_\sigma = \frac{\sigma^2}{2}U^2 + V$$

Posant donc $H = \frac{1}{2}U^2 + V$ , $K = \frac{\sigma^2 - 1}{2}U^2$, $H+K = L_\sigma$ , la formule (10) nous donne un développement formel

$$(11) \qquad P_t^\sigma = P_t + \Sigma_{n \geqq 1} \frac{(\sigma^2-1)^n}{2^n} \int_{s_1<\dots<s_n<t} P_{s_1} U^2 \dots U^2 P_{t-s_n} ds_1 \dots ds_n$$

Nous allons vérifier que ce développement est précisément celui qu'indique la formule (9). Pour cela, il faut calculer $\mathrm{Tr}^k F_{2k,t}/k!$ par la formule (3) de ce paragraphe, ce qui nous amène au calcul de la fonction à coincidences multiples $F_{2k,t}(\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_k)$. Celui-ci est fait dans [5], § III, (11) ( il y a une petite différence : ici la première variable est elle aussi double ) :

$$F_{2k,t}(\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_k) = Ap_{t_1} [\![ aAp'_{t_2-t_1} ]\!] \dots [\![ aAp'_{t_k-t_{k-1}} ]\!] ap'_{t-t_k}$$

Si $h(x,y)$ est une fonction de deux variables, $Ah(x,y) = -D_y(h(x,y)a(y))$. Une chaîne d'intégrations par parties permet de faire apparaître l'opérateur U

$$F_{2k,t}(\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_k) = p_{t_1} [\![ U^2 p_{t_2-t_1} ]\!] \dots [\![ U^2 p_{t_k-t_{k-1}} ]\!] U^2 p_{t-t_k}$$

et on reconnaît alors la formule (11) ci-dessus.

4. Rapport avec certains calculs sur les équations différentielles.

Il est bien connu ( nos sources à cet égard sont Fliess [3], Fliess et Norman-Cyrot [4], et Benarous [2] ) que le cas limite de l'équation différentielle stochastique

$$X_t^\sigma = x + \int_0^t a(X_s^\sigma) d^\circ B_s^\sigma + \int_0^t b(X_s^\sigma) ds$$

pour $\sigma \downarrow 0$ est une équation différentielle ordinaire dépendant d'un paramètre de contrôle $w(t)$ appartenant à l'espace de Cameron-Martin ( i.e. $\dot{w}(t)$ existe au sens $L^2$ )

$$\xi_t(w) = x + \int_0^t a(\xi_s)\dot{w}(s) ds + \int_0^t b(\xi_s) ds$$

Dans ces conditions, Fliess ([2], prop. III.4 p.26 ) donne un développement explicite de la solution sous la forme d'une série de Volterra convergeant pour t petit, du moins lorsque les coefficients de l'équation sont analytiques et les contrôles $\dot{w}(t)$ continus par morceaux. Nous allons recopier cette formule : $R_t$ y désigne le semi-groupe $e^{tV}$ ( c'est à dire $P_t^\sigma$ pour $\sigma=0$, correspondant à une diffusion déterministe )

$$(12) \qquad h(\xi_t) = R_t(h) + \Sigma_{n\geqq 1} \int_{s_1<\ldots<s_n<t} G_{n,t}(s_1,\ldots,s_n;h)\dot{w}(s_1)\ldots\dot{w}(s_n)\, ds_1\ldots ds_n$$

$$G_{n,t}(s_1,\ldots,s_n;h) = R_{s_1}UR_{s_2-s_1}U\ldots UR_{t-s_n}h$$

Si la conjecture que nous présentons ici est vraie ( et les résultats de Benarous la rendent extrêmement vraisemblable pour les é.d.s. à coefficients analytiques ), nous avons pour toute valeur de $\sigma$

$$h(X_t^\sigma) = R_t(h) + \Sigma_{n\geqq 1} \int_{s_1<\ldots<t} G_{n,t}(s_1,\ldots,s_n;h)d^\circ B_{s_n}\ldots d^\circ B_{s_1}$$

et en passant aux intégrales d'Ito par la formule (6) du §I

$$F^\sigma_{n,t}(\cdot,h) = \Sigma_{n\geqq 0} \frac{\sigma^{2k}}{2^k k!} Tr^k G_{n+2k,t}(\cdot,h) \quad .$$

C'est une formule curieuse. Néanmoins, dans ce travail, nous avons fait beaucoup d'algèbre, et donné bien peu de justifications analytiques !

REFERENCES

[1] AZENCOTT (R.). Formule de Taylor stochastique et développements asymptotiques d'intégrales de Feynman. Sém. Prob. XVI bis, 1980, p. 237-284 . Lect. Notes in M. 921.

[2] BENAROUS (G.). Flots et séries de Taylor Stochastiques. Article à paraître.

[3] FLIESS (M.). Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. Bull. Soc. M. France 109, 1981, p.3-40.

[4] FLIESS (M.) et NORMAN-CYROT (D.). Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de Chen. Sém. Prob. XVI, 1980-81, p. 257-2 7. Lect. Notes in M. 920.

[5] HU (Y.Z.) et MEYER (P.A.). Chaos de Wiener et intégrale de Feynman. Dans ce volume.

I.R.M.A.
7 rue du G$^{al}$ Zimmer
67084 Strasbourg-Cedex

Institut de Recherche Mathématique.
Academia Sinica
Wu Han ( R.P. de Chine)