AZZOUZ DERMOUNE
PAUL KRÉE
LI-MING WU

Calcul stochastique non adapté par rapport à la mesure aléatoire de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 477-484
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__477_0>

CALCUL STOCHASTIQUE NON ADAPTE

PAR RAPPORT A LA MESURE ALEATOIRE DE POISSON

par A. Dermoune, P. Krée et L. Wu.

Récemment le calcul de distributions sur l'espace de Wiener a permis d'obtenir quelques extensions du calcul stochastique de Ito [D.OC.84] [NU et E.PA 86] [A.S.US 85] [A.S.US 86]. Le présent travail donne d'abord par rapport à [P.KR.87] des résultats complémentaires sur le calcul de distributions sur l'espace de Poisson. Puis ce calcul est utilisé pour étendre le calcul stochastique relatif aux processus ponctuels de Poisson. On considère par exemple un processus de Poisson marqué sur $T =]0,1[$. La marque est définie par un espace localement compact polonais Y dénombrable à l'infini, $T \times Y$ est muni d'une mesure positive bornée $\rho = \rho(dt,dy)$ telle que $\rho(\{t\} \times Y) = 0$ pour tout $t \in T$. Soit $X = M_p(T \times Y)$ l'espace des mesures ponctuelles bornées $x = \Sigma_1^N \delta_{t_i,y_i}$ sur $T \times Y$ muni de la mesure de Poisson P d'intensité ρ ; X muni de sa topologie polonaise usuelle . L'espace vectoriel vect(X) engendré par X est l'espace des combinaisons linéaires $\Sigma \lambda_j \delta_{t_j,y_j}$ où les λ_j sont réels. Soit p le processus ponctuel de Poisson sur $T \times Y$ défini par P et soit $q = p-\rho$ le processus compensé associé à p . On pose $Y_t = p(]0,t[\times Y)$, $\tilde{Y}_t = q(]0,t[\times Y)$, $\mathcal{F}_t$ la tribu du passé à l'instant t i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma\{p(]0,s[\times A) , s < t \text{ et } A \in B_Y\}$.

L'espace vectoriel $X' = Et(T \times Y)$ engendré par les indicatrices $1\!\!1_{]0,s]\times A}$, $A \in B_Y$ s'identifie à un sous espace vectoriel dense de $H = L^2_\rho(T \times Y)$. De plus X' est en dualité avec Vect(X) et engendre la tribu Borélienne de X . L'espace $P_n(X)$ des polynômes cylindriques homogènes de degré n sur X est défini pour $n = 1$ comme engendré par les restrictions à X des formes linéaires $x \to x(]0,s] \times A)$ sur Vect(X) et pour $n \geq 1$ comme l'espace vectoriel engendré par les puissances n^{e} de ces formes. On travaille avec l'espace $P(X) = \Sigma_0^\infty P_n(X)$ des polynômes cylindriques comme espace de fonctions d'épreuves. Noter que [BI.GR.JA] et [WU 87] utilisent un autre espace de fonctions d'épreuves. Nous remercions P.A. Meyer et M. Yor qui nous ont aidé à mettre ce travail sous la présente forme.

I. Calcul de distribution sur l'espace de Poisson.

(I.1) Triplets et distributions.

En transposant l'injection à image dense de $P(X)$ dans $L^2(X)$ il vient le triplet

(I.2) $\quad P(X) \subset L^2(X) \subset P(X)^*$.

Un triplet ($K_i \subset K_m \subset K_i^*$) a un espace interne K_i sans topologie et un espace hilbertien médian K_m et un espace externe. On obtient un tel triplet en se donnant un sous espace dense K_i d'un espace de Hilbert séparable K_m, en identifiant cet espace à son dual, puis en transposant l'injection $K_i \subset K_m$. L'espace externe est le dual algébrique de K_i ; il est systématiquement muni de la topologie faible. Un sous espace normal de ce triplet est défini comme tout Banach B tel que $K_i \subset B \subset K_i^*$, la première de ces injections ayant une image dense, la deuxième étant continue. Des opérations naturelles de somme, produit tensoriel... peuvent être faites sur les triplets. Notons par exemple $S_n(X') = \odot_n X'$ puis $\sqrt{n!}\ S_n(H)$ le produit tensoriel symétrique complété dont la norme $\|.\|_n$ a été multipliée par $\sqrt{n!}$. D'où le triplet $S_n(X') \subset \sqrt{n!}\ S_n(H) \subset Pol_n(X')$ = les polynômes homogènes de degré n sur X'. D'où par somme directe des espaces internes et somme Hilbertienne des espaces médians le triplet suivant

(I.3) $\quad S(X') \subset \text{Fock } H = \oplus \sqrt{n!}\ S_n(H) \subset \hat{Pol}(X')$

où $\hat{Pol}(X') = \Pi\, Pol_n(X')$ est l'espace des séries formelles sur X'. Par exemple pour tout u fixé $\in X'$, l'exponentielle $e^u \in$ Fock H est caractérisé par la série convergente $\Sigma(u.z)^n/n!$ avec $u.z = \langle u,z\rangle_H$ et l'on a $F(z) = \langle F,e^z\rangle$ pour tout $F \in$ Fock H.

La décomposition en chaos donne une isométrie bijective I : Fock $H \to L^2(X)$ induisant une bijection de $S(X')$ sur $P(X)$. Or [J.NE 68] explicite les vecteurs exponentiels $\varepsilon(u) = I(e^u)$. Donc $F = I^{-1}(f)$ est connu explicitement en fonction de f car I étant isométrique, elle conserve les produits scalaires et par conséquent

(I.4) $\quad F(z) = \langle F,e^z\rangle = E[f\varepsilon(z)]$.

Vus les habillages (I.3) et (I.2) de l'espace de Fock et de $L^2(X)$, I^{-1} se prolonge en un isomorphisme de ces triplets d'habillage.

I.5. Forme explicite des annihilateurs $a(B)$ et des créateurs $a^+(B)$.

Annihilateurs, créateurs, opérateur du nombre de particules N... sont définis sur X de manière à ce qu'ils correspondent par I^{-1} aux opérations que l'on connaît dans l'espace de Fock. Donc $\forall\, h \in X'$

(I.6) $\quad a(h)\ F_j(z^j) \to j\ F_j(z^{j-1},h)$; $a^+(h) : F(z) \to hz\ F(z)$ ...

Si $h = \mathbb{1}_B$, on écrit simplement $a(B)$ et $a^+(B)$. Pour expliciter les opérations correspondantes sur X, introduisons les opérations suivantes de différence avancée (ou à droite) et de différence retardée (ou à gauche) sur l'ensemble des suites φ indexées dans Z.

(1.7) $\quad \varphi(x) \xrightarrow{\Delta} \varphi(x+1) - \varphi(x)$; $\varphi(x) \xrightarrow{\Delta'} \varphi(x) - \varphi(x-1)$.

Utilisons le produit scalaire $<\varphi,\psi> = \Sigma\, \varphi(x)\, \psi(x)$ sur l'ensemble des suites bilatérales à support fini. Le transposé de Δ est $-\Delta'$. Pour tout $\lambda > 0$, P_λ désigne la suite bilatérale nulle pour $x < 0$ et telle que $p_\lambda(x) = e^{-\lambda}\, \lambda^x/(x!)$ si $x > 0$. On sait que pour tout borélien $B =]0,s] \times A$ de mesure λ de $T \times Y$, et pour tout entier $x > 0$ on a

$$(I.8) \qquad I(1\!\!1_B^{\otimes n}) = C_n(\lambda,.).\, 1\!\!1_B$$

où $x \to C_n(\lambda,x)$ désigne le polynôme de Charlier

$$(I.9) \qquad C_n(\lambda) = C_n(\lambda,.) = (-1)^n\, (\Delta'^n\, p_\lambda)\, P_\lambda^{-1} .$$

Par ailleurs un calcul combinatoire donne

$$(I.10) \qquad \lambda\, \Delta\, C_n(\lambda) = n\, C_{n-1}(\lambda)$$

La définition (I.6) des annihilateurs donne d'abord du côté de l'espace de Fock.

$$(I.10) \qquad a(B)(1\!\!1_B^{\otimes n}) = n\lambda 1\!\!1_B^{\otimes(n-1)} . \quad \text{D'où} \quad a(B)\, C_n(\lambda) = nC_{n-1}(\lambda)$$

Donc vu (I-10), $a(B)$ restreint aux polynômes cylindriques sur X qui se factorisent à travers la forme linéaire définie par $1\!\!1_B$, se lit ainsi sur $\mathbb{N}$.

$$(I.12) \qquad a(B) = \lambda\, \Delta : f(x) \to \lambda(f(x+1) - f(x)) .$$

Un argument de transposition entraine que $a^+(1\!\!1_B)$ restreint de la même manière se lit ainsi

$$(I.13) \qquad a^+(1\!\!1_B) = (x-\lambda). - x\, \Delta' : g(x) \to (x-\lambda)\, g(x) - x(g(x) - g(x-1)).$$

P.A. Meyer et J. Yan (non publié 1986) ont trouvé une autre expression de $a^+(h)$ pour des h plus généraux. Pour obtenir grad et div , tensorisons les deux triplets (I.2) (I.3) avec le triplet $X' \subset H \subset X'^*$. En tensorisant I^{-1} avec l'application identique de ce triplet, on obtient un prolongement de I^{-1} aux distributions vectorielles.

$$(I.14) \qquad \begin{array}{ccccc} P(X) \otimes X' & \hookrightarrow & L^2(X,H) & \hookrightarrow & (P(X) \otimes X')^* \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow I^{-1} \\ S(X') \otimes X' & \hookrightarrow & (\text{Fock } H) \otimes H & \hookrightarrow & \hat{Pol}(X',X'^*) \end{array}$$

Regardant du côté de l'espace de Fock, l'opération D de dérivation des séries formelles et sa transposée D^T apparaissent comme étant

$$(I.15) \qquad F_j(z^j) \xrightarrow{D} j\, F_j(z^{j-1}h) \quad \text{et} \quad F(z)h \xrightarrow{D^T} F(z)z$$

induisent des applications notées D' et D'^T sur les séries formelles d'épreuve.

Par transport de structure, cela signifie que les applications ∇ et δ sur les distributions qui correspondent resp. à D et D^T induisent des applications notées ∇' et δ' sur les polynômes cylindriques. On peut donc écrire des formules d'intégration par parties du côté distribution

$$\text{(I.16)}\qquad \begin{array}{ccc} P(X) & \hookrightarrow & P(X)^* \\ \nabla'\downarrow\uparrow\delta' & & \nabla\downarrow\uparrow\delta \\ P(X)\otimes X' & \hookrightarrow & (P(X)\otimes X')^* \end{array} \qquad \begin{array}{l} <\nabla f,\vec{g}> \,=\, <f,\delta' g> \\ \\ <\delta\vec{g},f> \,=\, <g,\nabla' f> \end{array}$$

Ainsi ∇' et δ' se prolongent par continuité aux distributions. Noter que

$$\text{(I.17)}\qquad D(e^h) = e^h\otimes h \quad\Rightarrow\quad \nabla(\varepsilon^h) = \varepsilon^h\otimes h$$

et qu'on connait explicitement ∇' et δ' :

(I.18) <u>Formules pratiques</u>.

Considérons un polynôme cylindrique $f = Q(p(B_1)\dots p(B_n))$ où Q est un polynôme réel en n variables, où les B_j sont des boréliens disjoints de $T\times Y$ du type $]s,t]\times A$, $A\in\mathscr{B}_y$. Alors

$$\text{(I.19)}\qquad \delta(f\otimes \mathbb{1}_{B_j}) = a^+(B_j)\,f$$

car pour tout polynôme cylindrique

$$<\delta(f\otimes\mathbb{1}_{B_j}),g> \,=\, <f\otimes\mathbb{1}_{B_j},\nabla g> \,=\, <f,a(B_j)g> \,=\, (a^+(B_j)f,g>.$$

En utilisant (I.13) il vient

$$\text{(I.20)}\qquad a^+(B_j)f = q(B_j)f - p(B_j)\,\partial_{\varepsilon_j}f$$

$$\text{(I.21)}\qquad \text{avec } \partial_{\varepsilon_j}f = f - f(p(B_1)\dots,\, p(B_{J-1}),\, p(B_j)-1,\, p(B_{J+1})\dots . p(B_n)) .$$

(I.22) <u>Les espaces de Sobolev s'étudient</u> très naturellement à la Schwartz dans ce cadre i.e. en reprenant mot pour mot ce qui avait été fait dans le cas gaussien. Donc d'abord pour $1<p<\infty$ et k entier $W^{p,k}(X,H)$ est définit comme l'espace des $f\in L^p(X,H)$ dont les k premières dérivées distributions sont dans L^p ; et on vérifie que cet espace est normal [P.KR 74-75] [P.KR 76][M.KR 74-75]. Ceci permet de voir aussi $W^{p,k}$ comme un complété de $P(X)$. Si $p=2$, les raisonnements gaussiens se retranscrivent car formulables dans l'espace de Fock. Et on peut définir $W^{2,s}(X,H)$ pour tout réel s comme l'espace des $f\in(P(X)\otimes X')^*$ telles que $(1+N)^{s/2}f\in L^2(X,H)$; puis définir de même $W^{2,s}(X)$, puis observer que [B.LA 76] donne la continuité de $\delta : W^{2,s}(X,H)\to W^{2,s-1}(X)$ pour tout réel s.

Illustrons ceci en montrant d'abord que pour f et $g\in W^{4,1}(X)$ alors $fg\in W^{2,1}(X)$ et

(I.23) $\nabla(fg) = f\ \nabla g + g\ \nabla f + \nabla f\ \nabla g$

où $\nabla f\ \nabla g \in L^2(X,H)$ est défini par produit des valeurs de ∇f et $\nabla g \in L^4(X,H)$. Par continuité, densité et linéarité on peut supposer $f = \varepsilon(u)$, $g = \varepsilon(v)$ avec u et $v \in \cap L^p(T \times Y)$. Il suffit alors de combiner (I.17) avec

(I.24) $\varepsilon(u)\varepsilon(v) = e^{<f,g>}\ \varepsilon(u+v+uv)$.

Un corollaire de (I.23) est que pour tout $f \in W^{4,2}(X)$ et tout $u \in W^{4,1}(X,H)$ alors $f\,u \in \mathrm{Dom}\,\delta$ et

(I.25) $\delta(fu) = f\ \delta u - <\nabla f.u>_H - \delta(\nabla f\ u)$.

Noter que le dernier terme n'existe pas dans le cas gaussien.

II. Applications au calcul stochastique.

Soit t fixé < 1 . Prenons f comme dans (I.18) les Boréliens $B_1 \ldots$ et B_{n-1} étant contenus dans $]0,t] \times Y$, $B_n =]t,t'] \times A$ avec $A \in B_Y$, $Q = Q(t_1,\ldots, t_n)$ étant constant quand t_n varie . Par application de (I.20) il vient puisque $\partial_{\varepsilon_n} f = 0$

$$\delta(f \otimes 1\!\!1_{]t,t']\times A}) = f\ q(]t,t'] \times A) .$$

Comme toute classe $u \in L^2(X,H)$ est limite d'une suite de sommes finies de processus simples adaptés du type ci-dessus il vient

(II.1) Théorème 1.

L'intégration des processus adaptés par rapport à $(\tilde{Y}_t)$ est prolongée par la divergence. Cette divergence induit pour tout réel s une application continue $W^{2,s}(X,H) \to W^{2,s-1}(X)$.

Soit ad le projecteur d'adaptation de $L^2(X,H)$ qui associe à toute classe u de processus " bruts" la classe ad u de processus adaptés telle que $(\mathrm{ad}\ u)_t = E[u_t \| \mathscr{F}_t]$. Alors ad commutant avec N [A.S.US 86] il en résulte que ad définit pour tout réel s une contraction de $W^{2,s}(X,H)$. Ce qui suit est la contre partie poissonnienne de [D.OC 84] [S.US 86] et se prouve par simple traduction des preuves browniennes car celles-ci ne mettent en jeu que la décomposition en chaos et son prolongement.

(II.2) Théorème 2.

Pour tout réel s , toute $f \in W^{2,s}(X)$ d'intégrale nulle est l'intégrale stochastique généralisée du processus $\mathrm{ad}(\nabla f)$.

En revanche l'énoncé qui suit et sa preuve n'ont rien à voir avec le cas Brownien car les trajectoires interviennent.

(II.3) Théorème 3.

Soit F fixé $\in W^{2,1}(X,H)$. Alors le processus suivant est continu en moyenne quadratique

(II.4) $t \to Z_t = \delta\left[F(\mathbb{1}_{]0,t]\times Y})\right] + \int_0^t \int_Y F(s,z)\ \rho(ds,dz) \in L^2(X,K)$

où $K = L^2(T,dt)$. Ce processus Z_t est purement de sauts et il saute aux mêmes instants que le processus de Poisson $t \to Y_t = p(]0,t] \times Y)$.

En combinant ce corollaire avec la théorie générale des changements de variables [DE P.A. ME 80] on obtient le

(II.5) Corollaire (formule de changement de variables).

Avec les notations du théorème 3, on a pour toute $f \in C^1(\mathbb{R})$ et posant $J_t = \delta(F\ \mathbb{1}_{]0,T]\times Y})$

$$f(J_t) = f(0) + \int_0^t \int_Y f'(J_{s-}) \left[-F(s,z)\ \rho(ds,dz) + \Delta Z_s dp(s,z)\right]$$

$$+ \sum_{s\leq t} \left[f(J_s) - f(J_{s-}) - f'(J_{s-})\ \Delta Z_s\right].$$

Pour prouver le théorème 3, on montre d'abord que l'application (II-4) est continue, puis on procède en trois étapes :

(i) Cas où $F = f\ 1_A$ où A est un Borélien de $T \times Y$ et où f est un polynôme cylindrique, polynôme que l'on exprime comme en (I.18). On a d'abord

$$\delta\left[f(1_A\ 1_{]0,t]\times Y})\right] = a^+(A \cap (]0,t]\times Y))f.$$

Appliquant la formule (I.20) il vient en posant $A(t) = A \cap (]0,t]\times Y)$:

$$\delta(f\ 1_{A(t)}) = f\ q(1_{A(t)}) - \iint_{A(t)} \partial_{\varepsilon(s,z)} f\ dp(s,z) .$$

Dans la dernière intégrale, $p(s,y) = p_x(s,y)$ désigne la mesure ponctuelle sur $T \times Y$ observée pour tout x fixé $\in X$; et il est convenu que $\partial_{\varepsilon(s,z)} f = 0$ si $(s,y) \in T \times Y$ n'appartient pas à l'union des B_j.

Comme $p = q + \rho$, il vient en ajoutant $\rho(1_{A(t)})$ aux deux membres

$$Z_t = \iint_{A(t)} (f - \partial_{\varepsilon(s,y)} f)\ dp(s,y) .$$

(ii) Cas où $F = f\ \mathbb{1}_A$ avec maintenant $f \in W^{2,s}(X)$. Introduisant une suite (f_α) de variables aléatoires cylindriques qui converge vers $f \in W^{2,1}(X)$, on a pour tout α fixé

$$\delta(f_\alpha\ 1_{A(t)}) = -\ f_\alpha\ \rho(A(t)) + \iint_{A(t)} (f_\alpha - \delta_{\varepsilon(s,y)} f_\alpha)\ dp(s,y) .$$

Lorsque $\alpha \to \infty$, le premier membre converge vers le processus $\delta(f\ 1_{A(t)})$ dans $L^2(X,K)$. Le premier terme du second membre tend vers $-f\ \rho(A(t))$ dans $L^2(X,K)$. Donc le dernier terme du deuxième membre converge aussi vers un certain processus $Z \in L^2(X,K)$. Par extraction d'une sous suite on voit que ce processus saute aux mêmes instants que le processus de Poisson. D'où

$$\delta(f\ 1_{A(t)}) = - f\ \rho(A(t)) + Z_t \quad .$$

(iii) Considérons le cas général où $F \in W^{2,1}(X,H)$. Introduisons pour tout entier n une partition de $T \times Y$ en n Boréliens fixés B_j et supposons que $\rho(B_j) \to 0$ si $n \to \infty$. Considérons pour tout n fixé le champ aléatoire F^n sur $T \times Y$ constant sur chaque B_j et déduit de F par l'opération de moyenne sur les B_j . Il est clair que $(F^n) \to F$ dans $W^{2,1}(X,H)$. Vu (ii) on a pour tout n fixé.

$$\delta(F^n\ 1_{]0,t]\times Y}) = - \iint_{]0,t]\times Y} F^n(s,y)\ d\rho(s,y) + Z_t^n \ ,$$

où Z_t^n est un processus de sauts purs et il saute aux mêmes instants que le Processus de Poisson. Quand $n \to \infty$, le premier membre converge dans $L^2(X,K)$ vers le processus $J_t = \delta(F\ 1_{]0,t]\times Y})$. Le premier terme du second membre converge dans $L^2(X.K)$ vers $- \iint_{]0,t]\times Y} F\ d\rho$. Donc le dernier terme converge vers une limite (Z_t) qui est purement de sauts, saute aux mêmes instants que le Poisson. Comme (Z_t) admet une version cadlag , il est de même du processus (J_t) , qui est donc à variation finie. On peut donc appliquer la formule (92-1) p. 170 de [C.DE et P.A.ME 80].

REFERENCES

[BI, GR, JA 87] = K. Bichteler, J.B. Gravereaux et J. Jacod : Malliavin Calculus for for processes with jumps, Gordon and Breach, 1987.

[K. BI, J.JA 86] = K. Bichteler et J. Jacod : Calcul de Malliavin pour les processus avec sauts, existence d'une densité dans le cas unidimensionnel. Séminaire de Probabilités XVII. Lecture Notes in Math. n° 986 Springer 1983.

[C. DE et P.A ME 80] = C. Dellacherie et P.A. Meyer. - Probabilités et Potentiel Chap. V à VIII Edition 1980 - Hermann.

[P.KR. 76] = P. Krée : Théorie des distributions en dimension infinie. Bull. Soc. Math. France. Suppl. n° 46 (Coll. Lyon (1975).

[P.KR. 74-75] : P. Krée.: Solutions Faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles Lectures notes in Math. n° 410 (1974) et n° 474 (1975).

[M. KR 74-77] : M. Krée : Propriétés de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev. Comptes Rendus t. 279 (1974) série A pp. 157-160 et Bull. Soc. Math. de France 105 (1977) pp. 141-163.

[P. KR 87] = P. Krée : Théorème des distributions en dimension quelconque et intégrales stochastiques multiples.
Conférence Silivri (1986) à paraître Lect. Notes in Math. 1988.

[B. LA 76]= B. Lascar : Propriétés locales d'espaces de Sobolev en dimension infinie. Comm. in Part. Diff. Equations. 1(6) 561-584 (1976).

[J. NE 68] = J. Neveu : Processus Aléatoires Gaussiens.
Les Presses de l'Univ. de Montréal (1968).

[D. NU, E. PA 86] = D. Nualart et E. Pardoux Stochastic Calculus for Non Adapted Processes (preprint 1986).

[D. OC 84] = D. Ocone : Malliavin Calculus and stochastic integral representation of functionals of diffusion processes Stochastics 12 (1984) pp. 161-185.

[A.SK 75] = A. Skorokhod : On a generalization of a Stochastic Integral. Theory of Prob. Appl. 20 (1975) 219-233.

[D. SU. 84] = D. Surgailis : on multiple Poisson Stochastic integrals and Associated Markov Semi-groups. Prob. and Math. Stat. (Pologne) Vol. 3. Fasc. 2 (1984) p. 217-239.

[A.S.US 85] = A.S. Ustunel : Une extension du calcul de Ito par le calcul des variations stochastiques. Comptes Rendus Série 1 Vol. 300 pp. 277-279 (1985).

[A.S.US. 87] = A.S. Ustunel : Représentation of Distributions on the Wiener Space and Stochastic Calculus of Variation.Journ. of Funct. Anal. Vol 70 (1987) n° 126-139.

A.DE et P.KR : UA 213. Departement de mathématiques
L.WU : Labo de Probabilités
Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu 75005 PARIS