PHILIPPE BIANE
MARC YOR

Sur la loi des temps locaux browniens pris en un temps exponentiel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 454-466
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__454_0>

SUR LA LOI DES TEMPS LOCAUX BROWNIENS PRIS EN UN TEMPS EXPONENTIEL.

Ph. BIANE[1] *et M. YOR*[2]

1. INTRODUCTION.

(1.1) L'un des buts de ce travail est de montrer que le théorème de Ray ([7]) qui explicite la loi du processus $(\ell_S^a\ ;\ a \in \mathbb{R})$ des temps locaux browniens pris au temps exponentiel S indépendant du mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ peut être obtenu très aisément à partir des versions de ce théorème lorsque S est remplacé par les temps d'arrêt $\tau_s = \inf\{t : \ell_t^o > s\}$ $(s > 0)$ et $T_o = \inf\{t : B_t = 0\}$. Nous rappelons ces versions, dûes à Ray [7] et Knight [4] :

(RK1) Soit $s > 0$, et $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0. Les deux processus $(\ell_{\tau_s}^x\ ;\ x \geq 0)$ et $(\ell_{\tau_s}^{-x}\ ;\ x \geq 0)$ sont indépendants et ont pour loi celle du carré, issu de s, d'un processus de Bessel de dimension 0.

(RK2) Soit $a > 0$, et $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de a. On note $T_o = \inf\{t : B_t = 0\}$. Le processus $(\ell_{T_o}^x\ ;\ x \geq 0)$ est un processus de Markov inhomogène que l'on peut décrire comme suit :

$(\ell_{T_o}^x\ ;\ 0 \leq x \leq a)$ est le carré d'un processus de Bessel de dimension 2, issu de 0 ; conditionnellement à $\ell_{T_o}^a = m$, le processus $(\ell_{T_o}^x\ ;\ x \geq a)$ est le carré, issu de m, d'un processus de Bessel de dimension 0.

Par ailleurs, on peut énoncer le théorème de Ray concernant les temps exponentiels de la façon suivante (cf : Borodin [2]) :

Théorème 1 (Ray [7]) : *Soit S_θ temps exponentiel, de paramètre $\frac{\theta^2}{2}$, indépendant du mouvement brownien B, issu de 0.*

(i) les variables $\ell_{S_\theta}^o$ et B_{S_θ} sont indépendantes, et ont pour distribution :

---

(1) *C.N.R.S., L.A. 212, Université Paris VII, Tour 45-55, 5ème Etage - 2, place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05*

(2) *Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie - 4, place Jussieu Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05*

$$P(\ell^{o}_{S_\theta} \in ds) = \theta e^{-\theta s} ds \ ; \quad P(B_{S_\theta} \in da) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|a|} da \ ;$$

(ii) Conditionnellement à $\ell^{o}_{S_\theta} = s$, *et* $B_{S_\theta} = a > 0$, *le processus* $(\ell^{x}_{S_\theta} \ ; \ x \in \mathbb{R})$ *est un processus de Markov inhomogène tel que*

$$\left.\begin{array}{ll} (\ell^{-x}_{S_\theta} \ ; \ x \leq 0) & \text{——} \\[2ex] (\ell^{x}_{S_\theta} \ ; \ 0 \leq x \leq a) & \text{——} \\[2ex] (\ell^{x}_{S_\theta} \ ; \ x \geq a) & \text{——} \end{array}\right| \ \underline{\textit{a pour générateur}} \ \left|\begin{array}{l} \text{——} \ 2x \dfrac{d^2}{dx^2} - 2\theta x \dfrac{d}{dx} \\[2ex] \text{——} \ 2x \dfrac{d^2}{dx^2} - 2\theta x \dfrac{d}{dx} + 2 \dfrac{d}{dx} \\[2ex] \text{——} \ 2x \dfrac{d^2}{dx^2} - 2\theta x \dfrac{d}{dx} \end{array}\right.$$

Soulignons que cette présentation du théorème de Ray est considérablement plus simple que la présentation d'origine (voir, par exemple, Itô-Mc Kean [10], § 2.8, p. 66, ou D. Williams [9], p. 760-762) ; en conséquence, elle est de manipulation plus aisée (pour une application, voir Csaki-Földes [11]).

(1.2) Le présent article est organisé comme suit : dans le paragraphe 2, nous donnons une démonstration du théorème 1 qui s'appuie sur une représentation intégrale des lois browniennes ([1], § 6) que nous rappelons et discutons ; dans le paragraphe 3, nous généralisons le théorème 1 aux temps locaux de $B + \lambda\ell^{o}$, complétant les résultats de Le Gall-Yor [5a] ; enfin, dans le paragraphe 4, nous obtenons, grâce à la formule de Kallianpur-Striebel [3] une version du théorème 1 où le conditionnement par B_{S_θ} a été supprimé.

2. UNE REPRESENTATION INTEGRALE DES LOIS BROWNIENNES.

(2.1) Nous allons utiliser, dans ce paragraphe, les notations introduites en [1], § 6. Pour la commodité du lecteur, nous commençons par rappeler ces notations. $\mathcal{W}$ désigne l'espace des fonctions continues ω, définies sur un intervalle $[0,\zeta(\omega)]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Introduisons les opérations suivantes sur $\mathcal{W}$:

Composition : à tout couple $(\omega_1,\omega_2) \in \mathcal{W}^2$, on associe $\omega_1 \circ \omega_2$ définie par :

$$\zeta(\omega_1 \circ \omega_2) = \zeta(\omega_1) + \zeta(\omega_2)$$

$$\omega_1 \circ \omega_2(s) \begin{cases} = \omega_1(s) & , \text{ si } 0 \leqq s \leqq \zeta(\omega_1) \\ = \omega_1(\zeta(\omega_1)) + \omega_2(s-\zeta(\omega_1)) - \omega_2(0), & \text{si } \zeta(\omega_1) \leqq s \leqq \zeta(\omega_1) + \zeta(\omega_2). \end{cases}$$

Retournement : à tout $\omega \in \mathcal{W}$, on associe $\check{\omega}$ défini par :

$$\zeta(\check{\omega}) = \zeta(\omega) \; ; \; \check{\omega}(s) = \omega(\zeta(\omega)-s) \qquad \text{si } 0 \leqq s \leqq \zeta(\omega).$$

Arrêt : si $T : \mathcal{W} \to \mathbb{R}_+$ est une application mesurable, on définit ω^T par :

$$\zeta(\omega^T) = T(\omega) \wedge \zeta(\omega) \; ; \; \omega^T(s) = \omega(s), \qquad \text{si } 0 \leqq s \leqq \zeta(\omega^T).$$

Si M est une mesure sur $\mathcal{W}$, on note ${}^{\vee}M$, resp: M^T, l'image de M par l'application : $\omega \to \check{\omega}$, resp : $\omega \to \omega^T$; si M et N sont deux mesures sur $\mathcal{W}$, on note $M \circ N$ l'image de $M \otimes N$ par l'application : $(\omega,\omega') \to \omega \circ \omega'$.

On appliquera par la suite les opérations définies ci-dessus à P_a, loi du mouvement brownien réel issu de a, a parcourant $\mathbb{R}$.

(2.2) Nous allons démontrer le théorème 1 à l'aide des théorèmes (RK1) et (RK2) et de la représentation intégrale suivante (cf : Biane-Yor [1], § 6) :

$$(2.a) \qquad \int_0^\infty dt \; P_o^t = \int_0^\infty ds \; P_o^{\tau_s} \circ \int_{-\infty}^{\infty} da \; {}^{\vee}(P_a^{T_o}).$$

Nous commençons par appliquer l'identité (2.a) à l'étude de la loi de la variable A_{S_θ}, où $(A_t, t \geqq 0)$ désigne une fonctionnelle additive continue positive, et S_θ désigne toujours un temps exponentiel de paramètre $\frac{\theta^2}{2}$ indépendant du mouvement brownien $(B_t, t \geqq 0)$, issu de 0. On a :

$$(2.b)\qquad E_o\left[e^{-A_{S_\theta}}\right] = \frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty ds\, E_o\left[e^{-A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s}\right]\int_{-\infty}^{\infty} da\, E_a\left[e^{-A_{T_o} - \frac{\theta^2}{2}T_o}\right].$$

Cette formule est encore valable lorsque l'on remplace (-A) par (iA), si A désigne une fonctionnelle additive de signe quelconque.

Cette remarque étant faite, on obtient à partir de (2.b), en prenant une combinaison linéaire de A, ℓ_t^o et $(B_t - B_o)$:

$$(2.c)\qquad \begin{aligned} &E_o\left[e^{-A_{S_\theta} - \lambda \ell^o_{S_\theta} + i\mu B_{S_\theta}}\right] \\ &= \frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty ds\, e^{-\lambda s}\, E_o\left[e^{-A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s}\right]\int_{-\infty}^{\infty} da\, e^{i\mu a}\, E_a\left[e^{-A_{T_o} - \frac{\theta^2}{2}T_o}\right] \end{aligned}$$

On déduit aisément de la formule (2.c) les résultats suivants :

(i) les variables $\ell^o_{S_\theta}$ et B_{S_θ} sont indépendantes, et ont respectivement pour distribution :

$$P_o(\ell^o_{S_\theta} \in ds) = \theta e^{-\theta s}\, ds\ ; \qquad P_o(B_{S_\theta} \in da) = \frac{\theta}{2}\, e^{-\theta|a|} da.$$

(ii) pour toute fonctionnelle additive positive A :

$$(2.d)\qquad \begin{aligned} &E_o\left[e^{-A_{S_\theta}} \,\middle|\, \ell^o_{S_\theta} = s\ ;\ B_{S_\theta} = a\right] \\ &= E_o\left[e^{-A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s}\right] e^{\theta s}\, E_a\left[e^{-A_{T_o} - \frac{\theta^2}{2}T_o}\right] e^{\theta|a|}. \end{aligned}$$

On ne perdra pas de généralité par la suite en supposant $a > 0$.

Le reste de la démonstration du théorème 1 consiste maintenant à appliquer le théorème de Girsanov qui permet en particulier d'expliciter les relations d'absolue continuité existant entre les carrés de processus de Bessel et de processus d'Ornstein-Uhlenbeck de même dimension.

Notons C_x pour $\ell^x_{T_o}$, sous P_a.

D'après (RK2), le processus $(C_x\ ;\ x \geq 0)$ est solution (en loi) de l'e.d.s. :

(2.e) $$C_x = 2\int_0^x \sqrt{C_y}\, d\beta_y + \int_0^x dy\ 2\ 1_{(0\le y\le a)},$$

où $(\beta_y\ ;\ y \ge 0)$ est un mouvement brownien réel.

Supposons que (A_t) s'écrive sous la forme :

$$A_t = \int_0^t ds\ f(B_s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\ell_t^x.$$

On a, sous P_a : $A_{T_0} = \int_0^\infty dx\ f(x) C_x$.

On peut alors écrire :

$$E_a\left[e^{-A_{T_0} - \frac{\theta^2}{2} T_0}\right] e^{\theta a} = E\left[e^{-\int_0^\infty dx\ f(x) C_x - \frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty dx\ C_x}\ e^{\theta a}\right]$$

D'après l'équation (2.e), on a : $\int_0^\infty \sqrt{C_y}\, d\beta_y = -a$,

et donc :

$$\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty dx\ C_x + \theta a\right) = \exp\left(-\theta\int_0^\infty \sqrt{C_y}\, d\beta_y - \frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty dy\ C_y\right).$$

On peut donc écrire, à l'aide du théorème de Girsanov :

$$E_a\left[\exp\left(-A_{T_0} - \frac{\theta^2}{2} T_0\right)\right] e^{\theta a} = E^\theta\left[\exp\left(-\int_0^\infty dx\ f(x) C_x\right)\right]$$

où P^θ est la loi du processus $(C_x\ ;\ x \ge 0)$, solution de l'e.d.s. :

(2.f) $$C_x = 2\int_0^x \left(\sqrt{C_y}\, d\beta_y - \theta\, C_y\, dy\right) + 2\int_0^x dy\ 1_{(0\le y\le a)}.$$

On considère de la même façon l'expression :

$$E_0\left[e^{-A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s}\right] e^{\theta s}$$

et l'on note : $D_x^1 = \ell_{\tau_s}^x\ (x \ge 0)$, $D_x^2 = \ell_{\tau_s}^{-x}\ (x \ge 0)$.

Ces deux processus sont indépendants et solutions (en loi) de :

(2.g) $$D_x^i = s + 2\int_0^x \sqrt{D_y^i}\, d\gamma_y^i, \qquad (i = 1,2),$$

où $(\gamma^i \ ; \ i = 1,2)$ désignent deux mouvements browniens réels indépendants.

Décomposons A_t en $A_t^1 + A_t^2$, avec :

$$A_t^1 = \int_0^t ds\ f(B_s) 1_{(B_s > 0)} \quad \text{et} \quad A_t^2 = \int_0^t ds\ f(B_s) 1_{(B_s < 0)}.$$

Alors :

$$A_{\tau_s}^{1,2} = \int_0^\infty f_{1,2}(x) D_x^{1,2}, \quad \text{où :} \quad f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = f(-x).$$

On a :

$$E_o\left[e^{-A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s}\right] e^{\theta s}$$

$$= \prod_{i=1}^{2} E\left[\exp\left(-\int_0^\infty dx\ f_i(x) D_x^i - \frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty dx\ D_x^i\right) \exp\left(\frac{\theta s}{2}\right)\right].$$

D'après l'équation *(2.g)*, on a : $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{D_y^i}\, d\gamma_y^i = -\frac{s}{2} \quad (i = 1,2),$

et donc :

$$\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty dx\ D_x^i + \frac{\theta s}{2}\right) = \exp\left(-\theta\int_0^\infty \sqrt{D_y^i}\, d\gamma_y^i - \frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty dy\ D_y^i\right).$$

On en déduit, à l'aide du théorème de Girsanov :

$$E_o\left[e^{-A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s}\right] e^{\theta s} = \prod_{i=1}^{2} E_i^{\theta,s}\left[\exp\left(-\int_0^\infty dx\ f_i(x) D_x^i\right)\right],$$

et, sous $P_i^{\theta,s}$, le processus D_x^i est solution de l'e.d.s. :

(2.h) $$D_x^i = s + 2\int_0^x \sqrt{D_y^i}\, d\gamma_y^i - 2\theta\int_0^x D_y^i\, dy \qquad (i = 1,2)$$

où $(\gamma^i \ ; \ i = 1,2)$ désignent toujours deux mouvement browniens réels indépendants.

Finalement, on a, d'après la formule *(2.d)* :

$$E_o\left[\exp\left(-\int dy\ f(y) \ell_{S_\theta}^y\right) \middle| \ell_{S_\theta}^o = s,\ B_{S_\theta} = a\right] = E\left[\exp\left(-\int dy\ f(y) \lambda_y\right)\right],$$

où $(\lambda_y, y \in \mathbb{R})$ est défini comme suit :

$$\begin{cases} y \geq 0 : \lambda_y = C_y + D^1_y, \text{ avec } C \text{ et } D^1 \text{ solutions respectives des équations } (2.g) \\ \qquad\qquad \text{et } (2.h), \text{ et supposées de plus, indépendantes ;} \\ y \leq 0 : \lambda_y = D^2_{-y}, \text{ avec } D^2 \text{ solution de } (2.h), \text{ indépendante de } C \text{ et } D^1. \end{cases}$$

On obtient ainsi, pour $x \geq 0$:

$$\lambda_x = s + 2\int_0^x \sqrt{\lambda_y}\, d\tilde{\gamma}_y - 2\theta \int_0^x \lambda_y\, dy + 2\int_0^x dy\, 1_{(0 \leq y \leq a)}$$

$$\lambda_{-x} = s + 2\int_0^x \sqrt{\lambda_{-y}}\, d\gamma^2_y - 2\theta \int_0^x \lambda_{-y}\, dy,$$

où $\tilde{\gamma}$ et γ^2 désignent deux mouvements browniens indépendants.

Ainsi, nous avons démontré complètement le théorème 1, avec une formulation en termes d'e.d.s.

(2.3) Remarque : A propos de l'utilisation du théorème de Girsanov.

Nous avons appliqué le théorème de Girsanov de façon spatiale ; nous aurions pu l'appliquer tout d'abord de façon temporelle, et constater que "le diagramme est commutatif". Pour cela, retournant à l'identité $(2.d)$, identifions les martingales:

$$M_t = E_0\left[\exp(-\frac{\theta^2}{2}\tau_s + \theta s) \mid \mathcal{F}_t\right] \quad \text{et} \quad N_t = E_a\left[\exp(-\frac{\theta^2}{2} T_0 + \theta a) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

où $(\mathcal{F}_t)$ désigne la filtration naturelle de B.

La martingale (M_t), resp : (N_t), est constante à partir de τ_s, resp : T_0, et on a :

$$M_t = \exp(-\theta(|B_t| - \ell_t) - \frac{\theta^2}{2} t) \qquad (t \leq \tau_s)$$

$$N_t = \exp(-\theta(B_t - a) - \frac{\theta^2}{2} t) \qquad (t \leq T_0).$$

En conséquence, en retournant à la formule $(2.d)$, on obtient :

$$(2.i) \qquad \begin{aligned} E_0\left[\exp(-A_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s)\right] e^{\theta s} &= \tilde{E}^\theta(e^{-A_{\tau_s}}) \\ E_a\left[\exp(-A_{T_0} - \frac{\theta^2}{2} T_0)\right] e^{\theta a} &= \hat{E}^\theta_a(e^{-A_{T_0}}), \end{aligned}$$

où $\tilde{P}^\theta$, resp : $\hat{P}^\theta_a$, est la loi de la solution de :

$$\tilde{X}_t = B_t - \theta\int_0^t \operatorname{sgn}(\tilde{X}_s)ds, \text{ resp : } \hat{X}_t = a + B_t - \theta t.$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, on a :

- sous $\tilde{P}^\theta$, $(\ell^y_{\tau_s}, y \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (D^1_y \; ; \; y \geq 0)$, solution de $(2.h)$,

- sous $\hat{P}^\theta_a$, $(\ell^y_{T_o}, y \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (C_y \; ; \; y \geq 0)$, solution de $(2.\mathfrak{z})$.

3. *UNE EXTENSION DU THEOREME 1.*

(3.1) Quelques notations.

$(B_t, t \geq 0)$ désigne toujours un mouvement brownien réel, issu de 0, (ℓ^a_t) la famille bicontinue de ses temps locaux, et S_θ une variable exponentielle de paramètre $\frac{\theta^2}{2}$, indépendante de B.

Si $(X_t, t \geq 0)$ est une semimartingale continue, on note $(L^x_t(X) \; ; \; x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ la famille de ses temps locaux, conjointement continue en t et càdlàg en x.

Nous avons encore besoin d'introduire les deux familles mesurables

$$(\lambda^{x,\pm}_t(\delta) \; ; \; x \in \mathbb{R}, \; \delta > 0, \; t \geq 0)$$

constituées des variables définies, pour tout $\delta > 0$, par l'identité :
pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, borélienne,

$$\int_0^t ds \, f(B_s + \frac{1}{\delta} \ell^o_s) \, 1_{(B_s \in \mathbb{R}_\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, \lambda^{x,\pm}_t(\delta).$$

L'objet de ce paragraphe est la description, pour tout $\delta > 0$ fixé, de la loi des processus suivants :

$$(3.a) \qquad (L^x_{S_\theta}(B + \frac{1}{\delta}\ell^o) \; ; \; x \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (L^x_{S_\theta}(|B| + \frac{1}{\delta}\ell^o) \; ; \; x \geq 0).$$

Remarquons que le premier processus figurant en $(3.a)$ est identique à :

$$(\lambda^{x,+}_{S_\theta}(\delta) + \lambda^{x,-}_{S_\theta}(\delta) \; ; \; x \in \mathbb{R})$$

(3.2) Pour parvenir à notre but, nous nous appuierons en particulier sur les résultats suivants, obtenus en [5 a] et [5 b], et qui constituent une généralisation de (RK1).

Théorème 2 : *Soient* $\delta > 0$ *et* $s > 0$ *fixés. Les processus* $(\lambda^{x,+}_{\tau_s}(\delta)\ ;\ x \in \mathbb{R})$ *et* $(\lambda^{x,-}_{\tau_s}(\delta)\ ;\ x \in \mathbb{R})$ *sont indépendants et satisfont les identités en loi* :

$$(\lambda^{x,+}_{\tau_s}(\delta)\ ;\ x \in \mathbb{R}) \overset{(d)}{=} (C_{x+}\ ;\ x \in \mathbb{R})$$

$$(\lambda^{x,-}_{\tau_s}(\delta)\ ;\ x \in \mathbb{R}) \overset{(d)}{=} (C_{(\frac{s}{\delta} - x)^+}\ ;\ x \in \mathbb{R})$$

où $(C_y\ ;\ y \geq 0)$ *désigne un processus de Markov inhomogène, issu de* 0, *qui est le carré d'un processus de Bessel - de dimension* δ, *sur l'intervalle* $(0,\frac{s}{\delta})$

- de dimension 0, *sur l'intervalle* $(\frac{s}{\delta},\infty)$.

On déduit du théorème 2, en faisant tendre s vers $+\infty$ le

Corollaire 3 (*Le Gall-Yor* [5 *a*]) : *Soit* $\delta > 0$ *fixé. Les processus* $(\lambda^{x,+}_{\infty}(\delta)\ ;\ x \geq 0)$ *et* $(L^x_\infty(|B| + \frac{2}{\delta}\ell^0)\ ;\ x \geq 0)$ *ont pour loi commune celle du carré du processus de Bessel de dimension* δ, *issu de* 0.

(3.3) Notre second ingrédient pour l'étude de la loi des processus qui figurent en (3.*a*) est la généralisation suivante, qui ne présente aucune difficulté, de la formule (2.*d*) :

$$E\left[\exp(-A_{S_\theta})\,|\,\ell^0_{S_\theta} = s,\ B_{S_\theta} = a\right]$$

(3.*b*)

$$= E\left[\exp - (A_{\tau_s} + \frac{\theta^2}{2}\tau_s)\right]e^{\theta s}\ E_a\left[\exp - (A^s_{T_0} + \frac{\theta^2}{2}T_0)\right]e^{\theta|a|}$$

où $A_t = \int_0^t du\ f(B_u,\ell^0_u)$, avec $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, fonction borélienne, et, pour tout $s \geq 0$, $A^s_t = \int_0^t du\ f(B_u,s)$.

En modifiant de façon adéquate les calculs effectués en (2.2), on obtient, à l'aide du théorème 2, et de la formule (3.*b*), le :

Théorème 4 : 1) *Pour tout* $\delta > 0$, *conditionnellement à* $\ell^0_{S_\theta} = s$ *et* $B_{S_\theta} = a > 0$, *les processus* $(\lambda^{x,+}_{S_\theta}(\delta)\ ;\ x \in \mathbb{R})$ *et* $(\lambda^{x,-}_{S_\theta}(\delta)\ ;\ x \in \mathbb{R})$ *sont indépendants et ont pour lois respectives celles des processus* :

$$(C_{x+}\ ;\ x \in \mathbb{R}) \quad et \quad (\mathcal{D}_{(\frac{s}{\delta} - x)^+}\ ;\ x \in \mathbb{R})$$

où les processus C et D sont les solutions (en loi) des e.d.s. :

$$C_x = 2\int_0^x \sqrt{C_y}\, d\beta_y - 2\theta \int_0^x C_y\, dy + \int_0^x dy \left[\delta\, 1_{(0 \le y \le \frac{s}{\delta})} + 2\, 1_{(\frac{s}{\delta} \le y \le \frac{s}{\delta} + a)}\right]$$

$$D_x = 2\int_0^x \sqrt{D_y}\, d\tilde{\beta}_y - 2\theta \int_0^x D_y\, dy + \delta \int_0^x dy\, 1_{(0 \le y \le \frac{s}{\delta})},$$

où β et $\tilde{\beta}$ sont deux mouvements browniens réels, indépendants.

2) Soit $\delta > 0$ fixé. La loi du processus $(\lambda^{x,+}_{S_\theta}(2\delta), x \ge 0)$, conditionnellement à $\ell^0_{S_\theta} = s$ et $B_{S_\theta} = a > 0$, est identique à celle de $(L^x_{S_\theta}(|B| + \frac{1}{\delta}\ell^0)\ ;\ x \ge 0)$, conditionnellement à $\ell^0_{S_\theta} = s$ et $B_{S_\theta} = a > 0$.

Remarque : On retrouve l'énoncé du théorème 1 en faisant tendre δ vers $+\infty$ dans la partie 1) du théorème 4.

4. SUPPRESSION DU CONDITIONNEMENT PAR RAPPORT A B_{S_θ}.

Dans ce paragraphe, nous déduisons du théorème 1 la loi du processus $(\ell^x_{S_\theta}\ ;\ x \ge 0)$ conditionnellement à $B_{S_\theta} > 0$. Pour cela, nous utilisons le théorème de Girsanov de façon tout à fait analogue à ce qui est fait en théorie du filtrage non linéaire. (C'est, pour l'essentiel, la formule de Kallianpur-Striebel [3] ; voir aussi Meyer [6], ou Rogers-Williams [8], p. 329).

<u>Théorème 5</u> : *Conditionnellement à $\ell^0_{S_\theta} = s$ et $B_{S_\theta} > 0$, le processus $(\ell^x_{S_\theta}, x \ge 0)$ est solution de l'équation différentielle stochastique :*

$$\lambda^x = s + 2\int_0^x \sqrt{\lambda^y}\, d\gamma_y - 2\theta \int_0^x \lambda^y\, dy - 2\int_0^x \frac{dy}{1 + \theta M_y \int_0^y \frac{du}{M_u}}$$

où $M_y = \left(\frac{\lambda^0}{\lambda^y}\right)^{1/2} \exp \frac{1}{2}\int_0^y \frac{du}{\lambda^u}$ et $(\gamma_y, y \ge 0)$ est un mouvement brownien réel.

De plus, conditionnellement à $(\ell^x_{S_\theta}, x \ge 0)$, la loi de B_{S_θ} est :

$$\frac{M_y\, dy}{\int_0^\zeta M_y dy}\, 1_{(y < \zeta)}\ , \quad \text{où } \zeta = \sup(B_s\ ;\ s \le S_\theta) = \inf\{x \ge 0 : \ell^x_{S_\theta} = 0\}.$$

Démonstration : Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_x,x \geq 0),P)$ un espace de probabilité filtré sur lequel est défini un processus $(\mu_x,x \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, solution de l'équation :

$$\mu_x = s + 2\int_0^x \sqrt{\mu_y}\, d\beta_y - 2\theta\int_0^x \mu_y\, dy + 2x$$

avec $(\beta_y,y \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_x)$ mouvement brownien réel.

On pose : $\quad M_x = (\frac{\mu_0}{\mu_x})^{1/2} \exp(-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{dy}{\mu_y})$.

On a alors, par application de la formule d'Itô :

$$e^{-\theta x} M_x = \exp\left(-\int_0^x \frac{d\beta_y}{\sqrt{\mu_y}} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dy}{\mu_y}\right) = 1 - \int_0^x \frac{d\beta_y}{\sqrt{\mu_y}} e^{-\theta y} M_y.$$

D'autre part, définissons, pour tout $a > 0$:

$$Z_x^a = 1_{(a \geq x)} + 1_{(a<x)} \frac{e^{-\theta x}M_x}{e^{-\theta a}M_a} = 1_{(a \geq x)} + 1_{(a<x)}\left(1 - \int_a^x \frac{d\beta_y}{\sqrt{\mu_y}} \frac{e^{-\theta y}M_y}{e^{-\theta a}M_a}\right)$$

$(Z_x^a\ ;\ x \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_x)$ martingale locale strictement positive, et donc une surmartingale. On note $\mathbb{P}^{Z^a}$ la mesure de Föllmer associée à Z^a.

D'après le théorème 1, la loi de $(\ell_{S_\theta}^x\ ;\ x \geq 0)$ conditionnellement à $\ell_{S_\theta}^0 = s$ et $B_{S_\theta} = a$ est identique à celle de $(\mu_x,x \geq 0)$ sous $\mathbb{P}^{Z^a}$.

En conséquence, la loi du couple $((\ell_{S_\theta}^x,x \geq 0),B_{S_\theta})$, conditionnellement à $(B_{S_\theta} > 0)$ est celle de $((\mu_x,x \geq 0),a)$ sous la mesure

$$\mathbb{P}^{Z^a}\ \theta e^{-\theta a}\, da \quad \text{sur} \quad (\Omega \times \mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+.$$

On en déduit :

(i) la loi de $(\ell_{S_\theta}^x\ ;\ x \geq 0)$, conditionnellement à $(B_{S_\theta} > 0)$, est identique à celle du processus $(\mu_x,x \geq 0)$ sous la mesure :

$$\int_0^\infty \mathbb{P}^{Z^a}\ \theta e^{-\theta a}\, da = \mathbb{P}^{\int_0^\infty Z^a\ \theta e^{-\theta a} da}$$

Or :

$$\mathcal{Z}_x \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty \theta e^{-\theta a}\, \mathcal{Z}_x^a\, da = e^{-\theta x} + \theta e^{-\theta x} M_x \int_0^x \frac{da}{M_a}$$

$$= 1 - \theta \int_0^x \frac{d\beta_y}{\sqrt{\mu_y}} e^{-\theta y} M_y \int_0^y \frac{da}{M_a}$$

$(\mathcal{Z}_x, x \geq 0)$ est donc une martingale locale qui satisfait :

$$\frac{d\mathcal{Z}_x}{\mathcal{Z}_x} = - \frac{d\beta_x}{\sqrt{\mu_x}} \frac{\theta M_x \int_0^x \frac{du}{M_u}}{1 + \theta M_x \int_0^x \frac{du}{M_u}}$$

On obtient alors la première partie du théorème 5 en appliquant le théorème de Girsanov en des temps d'arrêt qui réduisent $\mathcal{Z}$, par exemple :

$$\rho_\varepsilon = \inf\{x \geq 0 : \mu_x \leq \varepsilon \quad \text{ou} \quad \mu_x \geq \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

(ii) La loi de B_{S_θ} conditionnellement à $(\ell^x_{S_\theta}, x \geq 0)$ est bien celle indiquée dans l'énoncé du théorème 5. □

Des calculs analogues permettent de supprimer le conditionnement par rapport à $\ell^0_{S_\theta}$ et B_{S_θ} qui apparaît dans l'énoncé du Théorème 4. Les formules obtenues sont plus compliquées ; nous ne les présenterons pas ici.

REFERENCES :

[1] *Ph. BIANE, M. YOR* : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sci. Math. 2e série, 111 (1987), p. 23-101.

[2] *A.N. BORODIN* : Distribution of integral functionals of Brownian motion. Zap. Naučn. Sem. LOMI 119 (1982), p. 19-38. (In Russian).

[3] *G. KALLIANPUR, C. STRIEBEL* : Estimation of stochastic systems : arbitrary system theorems with additive white noise observation errors. Ann. Math. Stat. 39 (1968), p. 785-801.

[4] F.B. KNIGHT : Random walks and the sojourn density process of Brownian motion.
Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), p. 56-86.

[5a] J.F. LE GALL, M. YOR : Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel.
C.R.A.S., t. 303, Série I, n° 3 (1986), p. 73-76.

[5b] J.F. LE GALL, M. YOR : Sur certaines lois limites intervenant dans l'étude des enlacements du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. En préparation.

[6] P.A. MEYER : Sur un problème de filtration.
Séminaire de Probabilités VII. Lect. Notes in Maths. 321. Springer (1973).

[7] D.B. RAY : Sojourn times of a diffusion process. Illinois J. Math. 7 (1963), p. 615-630.

[8] L.C.G. ROGERS, D. WILLIAMS : Diffusions, Markov Processes and Martingales. Vol. 2 : Itô Calculus. Wiley (1987).

[9] D. WILLIAMS : Path decomposition and continuity of local time for one dimensional diffusions. Proc. London Math. Soc. (3), 28 (1974), p. 738-768.

[10] K. ITÔ, H.P. Mc KEAN : Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).

[11] E. CSAKI, A. FÖLDES : A note on the stability of the local time of a Wiener process.
Stochastic Processes and their applications, 25 (1987), p. 203-213.